Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 9.
УДК.519.95.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

В.Н.Лагунов

0. В предлагаемой работе приводится полное доказательство результатов, изложенных ранее в краткой заметке [9]. Основной результат работы заключается в следующем. Устанавливается наличие сходства между играми преследования $\tilde{\Gamma}$ при простом движении точечных объектов /преследующего и преследуемого/ и играми преследования Γ для некоторого класса допустимых движений объектов при радиусе захвата ℓ :

$$\ell \geqslant \ell_\delta > 0, \qquad /0.1/$$

где ℓ_δ -некоторая константа. Упомянутый класс $\{W_i, \varphi_i\}$ допустимых движений подробно описан в [10]. Константа ℓ_δ будет определена ниже. Заметим, что класс $\{W_i, \varphi_i\}$ содержит в себе движения объектов с трением, рассмотренные в контрольном примере [1] /причем в нелинейном случае, когда коэффициент трения зависит от скорости [7]/, а также движения с постоянной скоростью по траекториям ограниченной кривизны, рассмотренные в [4], [5], [6], [8].

Рассматривается плата двух видов: абсолютная и относительная. Абсолютная плата есть время от начала игры до момента поимки. Относительная плата есть отношение абсолютной платы к некоторой положительной величине. Соответственно двум видам платы рассматриваются два вида значения /цены/ игры: абсолютное и относительное.

На протяжении всей работы предполагается наличие полной информации, т.е. каждый игрок в каждый момент знает фазовые координаты свои и противника, но не знает поведения противника в будущем.

Упомянутое выше сходство проявляется как в одинаковых условиях существования преследующей стратегии, так и в почти одинаковом характере гарантированных стратегий. При этом указанное сходство возрастает вместе с увеличением константы ℓ_δ в /0.1/ и при соответствующем увеличении начального расстояния между объектами. Тем самым игра преследования $\tilde{\Gamma}$ объектов с простым движением оказывается в некотором смысле асимптотой для игр преследования Γ .

Следует отметить, что в данной работе стратегии преследующего и преследуемого объектов строятся конкретно; нам представляется, что указанные построения, возможно, имеют и самостоятельный интерес /[2], стр. 161-164/.

В данной работе используются обозначения, введенные в [9], [10].

1. Прежде чем переходить к количественной характеристике вышеупомянутого сходства, приведем в нужной нам форме известные факты для игр преследования $\tilde{\Gamma}$ при простом движении объктов.

Пусть положение i -го объекта /при $i=1$ преследующего при $i=2$ преследуемого/ задается в n -мерном евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 2$, радиус-вектором

$$r_i(t),\ t \geqslant 0,\ i=1,2,$$

/ t - время/ относительно некоторой декартовой системы координат.

Простым называется движение объекта, описываемое следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{r}_i = u_i\ ,\ |u_i| = \tilde{v}_i = const, \qquad /I.I/$$

где $u_i(t)$ -управление, являющееся измеримой вектор-функцией, а $|u_i|$ означает норму вектора u_i. Введем обозначения:

$$r = r_2 - r_1\ ;\ e = \frac{r}{|r|}\ ,\quad (r \neq 0)\ , \qquad /I.2/$$

и пусть $\tilde{f}_i^*$ -стратегия i -го объекта, определяемая соотношением

$$\tilde{f}_i^*\ :\ u_i = \tilde{v}_i e,\quad i=1,2\ . \qquad /I.3/$$

Легко видеть, что введенные стратегии ооеспечивают простое движение. Из /I.2/ получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}|r| = (\dot{r}, e) = (\dot{r}_2, e) - (\dot{r}_1, e), \qquad /I.4/$$

Теперь нетрудно убедиться в справедливости следующих теорем для игр $\tilde{\Gamma}$.

