Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.519.95.

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ОБЬЕКТОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ.II.

М.С.Никольский /Москва/

Для того чтобы охватить по возможности широкий класс задач, мы будем вести рассмотрение в линейных нормированных пространствах.

Пусть Z - банахово пространство и Y, U, V - линейные нормированные пространства. Пусть состояние управляемой системы в любой момент $t \geqslant 0$ описывается вектором $z(t) \in Z$

$$z(t) = B(t)y + \int_0^t \big(-C(t-s)u(s) + D(t-s)v(s)\big)ds, \qquad /1/$$

где $B(t)$ - линейный равномерно ограниченный на каждом отрезке оператор, отображающий Y в Z, причем для любого $y \in Y$ функция $B(t)y$ сильно непрерывна по t при $t \geqslant 0$.

Оператор $C(t-s)$ отображает U в Z и обладает следующими постулируемыми свойствами:

1) для любых $t-s \geqslant 0$ он является линейным и ограниченным,

2) операторная функция $C(r)$ при $r \geqslant 0$ непрерывна в операторной норме.

Оператор $D(t-s)$ отображает V в Z и обладает следующими постулируемыми свойствами:

1' для любых $t-s \geqslant 0$ он является линейным и ограниченным,

2' операторная функция $D(r)$ при $r \geqslant 0$ непрерывна в операторной норме.

Функции $u(s)$, $v(s)$ предполагаются сильно измеримыми /см. [1]/ на полупрямой $[0,+\infty)$ и удовлетворяющими условиям: $u(s) \in P$, $v(s) \in Q$, где P - выпуклое, ограниченное, замкнутое множество из U, Q - - ограниченное множество из V. Так как множества P и Q ограничены, а операторы $C(t-s)$, $D(t-s)$ удовлетворяют условиям 2), 2'), то функции $C(t-s)u(s)$, $D(t-s)v(s)$ равномерно ограничены на $[0,t]$, сильно измеримы и суммируемы по Бохнеру /см. [1] / на $[0,t]$, где $t \geqslant 0$.

В формуле /1/ первый член $B(t)y$ отражает поведение управляемой системы при отсутствии управляющих воздействий, интегральный член отражает влияние на управляемую систему управляющих воздействий $u(t)$, $v(t)$. Очевидно, что $X(0) = B(0)y$. Вектор y будем называть начальным состоянием системы.

Целью управления системой является приход вектора $z(t)$ на заданное замкнутое, выпуклое множество $M \subset Z$ $(M \neq Z)$ за конечное время. Предполагается, что в распоряжении управляющего системой находится управление $u(t)$. Управление $v(t)$ представляет в формуле /1/ действие сил, которые, вообще говоря, мешают осуществить цель управления.

Интересным для приложений является случай, когда вектор $V(S)$ известен управляющему системой в каждый момент t лишь на отрезке $[t,t+\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$ - сколь угодно мало /см. [2], [3] / и может зависеть от t.

Сформулируем более четко математическую постановку задачи, которую мы будем рассматривать.

Движение вектора $z(t)$ начинается из состояния y, и это известно управляющему системой. Ему известны операторы $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$, $r\geqslant 0$, множества P, Q и управление $V(S)$ на отрезке $[t,t+\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$ - сколь угодно малая величина, которая может зависеть от t.

Целью управляющего системой является приведение вектора $z(t)$ на M при любом сильно измеримом допустимом управлении $V(t)\in Q$ за возможно короткое время. Для достижения своей цели управляющий системой использует сильно измеримое управление $u(t)(u(t)\in P)$.

Начальное состояние системы y мы будем называть терминальным, если для него существует такая константа $T\geqslant 0$, что при любом допустимом поведении вектора $V(t)$ управляющий системой может обеспечить приведение вектора $z(t)$ на M за время $\leq T$.

