Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.519.1.

ОДНА ЗАДАЧА АППРОКСИМАЦИИ ГРАФОВ

Г.Ш.Фридман

В этой заметке рассматривается задача о приближении произвольного обыкновенного графа [1] "простыми" графами.

Введем некоторые обозначения. Пусть N - произвольное конечное множество. Обозначим через $\mathfrak{A}(N)$ множество всех графов, совокупность вершин которых содержится в N, через $\mathfrak{A}_0(N)$ - множество тех графов из $\mathfrak{A}(N)$, каждая компонента связности которых есть полный граф, а через $\mathfrak{A}_0^i(N)$ - совокупность тех графов из $\mathfrak{A}_0(N)$, каждая компонента связности которых содержит не более i вершин. Пусть дан произвольный граф G; через $V(G)$ и $R(G)$ мы будем обозначать соответственно множества его вершин и ребер. Если графы G и G_1 таковы, что $V(G)=V(G_1)$, то расстоянием между графами G и G_1 мы будем считать, по определению, величину

$$\rho(G,G_1)=|R(G)\setminus R(G_1)|+|R(G_1)\setminus R(G)|^{*/}$$

ЗАДАЧА А. Для произвольного графа G найти граф $\Gamma\in\mathfrak{A}_0(V(G))$ такой, чтобы выполнялось соотношение

$$\rho(G,\Gamma)=\min_{\Gamma'\in\mathfrak{A}_0(V(G))}\rho(G,\Gamma').$$

Граф Γ при этом будем называть оптимально аппроксимирующим G. Мы покажем, что если граф G не содержит полных трехвершинных подграфов, то хотя бы один оптимально аппроксимирующий G граф содержится в $\mathfrak{A}_0^2(V(G))$.

Л е м м а 1. Число ребер n - вершинного графа, не содержащего полных трехвершинных подграфов, не превосходит $\left[\frac{n^2}{4}\right]$, причем оценка точная.

Эта лемма есть простое следствие теоремы Турана [2].

Л е м м а 2. Пусть n - вершинный граф G не содержит полных трехвершинных подграфов. Тогда

$$\min_{\Gamma\in\mathfrak{A}_0^2(V(G))}\rho(G,\Gamma)\le\rho(G,\Gamma^*(G)),$$

где $\Gamma^*(G)$ - полный граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как число ребер в $\Gamma^*(G)$ равно C_n^2, то в силу леммы 1 нам достаточно доказать, что

$$\min_{\Gamma'\in\mathfrak{A}_0^2(V(G))}\rho(G,\Gamma')\le C_n^2-\left[\frac{n^2}{4}\right]=\left]\frac{n^2-2n}{4}\right[.$$

*/ $|M|$ - мощность множества M.

Приступим к доказательству этого неравенства. Найдем граф Γ из $\mathfrak{A}_0^2(V(G))$, такой что $\rho(G,\Gamma)\leq\left]\frac{n^2-2n}{4}\right[$. Для этого поступим следующим образом. Зафиксируем в графе G произвольное ребро γ_0 и удалим из G все ребра, инцидентные γ_0. Получим граф D_1, который будет иметь вид $D_1=\gamma_0\cup G_1$, где G_1 – $(n-2)$ - вершинный граф. Пусть на i -м шаге получен граф $D_i=\gamma_0\cup\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_{i-1}\cup G_i$. Применив ту же процедуру к графу G_i, получим граф $D_{i+1}=\gamma_0\cup\gamma_1\cup\ldots\gamma_{i-1}\cup\gamma_i\cup G_{i+1}$ Продолжаем этот процесс до тех пор, пока на каком-то шаге не получим граф Γ, принадлежащий $\mathfrak{A}_0^2(V(G))$. При этом расстояние между графами G и Γ равно, очевидно, числу ребер, удаленных из G. Оценим это число. Для этого заметим, что если граф не имеет полных трехвершинных подграфов, то сумма степеней вершин, инцидентных одному его ребру, не превосходит $n-2$. Так как граф G_k содержит $n-2k$ вершин, то мы имеем

$$\rho(G,\Gamma)\leq\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}(n-2j)=\left]\frac{n^2-2n}{4}\right[.$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а. Если граф G не имеет полных трехвершинных подграфов, то существует граф $\Gamma\in\mathfrak{A}_0^2(V(G))$ такой, что

$$\min_{\Gamma'\in\mathfrak{A}_0^2(V(G))}\rho(G,\Gamma')=\rho(G,\Gamma)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть граф $\tilde{\Gamma}\in\mathfrak{A}_0(V(G))$ оптимально аппроксимирует G ; $\tilde{\Gamma}=\bigcup\Gamma_i$, где Γ_i - полные попарно не пересекающиеся графы. Рассмотрим граф $G\cap\tilde{\Gamma}=\bigcup_i(G\cap\Gamma_i)$. Для каждого i граф $G\cap\Gamma_i$ не содержит, очевидно, полных трехвершинных подграфов, и, следовательно, по лемме 2, найдется граф $B_i\in\mathfrak{A}_0^2(V(\Gamma_i))$ такой, что

$$\rho(B_i,\Gamma_i\cap G)\leq\rho(\Gamma_i,\Gamma_i\cap G) \qquad /*/$$

Для каждого графа Γ_i найдем таким образом граф B_i и рассмотрим граф $\Gamma=\bigcup_i B_i$. Этот граф, очевидно, принадлежит $\mathfrak{A}_0^2(V(G))$. Мы утверждаем, что

$$\rho(G,\Gamma)\leq\rho(G,\tilde{\Gamma}) \qquad /**/$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что

$$\rho(G,\Gamma)=\sum_i\rho(G\cap\Gamma_i,B_i)+|R(G)\setminus R(\tilde{\Gamma})|,$$

$$\rho(G,\tilde{\Gamma})=\sum_i\rho(G\cap\Gamma_i,\Gamma_i)+|R(G)\setminus R(\tilde{\Gamma})| .$$

Сравнивая правые части данных формул и учитывая /*/, получаем доказательство /**/. Следовательно, граф Γ оптимально аппроксимирует G. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность сотруднику Института экономики СО АН СССР Л.Б. Черному, сообщившему ему задачу A , и Г.П:Кареву за ценные замечания.

Поступила в редакцию I8.8.I970 г.

Л и т е р а т у р а

I. А.А.Зыков. Теория конечных графов, "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, I969.

2. О.Оре. Теория графов. "Наука" I968.