Т е о р е м а А. Для существования преследующей стратегии при любом $\ell \geqslant 0$ и любых начальных условиях необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\tilde{v}_1 > \tilde{v}_2\ . \qquad /I.5/$$

Т е о р е м а В. Если выполнено условие /I.5/, то при любом $\ell \geqslant 0$ и любых начальных условиях стратегии $\tilde{f}_i^*$, определяемые соотношением /I.3/, образуют седловую пару стратегий, а величина

$$\tilde{T} = \frac{|r(0)| - \ell}{\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2} \qquad /I.6/$$

есть абсолютное значение игры.

В самом деле, из вида $\tilde{f}_1^*$ в /I.3/ и соотношений /I.4/,/I.5/ вытекает, что $\tilde{f}_1^*$ есть преследующая стратегия. Из /I.4/ видно также, что отступление от стратегии $\tilde{f}_i^*$ не выгодно для i -го объекта, т.к. влечет за собой при любой фиксированной допустимой стратегии противника увеличение при $i=1$ /соответственно уменьшение при $i=2$ / производной $\frac{d}{dt}|r|$; при этом нет не зависящей от противника возможности компенсировать в будущем вышеуказанные невыгодные изменения производной.

Заметим, что множество /8/ работы [10] аналогично множеству $U(t, y, z)$, рассмотренному в [3] .

2. Для доказательства аналогов теорем $\widetilde{A}$ и $\widetilde{Б}$ в случае /2/ работы [IO] нам потребуются следующие леммы.

Л е м м а 2.I. Для достаточно малого $\delta > 0$ найдется такое допустимое управление u_i^* и такое конечное число $t_i(\delta)$, что будет выполнено равенство:

$$|\dot{r}_i(t_i(\delta))| = v_{i\delta} = v_{i0} - \delta. \qquad /2.2/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|\dot{r}_i(0)| = v_{i\delta}$ - все доказано. Пусть

$$|\dot{r}_i(0)| < v_{i\delta}.$$

Из результатов работы [IO] следует, что для вышеуказанного δ найдется $\omega > 0$ такое, что из

$$|\dot{r}_i(t)| \leqslant v_{i\delta} \qquad /2.3/$$

следует

$$\varphi_i(|\dot{r}_i(t)|) > \omega. \qquad /2.4/$$

Положим

$$|u_i^*| = \min\{\omega, |u_i^0|\}, \qquad /2.5/$$

где u_i^0 взято из соотношения /I2/ работы [IO], и пусть

$$u_i = |u_i^*| \frac{\dot{r}_i(0)}{|\dot{r}_i(0)|},$$

если $\dot{r}_i(0) \neq 0$, и u_i -произвольный вектор длины $|u_i^*|$, если $\dot{r}_i(0) = 0$. Тогда, очевидно, имеем

$$t_i(\delta) = \frac{v_{i\delta} - |\dot{r}_i(0)|}{|u_i^*|}.$$

Пусть

$$|\dot{r}_i(0)| > v_{i\delta}.$$

Поскольку δ достаточно мало, то, в силу вышеупомянутых результатов работы [IO], можно считать выполненным неравенство

$$\varphi_i(|\dot{r}_i|) < \frac{h_i}{2} \quad \text{при} \quad |\dot{r}_i| > v_{i\delta}.$$

Из последнего соотношения ясно, что теперь можно положить

$$u_i = u_i^* = -\frac{\dot{r}_i(0) \cdot h_i}{2|\dot{r}_i(0)|}, \quad t \geqslant 0, \qquad /2.6/$$

и тогда

$$t_i(\delta) = \frac{2(|\dot{r}_i(0) - v_{i\delta})}{h_i}$$

Л е м м а 2.7. Пусть

$$|\dot{r}_i(t_0)| = v_{i\delta}, \quad t \geqslant 0, \qquad /2.8/$$

где $\delta > 0$ достаточно мало. Тогда существует допустимое управление $\hat{u}_i$ i-го объекта, удовлетворяющее следующим требованиям:

$$(\hat{u}_i, \dot{r}_i) = 0, \quad t \geqslant t_0; \qquad /2.9/$$

$$|\hat{u}_i| \leq \theta_i(\delta) \quad , \theta_i(\delta) > 0. \qquad /2.10/$$