Цель этой статьи - дать достаточные условия, при выполнении которых начальное состояние системы y является терминальным. Сделаем важное для дальнейшего предположение о характере изменения вектора $z(t)$ /см. /1//.

/а/ Предположим, что на функциях $z(t)$ /см./1//, где $0\leq t\leq x$ / x - произвольное неотрицательное число/, определен оператор F_x, отображающий $Z(\cdot)$ в Y, такой что при $\tau\geqslant x$

$$z(\tau)=B(\tau-x)\left(F_x z(\cdot)+\int_0^{\tau-x}(C(\tau-x-S)u(S+x)-D(\tau-x-S)V(S+x))dS\right. \qquad /2/$$

Предполагается что вектор $F_x z(\cdot)$ стремится в норме Y к $F_{x_0} z(\cdot)$ при $x\to x_0$.

Пусть $\delta\geqslant 0$.

Обозначим через $\int_0^\delta C(r)P\,dr$, $\int_0^\delta D(r)Q\,dr$ множества, состоящие из векторов вида $\int_0^\delta C(r)u(r)dr$, $\int_0^\delta D(r)V(r)dr$, где $u(\cdot)$, $V(\cdot)$ - произвольные сильно измеримые функции, удовлетворяющие на $[0,\delta]$ условиям: $u(r)\in P$, $V(r)\in Q$. Из выпуклости множества P следует выпуклость множества $\int_0^\delta C(r)P\,dr$. При весьма широких предположениях множество $\int_0^\delta C(r)P\,dr$ оказывается замкнутым при любом $\delta\geqslant 0$. Достаточными условиями для замкнутости $\int_0^\delta C(r)P\,dr$ являются следующие /см. [4] /:

/1/ U - банахово пространство,

/2/ пространство $L_2(t,U)$ рефлексивно при любом $t\geqslant 0$.

Здесь через $L_2(t,U)$ обозначено множество сильно измеримых функций, определенных на $[0,t]$ со значениями в U и суммируемых по Лебегу с квадратом нормы. Условие /2/, например, выполняется, если банахово пространство U - сепарабельное и рефлексивное, или U -гильбертово пространство, или U - конечномерное пространство.

/b/ В дальнейшем предполагается замкнутость множества $\int_0^\delta C(r)P\,dr$ при любом $\delta \geqslant 0$.

Определение I. Пусть A и B - произвольные множества из Z. Геометрической разностью множеств A, B /см. [2], [3]/ называется множество C всех элементов c, обладающих свойством: $c+B\subset A$. Пишут $C=A \overset{*}{-} B$.

Отметим некоторые свойства множества C.

1°. Множество C может быть пустым.

2°. Если A выпукло, то C выпукло.

3°. Если A замкнуто, то и C замкнуто.

Теперь мы перейдем к построению альтернированного интеграла /см. [3], [5]/ для управляемого процесса /1/.

Пусть $t>0$. Рассмотрим произвольное разбиение ω отрезка $[0,t]$ точками τ_i : $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_k=t$. Определим множество $\sum_\omega(t,M)$ формулой:

$$\sum\nolimits_\omega(t,M)=\left(\left(\left(\left(M+\int_0^{\tau_1}C(r)P\,dr\right)\overset{*}{-}\int_0^{\tau_1}D(r)Q\,dr\right)+\int_{\tau_1}^{\tau_2}C(r)P\,dr\right)\overset{*}{-}\int_{\tau_1}^{\tau_2}D(r)Q\,dr\right)+\ldots, \tag{3}$$

где + означает алгебраическое сложение множеств. Порядок выполнения операций в /3/ определяется скобками. Результатом выполнения одной из операций $\overset{*}{-}$ в /3/ может оказаться пустое множество. В этом случае $\sum_\omega(t,M)$ считается пустым множеством.

