Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.
УДК.519.1.

РЕГУЛЯРНАЯ ПОРОГОВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ РАЗРЫВА ЦЕПИ В СЛУЧАЙНОМ ДЕРЕВЕ

Г.Н.Вагаев, Г.Б.Смирнова

В дереве T_n, случайным образом из множества всех деревьев с n отмеченными вершинами, на удачу помечаются $\ell=\ell(n)$ вершин. Событие A означает, что в цепи, соединяющей две фиксированные вершины u и v, имеется хотя бы одна помеченная вершина, иными словами, событие A означает разрыв цепи между вершинами u и v.

Монотонная функция $\varphi(n)(\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\infty)$ называется пороговой функцией свойства A /см. [1] /, если для $P_{n,\ell(n)}$ - вероятности появления события A

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,\ell(n)} = \begin{cases} 0, & \text{когда } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ell(n)}{\varphi(n)}=0, \\ 1, & \text{когда } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ell(n)}{\varphi(n)}=\infty \end{cases}$$

Пусть $F(x)$ - вероятностная функция распределения такая, что если x $(0\le x<\infty)$ - точка непрерывности функции $F(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,\ell(n)}=F(x), \text{если } \lim_{n\to\infty}\frac{\ell(n)}{\varphi(n)}=x.$$

Тогда функция $\varphi(n)$ называется регулярной пороговой функцией, а $F(x)$ - пороговой функцией распределения свойства A.

Т е о р е м а. Помечая случайным образом ℓ вершин в случайном дереве с n отмеченными вершинами, имеем функцию $\varphi(n)=\sqrt{n}$, являющуюся регулярной пороговой функцией для разрыва цепи, соединяющей фиксированные вершины u и v, а также функцию

$$F(x)=\begin{cases} x e^{\frac{x^2}{2}}\displaystyle\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt & \text{при } x\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x<0, \end{cases}$$

являющуюся пороговой функцией распределения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $q_{n,\ell}=1-P_{n,\ell}$, тогда $q_{n,\ell}$ -вероятность не появления в цепи помеченных вершин между u и v. Пусть $d(u,v)$ - расстояние между вершинами u и v, тогда вероятность того, что $d(u,v)=k-1$ /см.[2] /

$$p(n,k)=\frac{k}{n-1}\frac{(n)_k}{n^k}, \text{ где } (n)_k=n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Выберем случайным образом дерево T_n и в нем наудачу пометим ℓ вершин. Если в T_n $d(u,v)=k-1$, то вероятность не пометить ни одну из вершин цепи, соединяющей u и v, будет равна $\binom{n-k}{\ell}/\binom{n}{\ell}$, если $\ell\le n-k$; и 0, если $\ell>n-k$. Следовательно, по формуле полной вероятности

$$q_{n,\ell}=\frac{1}{\binom{n}{\ell}}\sum_{k=2}^{n-\ell}\binom{n-k}{\ell}p(n,k)=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n-\ell}\frac{k(n-\ell)_k}{n^k}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n-\ell}k\prod_{j=\ell}^{k+\ell-1}\left(1-\frac{j}{n}\right), \quad /1/$$

$$\Pi_{k,\ell}=\prod_{j=\ell}^{k+\ell-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)=\exp\left\{\sum_{j=\ell}^{k+\ell-1}\ln\left(1-\frac{j}{n}\right)\right\}=\exp\left\{\sum_{j=\ell}^{k+\ell-1}\left(-\frac{j}{n}-\frac{j^2}{2n^2}-\dots\right)\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{n}\sum_{j=\ell}^{k+\ell-1}j-\frac{1}{2n^2}\sum_{j=\ell}^{k+\ell-1}j^2\dots\right\}$$

Отсюда

$$\Pi_{k,\ell}=e^{-\frac{k(k+2\ell)}{2n}}[1+o(1)] \quad \text{при } n\to\infty;\ k,\ell=o(n^{2/3}), \qquad /2/$$

и

$$\Pi_{k,\ell}\leq e^{-\frac{(k-1)^2}{2n}} \qquad \text{для любых } k\geq 1,\ \ell\geq 0. \qquad /3/$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ell(n)}{\sqrt{n}}=x$, тогда из /1/ и /2/ следует, что

$$q_{n,\ell}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n-\ell}k\,\Pi_{k,\ell}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{[n^{7/12}]}k e^{-\frac{k(k+2\ell)}{2n}}[1+o(1)]+$$

$$+\frac{1}{n-1}\sum_{k=[n^{7/12}]}^{n-\ell}k\,\Pi_{k,\ell}=[1+o(1)]\sum_{k=2}^{[n^{7/12}]}\frac{k}{\sqrt{n}}e^{-\frac{k^2}{n}-\frac{k}{\sqrt{n}}[x+o(1)]}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n-1}\sum_{k=[n^{7/12}]}^{n-\ell}k\,\Pi_{k,\ell}\,. \quad /4/$$

Сделав замену $t=\frac{k}{\sqrt{n}}$ от интегральной суммы, перейдем к интегралу и получим

$$q_{n,\ell}=\int_0^\infty te^{-\frac{t^2}{2}-t[x+o(1)]}dt+o(1)=1-xe^{\frac{x^2}{2}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt+o(1),$$

поскольку, как нетрудно показать, используя /3/, второе слагаемое в последнем равенстве /4/ есть $o(1)$. Осталось показать, что $F(x)$ является функцией распределения. Непрерывность очевидна. Из /1/ следует, что функция $q_{n,\ell}$ является убывающей по ℓ, поэтому предельная функция $F(x)$ неубывающая. Так как /см. [3] /

$$\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1\cdot 3}{x^4}-\dots\right) \quad \text{при } x\to\infty, \qquad /5/$$

то $F(x)=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1\cdot 3}{x^4}-\dots$ при $x\to\infty$, т.е. $F(\infty)=1$.

Теорема доказана.

По таблицам для отношения Милла /см. [4] / находим для уровней значимости $\varepsilon_1=0{,}05$ и $\varepsilon_2=0{,}01$ границы $x_1=4{,}16$ и $x_2=9{,}9$, это значит, что с вероятностью, не меньшей 0,95, происходит разрыв цепи между u и v , если число помеченных вершин $\ell \geqslant 4,16\sqrt{n}$, и с вероятностью 0,99, если $\ell \geqslant 9,9\sqrt{n}$.

Поступила в редакцию 17.7.1971г.

Литература

1. Erdos P., A.Renyi. On the evolution on random graphs, Magyar.Tud.Akad.Mat.,1960,5,1-2,17-61.

2. J.W.Moon,A.Meir. The distance between points in random trees, J.Comb.Theory,1970,8,1,99-103.

3. Ю.В.Прохоров, Ю.А.Розанов. СМБ, Теория вероятностей,М., 1967.

4. Л,Н.Большов, Н.В.Смирнов. Таблицы математической статистики, М., 1965.