Для доказательства рассмотрим сечение тела W_i двумерной плоскостью Q, проходящей через L_i. Введем в Q прямоугольную декартову систему координат (φ, ψ) с началом в точке V_i и осью $V_i\varphi$, имеющей направление, противоположное направлению L_i. Пусть (M_i) - дуга, состоящая из граничных точек сечения $W_i \cap Q_i$, лежащая в первом квадранте: $\varphi \geq 0, \psi \geq 0$, взаимно однозначно проектирующая на ось $V_i\psi$ и ближайшая к этой оси. Пусть, далее,

$$(M_i): \psi = F_i(\varphi), \; 0 \leq \varphi \leq \varphi_i' \leq h_i, \; 0 \leq \psi \leq \psi_i' = \max_{\varphi} F_i(\varphi) = F_i(\varphi_i') \qquad /2.11/$$

- уравнение дуги (M_i). Дуга (M_i) обращена выпуклостью вверх и, следовательно, F_i -вогнутая функция. Заметим, что случай неоднозначной в точке $\varphi = 0$ функции F_i не исключается. В этом случае обратная к F_i функция

$$\varphi = F_i^{-1}(\psi)$$

на некотором отрезке $0 \leq \psi \leq \psi_i''$ будет равна нулю:

$$F_i^{-1}(\psi) = 0, \; \psi \in [0, \psi_i''], \; 0 < \psi_i'' \leq \psi_i'. \qquad /2.12/$$

Из определения тела W_i следует, что в /2.11/

$$\psi_i' = \max_{0 \leq \varphi \leq \varphi_i'} F_i(\varphi) > 0. \qquad /2.13/$$

Поскольку дуга (M_i) обращена выпуклостью вверх, то из /2.11/ следует соотношение

$$F_i(\varphi) > 0, \; \varphi \in [0, \varphi_i']. \qquad /2.14/$$

Но тогда, в силу /2.8/, /2.3/, /2.4/:

$$F_i(\varphi_i(V_{i\delta})) > 0, \qquad /2.15/$$

и $\theta_i(\delta)$ в /2.10/, как нетрудно заметить, существует вместе с искомым управлением $\hat{u}_i$, причем можно положить

$$\theta_i(\delta) = F_i(\varphi_i(V_{i\delta})) > 0. \qquad /2.16/$$

Легко видеть, что пока действует управление $\hat{u}_i$ длина вектора $\dot{r}_i$ не меняется /см. соотношение /II/ работы [10] / ибо, благодаря /2.9/, в этом случае ускорение $\ddot{r}_i = \hat{u}_i$ оказывается нормальным.

Л е м м а 2.17. Пусть выполнено условие /2.8/ при $t_0 = t_{0i}$ и соотношение /см. /I.2/, /2.16//:

$$\dot{r}_i(t_{i0}) = \mu r(t_{i0}), \; \mu > 0, \; |r(t_{0i})| \geq \ell_{i\delta} = \frac{V_{i\delta} \cdot V_{j0}}{F_i(\varphi_i(V_{i\delta}))}, \; i \neq j. \qquad /2.18/$$

Тогда существует допустимая стратегия f_i^0 i -го объекта, сохраняющая одинаковое направление векторов $\dot{r}_i, r$ и норму вектора $\dot{r}_i$ до тех пор, пока неравенство $|r| > \ell_{i\delta}$ не обратится в равенство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку стратегия f_i^0 должна сохранять норму скорости $\dot{r}_i$, управление, соответствующее f_i^0, должно иметь вид $\hat{u}_i$, рассмотренный в предыдущей лемме, и в силу соотношения /II/ работы [IO] и /2.9/ из $\dot r_i = \mu r, \ \mu > 0$ следует

$$f_i^0 : \ \hat u_i = \ddot r_i = (\dot\mu - (-1)^j \mu^2) r + (-1)^j \mu \dot r_j, \ \mu = \frac{v_{i\delta}}{|r|} > 0; \ i \neq j, \qquad /2.19/$$

$$n = \frac{\ddot r_i}{|\ddot r_i|}, \ |\hat u_i| = |\ddot r_i| = (\ddot r_i, n) = (-1)^j \mu (\dot r_j, n) \leq \mu v_{j0} = \frac{|\dot r_i|}{|r|} v_{j0} \qquad /2.20/$$