Определим альтернированный интеграл $W(t,M)$ формулой:

$$W(t,M)=\bigcap_\omega \sum\nolimits_\omega(t,M), \tag{4}$$

где пересечение берется по всевозможным разбиениям ω отрезка $[0,t]$. По определению положим

$$W(0,M)=M. \tag{5}$$

Отметим, что $W(t,M)$ может быть пустым для некоторых $t>0$.

/c/ В дальнейшем предполагается, что при всех $t>0$ множество $W(t,M)$ непусто.

Из сделанных предположений и свойств 2°, 3° следует, что $W(t,M)$ при каждом $t\geqslant 0$ является непустым, выпуклым, замкнутым множеством в Z. Альтернированный интеграл $W(t,M)$ обладает следующим важным свойством.

Т е о р е м а I. Пусть $t_2 \geqslant t_1 \geqslant 0$. Тогда для $W(t_2, M)$ имеет место включение

$$W(t_2, M) \subset \left(W(t_1, M) + \int_{t_1}^{t_2} C(r)P\,dr\right) \overset{*}{-} \int_{t_1}^{t_2} D(r)Q\,dr. \qquad /6/$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобится несколько лемм.

Пусть состояние некоторой управляемой системы /вообще говоря, отличной от системы /I// в любой момент t, $t_2 \geqslant t \geqslant \ell \geqslant 0$ описывается вектором $\hat{z}(t) \in Z$:

$$\hat{z}(t) = z_\ell + \int_{\ell}^{t} \left(-\hat{C}(s)u(s) + \hat{D}(s)v(s)\right)ds, \qquad /7/$$

где z_ℓ - вектор из Z ,

$$\hat{C}(s) = C(t_2 - s), \; \hat{D}(s) = D(t_2 - s), \qquad /8/$$

$u(s), v(s)$ - сильно измеримые функции, удовлетворяющие условиям: $u(s) \in P$, $v(s) \in Q$ при $\ell \leqslant s \leqslant t$.

Вектор z_ℓ будем называть начальным состоянием управляемой системы /7/. В распоряжении управляющего системой /7/ находится вектор u , целью его является приведение вектора $\hat{z}(t)$ из начального состояния z_ℓ за конечное время на множество $M \subset Z$ при любом сильно измеримом поведении вектора $v(t)$. Управляющий системой /7/ может использовать для достижения своей цели сильно измеримое управление $u(t)$.

Процесс /7/ обладает важным свойством

$$\hat{z}(\tau) = \hat{z}(x) + \int_{x}^{\tau} \left(-\hat{C}(s)u(s) + \hat{D}(s)v(s)\right)ds, \qquad /9/$$

где $\ell \leqslant x \leqslant \tau \leqslant t_2$, $\hat{z}(x)$ - состояние вектора $\hat{z}(t)$ /см. /7// в момент x .

Л е м м а I. Пусть N - произвольное непустое множество из Z и $t_2 \geqslant \tau \geqslant 0$. Пусть множество

$$\mathfrak{M} = \left(N + \int_{\tau}^{t_2} \hat{C}(r)P\,dr\right) \overset{*}{-} \int_{\tau}^{t_2} \hat{D}(r)Q\,dr \qquad /10/$$

непусто и для элемента $\tilde{z} \in Z$ имеет место включение

$$\tilde{z} \in \mathfrak{M}. \qquad /11/$$

Тогда для каждого допустимого управления $\tilde{v}(\cdot)$, определенного на отрезке $[\tau, t_2]$, существует такое допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$ что

$$\hat{z}(t_2) \in N, \qquad /12/$$

где $\hat{z}(t_2)$ получается из формулы /7/ подстановкой $z_\ell = \tilde{z}$, $\ell = \tau$, $t = t_2$, $u(s) = \hat{u}(s)$, $v(s) = \hat{v}(s)$.

Доказательство легко следует из определения операции $\overset{*}{-}$ и формулы /7/.