Подчиним $|r|$ условию /см. /2.IO/, /2.16//:

$$\frac{|\dot r_i|}{|r|} \cdot v_{j0} \leq \theta_i(\delta). \qquad /2.21/$$

Тогда из /2.20/, /2.IO/ следует, что упомянутая выше стратегия /2.I9/ существует и порождает управление вида $\hat u_i$, если выполнено соотношение /2.21/ или эквивалентное ему неравенство в /2.I8/. Легко видеть, что оценка /2.I8/ не может быть улучшена.

3. В этом пункте рассматривается случай /2/ работы [IO] .

Т е о р е м а А. Пусть радиус захвата ℓ удовлетворяет нераьенству

$$\ell \geqslant \ell_{1\delta}, \qquad /3.1/$$

где $\ell_{1\delta}$ взято из /2.I8/; тогда для существования преследующей стратегии f_1^* при любых начальных условиях необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$v_{10} > v_{20}. \qquad /3.2/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия /3.2/ тривиальным образом следует из того, что в случае его нарушения существует большая область начальных условий, для которых преследующей стратегии не существует. В эту область входят, например, начальные условия, удовлетворяющие соотношениям /см. /I.2//:

$$|r(0)| > \ell_{1\delta}, \ \ |\dot r_2(0)| = v_{20}, \ \dot r_2(0) = |\dot r_2(0)| e(0);$$

стратегия f_2: $u_2 \equiv 0$ в этом случае очевидно обеспечивает преследуемому объекту выполнение неравенства $|r(t)| > \ell_{1\delta}$ для всех $t \geqslant 0$.

Доказательство достаточности проведем построением преследующей стратегии. Положим сначала:

$$\delta \in \left(0, \tfrac{1}{2} \min\{v_{20}, (v_{10} - v_{20})\}\right), \qquad /3.3/$$

$$f_i^* : \begin{cases} u_i^*, \ t \in [0, t_i(\delta) + t_i'), \ t_i' \geqslant 0, & /3.4/ \\ \hat u_i, \ |\hat u_i| = \theta_i(\delta), \ t \in [t_i(\delta) + t_i', t_{0i}), & /3.5/ \\ f_i^0, \ t \in [t_{0i}, t_i''], & /3.6/ \end{cases}$$

где u_i^*, $t_i(\delta)$ взяты из леммы 2.I, $\hat u_i$ - управление, рассматривавшееся в лемме 2.7; это управление будет превращено в стратегию дополнительными требованиями, указываемыми ниже; стратегия f_i^0 рассмотрена в лемме 2.I7. Далее в этой теореме нам потребуется лишь случай $i = 1$. Возьмем t_1' столь большим, чтобы выполнялось неравенство:

$$|r(t_1(\delta)+t_1')| > \ell_{1\delta} + \frac{2\pi V_{1\delta}}{\theta_1(\delta)}(V_{10}+V_{20}) + \frac{2V_{1\delta}(V_{10}+V_{20})}{\theta_1(\delta)} \qquad /3.7/$$

/такое t_1' существует в силу /3.13//. Легко установить, что пока расстояние между объектами больше последнего слагаемого в /3.7/, угловая скорость $\frac{\theta_1(\delta)}{V_1\delta}$ вращения вектора $\dot r_1, |\dot r_1| = V_{1\delta}$ под воздействием управления $\hat u_1$ превосходит максимум $2(V_{10}+V_{20})/|r|$ удвоенной угловой скорости вращения вектора r. Подчиним управление $\hat u_1$ в /3.5/ таким дополнительным условиям:

а/ $\hat u_1$ компланарен векторам $\dot r_1, r$;

б/ $(\hat u_1, r) \geq 0$;

/если векторы $-\dot r_1$, r при $t' = t_1(\delta)+t_1'$ имеют одинаковое направление, то в качестве $\hat u_1(t')$ берется любой вектор длины $\theta_1(\delta)$, ортогональный $r(t')$ /. Легко видеть, что требования а/,б/ однозначно определяют допустимую стратегию $\hat f_1$: $\hat u_1(t)$ для $t > t'$ и задают преследующую стратегию $\hat{\hat f}_1$ для игры на единичной сфере, в которой роль преследователя/преследуемого/ играет сферическое изображение вектора $\dot r_1$ /соответственно r /. Стратегия $\hat{\hat f}_1$ аналогична стратегии $\tilde f_1$ /см. /1.3// и приводит к тому, что скорость сферического изображения $\dot r_1$ все время направлена по кратчайшей, соединяющей упомянутое сферическое изображение со сферическим изображением вектора r . Это влечет за собой уменьшение упомянутой кратчайшей дуги со скоростью $> \frac{(V_{10}+V_{20})}{|r|}$ и обращение ее в нуль в некоторый момент t_{01} /см. /3.5//. При этом за время действия стратегии/3.5/правая часть/3.7/уменьшается не более чем на величину среднего слагаемого и, следовательно, выполняется /2.18/. Начиная с момента t_{01}, действует стратегия, описанная в лемме 2.17, приводящая к тому, что расстояние между объектами будет сокращаться со скоростью, не меньшей $(V_{10}-V_{20})$, до момента t_1'', когда наступит равенство $|r(t_1'')| = \ell_{1\delta}$. Очевидно, момент t_1'' существует, причем $t_1'' \leq |r(t_{01})|/(V_{10}-V_{20})$.

Теорема доказана.

Пусть выполнены условия теоремы А и неравенство /3.2/. Пусть далее фиксированы некоторые начальные условия:

$$r_i(0) = r_i^0, \quad \dot r_i(0) = \dot r_i^0, \quad |r(0)| > \rho(\delta) > \ell \geq \ell_\delta = \max_i \ell_{i\delta}, \qquad /3.8/$$

где δ достаточно мало, а $\rho(\delta)$ достаточно велико. Тогда для любой фиксированной пары f_1, f_2 допустимых стратегий, где f_1 -преследующая стратегия, в любой момент t игры определена величина $\frac{d}{dt}|r(t)|$ в /1.4/. Интегрируя /1.4/ до первого момента $t = T(f_1, f_2)$ наступления равенства

$$|r(T(f_1, f_2))| = \ell \qquad /3.9/$$

/которое можно рассматривать как определение абсолютной платы/, получим

$$|r(T(f_1,f_2))| = \int_0^{\tau}\frac{d}{dt}|r|dt + |r(0)| = \int_0^{\tau}[(\dot r_2,e)-(\dot r_1,e)]dt+|r(0)|, \quad \tau = T(f_1,f_2). \qquad /3.10/$$

Введем относительную плату

$$P(f_1,f_2) = \frac{T(f_1,f_2)}{T_0}, \quad T_0 = \frac{|r(0)|-\ell}{V_{1\delta}-V_{2\delta}} = \frac{|r(0)|-e}{V_{10}-V_{20}} \qquad /3.11/$$

и покажем, что для нее стратегии f_i^*, определенные соотношениями /3.3/-/3.6/ при $t_i' = 0$ и соответствующем выборе δ и $\rho(\delta)$ в /3.8/, образуют для любого $\varepsilon > 0$ ε - седловую пару:

$$P(f_1^*,f_2) - \varepsilon < P(f_1^*,f_2^*) < P(f_1,f_2^*) + \varepsilon; \qquad /3.12/$$

/ввиду того, что $\rho(\delta)$ достаточно велико, требование /3.7/ становится излишним/. В дальнейшем будем пользоваться следующими сокращенными обозначениями /см. /3.9/, /2.18//:

$$T(f_1,f_2) = T_{12}, \quad T(f_1,f_2^*) = T_1, \quad T(f_1^*,f_2) = T_2, \quad T(f_1^*,f_2^*) = T,$$
$$t_0 = \max_i t_{0i}$$

Из /3.9/, /3.10/ имеем

$$|r(0)|-\ell = \int_0^{T_2}\left(-\frac{d}{dt}|r|\right)dt = \int_0^{t_0}\left(-\frac{d}{dt}|r|\right)dt + \int_{t_0}^{T_2}[V_{1\delta}-(\dot r_2,e)]dt \geqslant$$
$$\geqslant A + \int_{t_0}^{T_2}(V_{1\delta}-V_{20})dt\ ; \quad A = -\int_0^{t_0}\frac{d}{dt}|r|dt\ . \qquad /3.13/$$

Легко видеть, что найдется величина

$$T_2' \geqslant T_2\ , \qquad /3.14/$$

для которой неравенство в /3.13/ превратится в равенство:

$$|r(0)|-\ell = A + \int_{t_0}^{T_2'}(V_{1\delta}-V_{20})dt = A + B + C + \int_0^{T_2'}(V_{10}-V_{20})dt, \qquad /3.15/$$

$$B = -\int_{t_0}^{T_2'}\delta dt \quad , \ C = \int_0^{t_0}(V_{20}-V_{10})dt\ .$$

С другой стороны,

$$|r(0)|-\ell = A + \int_{t_0}^{T}(V_{1\delta}-V_{2\delta})dt = A + C + \int_0^{T}(V_{10}-V_{20})dt\ . \qquad /3.16/$$

Из /3.11/, /3.15/, /3.16/ получаем

$$1 = \frac{A+C}{(V_{10}-V_{20})T_0} - \frac{\delta(T_2'-t_0)}{(V_{10}-V_{20})T_0} + \frac{T_2'}{T_0} = \frac{A+C}{(V_{10}-V_{20})T_0} + \frac{T}{T_0} \qquad /3.17/$$

причем из тех же соотношений видно, что при $|r(0)|\to\infty$ величины $T,$

T_0, T_2' имеют одинаковый порядок. Но тогда при достаточно малом δ и достаточно большом $\rho(\delta)$ из /3.17/ следует:

$$\left|\frac{T_2'}{T_0}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{T}{T_0}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{T_2'}{T_0}-\frac{T}{T_0}\right|<\varepsilon. \qquad /3.18/$$

Принимая во внимание /3.II/, /3.14/, видим, что из последнего неравенства следует левое неравенство в /3.12/. Справедливость правого неравенства в /3.12/ доказывается аналогично.

Из /3.12/ следует, что число $P(f_1^*, f_2^*)$ можно рассматривать как относительное ε -значение игры /соотношение /3.12/ есть определение относительного ε -значения игры/.

Из вышесказанного вытекает справедливость

Теоремы Б. Пусть выполнены условия /3.2/ и /3.8/, а относительная плата имеет вид /3.II/; тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $\rho(\delta) > 0$, что стратегии f_i^*, определенные соотношениями /3.3/ - /3.6/, образуют ε -седловую пару стратегий, т.е. для произвольной пары f_1, f_2 допустимых стратегий, в которой f_1 - некоторая преследующая стратегия, выполняется соотношение /3.12/.

Отметим в заключение, что если в задаче $\tilde{\Gamma}$ /см. п.I/ ввести относительную плату вида

$$\tilde{P}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = \frac{\tilde{T}_{12}}{\tilde{T}},$$

где $\tilde{T}_{12}$ -абсолютная плата, аналогичная абсолютной плате T_{12} в игре Γ, то окажется, что относительное значение игры $\tilde{\Gamma}$ будет равно, в силу /I.6/, единице. Относительное ε -значение игры Γ, как видно из второго неравенства в /3.18/, отличается от единицы сколь угодно мало. Кроме того, сопоставление /I.6/, /3.II/ показывает, что величины, с помощью которых образуется относительная плата в играх $\tilde{\Gamma}$ и Γ, по сути дела, одинаковы. Сравнивая стратегии $\tilde{f}_i^*$, f_i^* /см. /I.3//, нетрудно заметить, что на главной части $t_0 \leq t \leq T$ отрезка времени $[0, T]$ их действия они почти совпадают, а именно: в обеих играх скорости объектов при $t \in [t_0, T]$ имеют направление вектора r /см. /I.2// и максимальную /в игре $\tilde{\Gamma}$/ или почти максимальную /в игре Γ/ норму.

4. В этом пункте рассматривается случай /3/ работы [IO], для которого тело W_i есть $(n-1)$ - мерный круг радиуса $\varphi_i'' = \varphi_i' = Q_i$ /см. /2.12/, /2.13/, /2.10//, ортогональный вектору скорости $\dot{r}_i$. Допустимое управление имеет в этом случае вид $\hat{u}_i$ /см. /2.9// и, следовательно, $|\dot{r}_i| = v_{i0}$.

Легко видеть, что соотношение /3.I/ теоремы А для указанного случая принимает вид:

$$\ell \geqslant \ell_{1\delta} = \frac{v_{10} \cdot v_{20}}{\varphi_1''} \qquad /4.1/$$

/см. /2.18//, а для преследующей стратегии f_1^* в /3.4/ следует положить $t_1(\delta)+t_1'=0$. Из доказательства теоремы А и рассуждений в конце пункта I нетрудно заметить, что пара стратегий f_i^*, рассматривавшаяся в теореме В, порождает в вышеуказанном случае при соответствующих начальных условиях пару управлений, оптимальных в смысле абсолютной платы, если, кроме /3.8/, выполнено соотношение

$$|r(0)|>\ell_\delta+2(\pi+1)(V_{10}+V_{20})\left(\frac{V_{10}}{\theta_1}+\frac{V_{20}}{\theta_2}\right). \qquad /4.2/$$

Кроме того из /4.I/ вытекает существование преследующей стратегии /постулируемое в [4] /. Следует отметить, что не для любого $\ell>0$ преследующее управление существует /см. [8] /.

Из вышеупомянутых рассуждений в пункте I очевидным образом вытекает справедливость

Т е о р е м ы В. Если преследователь обладает простым движением, а норма скорости преследуемого ограничена сверху числом $\tilde{V}_2$, то при любых начальных условиях и любом $\ell\geqslant 0$ выполнения неравества /I.5/ /где $\tilde{V}_1$ - норма скорости преследующего объекта/ достаточно для существования преследующей стратегии; при этом стратегия $\tilde{f}_1^*$ в /I.3/ гарантирует завершение преследоваиния.

Из последней теоремы непосредственно вытекает существование преследующей стратегии в теореме 2 работы [5] для случая $a>b$.

Поступила в редакцию 8.6.1971 г.

Л и т е р а т у р а

I. Л.С.Понтрягин. К теории дифференциальных игр, УМН, 1966, т. XXI, вып. 4.

2. Н.Н.Красовский. Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах, УМН, 1965, т. XX, вып. 3.

3. Н.Н.Красовский. Дифференциальная игра сближения, I. Дифференциальные уравнения, 1969, т. У, № 3.

4. Э.Н.Симакова. Об одной дифференциальной игре преследования. Автоматика, и телемеханика, 1967, № 2.

Э.Н.Симакова. Об одной задаче преследования на плоскости. Автоматика и телемеханика, 1968, № 7.

6. В.Н.Лагунов. Об условиях существования преследующего управления. Дискретный анализ, Новосибирск, 1967, II.

7. В.Н.Лагунов. Игра преследования при наличии трения. Управляемые системы, Новосибирск, 1968, вып. I.

8. В.Н.Лагунов. Оценка платы в одной дифференциальной игре. Управляемые системы, Новосибирск, 1969, вып. 2.

9. В.Н.Лагунов. Асимптотические свойства некоторых нелинейных

игр преследования. ДАН СССР, т. 197, № 2, 1971 г.

10. В.Н.Лагунов. Определение одного класса допустимых движений. Управляемые системы, Новосибирск, 1970, вып. 7.