Из леммы I вытекает, что, если исходным состоянием системы /7/ $(\ell = \tau)$ является вектор $\tilde{z}$, удовлетворяющий включению /II/, и управление $v(t)$ известно управляющему системой /7/ на отрезке $[\tau, t_2]$, то он в состоянии построить на этом отрезке такое допустимое управление $u(\cdot)$, что для $\hat{z}(t_2)$ будет выполнено включение /I2/.

Нетрудно доказать лемму.

Лемма 2. Пусть N - произвольное непустое множество из Z. Для того чтобы из начального состояния $\tilde{z} = z_\ell$ управляющий системой /7/ мог построить по любому допустимому управлению $v(\cdot)$, известному вперед на отрезке $[\ell, t_2]$, такое допустимое управление $u(\cdot)(\ell \le t \le t_2)$, что выполняется включение /I2/, необходимо и достаточно выполнения включения /II/.

Обобщением этой леммы является следующая

Лемма 3. Пусть ω' - произвольное разбиение отрезка $[\ell, t_2]$, где $t_2 > \ell$: $\ell = \tau_0 < \tau_1 < \ldots \tau_k = t_2$. Пусть в моменты τ_i $(i = 0, \ldots, k)$ управляющий системой /7/ знает допустимое управление $v(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ и $\hat{z}(\tau_i)$. Тогда, для того чтобы из начального состояния $\tilde{z} = z_\ell$ управляющий системой /7/ мог всегда построить такое допустимое управление $u(\cdot)$ на отрезке $[\ell, t_2]$, что выполняется включение

$$\hat{z}(t_2) \in M, \qquad /I3/$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{z} \in \sum\nolimits_{\omega'}(\ell, t_2, M), \qquad /I4/$$

где

$$\sum\nolimits_{\omega'}(\ell, t_2, M) = \Bigg(\Bigg(\Bigg(\Bigg(M + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \hat{C}(r)P\,dr\Bigg) \overset{*}{-} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \hat{D}(r)Q\,dr\Bigg) + \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} \hat{C}(r)P\,dr\Bigg) \overset{*}{-} \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} \hat{D}(r)Q\,dr\Bigg) + \ldots$$

Следствием этой леммы является следующая

Лемма 4. Для того чтобы утверждение леммы 3 имело место при любом разбиении ω' отрезка $[\ell, t_2]$ $(t_2 > \ell)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{z} \in \hat{W}(\ell, t_2, M), \qquad /I6/$$

где

$$\hat{W}(\ell, t_2, M) = \bigcap_{\omega'} \sum\nolimits_{\omega'}(\ell, t_2, M) \qquad /I7/$$

Из соотношений /8/, /15/ следует, что

$$\sum_{\omega'}(\ell,t_2,M)=((((M+\int\limits_0^{t_2-\tau_{k-1}}C(r)P\,dr)\overset{*}{-}\int\limits_0^{t_2-\tau_{k-1}}D(r)Q\,dr)+$$

$$+\int\limits_{t_2-\tau_{k-1}}^{t_2-\tau_{k-2}}C(r)P\,dr)\overset{*}{-}\int\limits_{t_2-\tau_{k-1}}^{t_2-\tau_{k-2}}D(r)Q\,dr)+\ldots$$

Отсюда и из соотношений /4/, /17/ следует, что

$$\hat{W}(\ell,t_2,M)=W(t_2-\ell,M). \qquad /18/$$

Положим по определению $\hat{W}(t_2,t_2,M)=M$.

Л е м м а 5. Для $\hat{W}(0,t_2,M)$ имеет место включение

$$\hat{W}(0,t_2,M)\subset(\hat{W}(t_2-t_1,t_2,M)+$$

$$+\int\limits_0^{t_2-t_1}\hat{C}(r)P\,dr)\overset{*}{-}\int\limits_0^{t_2-t_1}\hat{D}(r)Q\,dr,$$

где $t_2\geqslant t_1\geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $t_2=0$, или $t_2=t_1$, или $t_1=0$, то утверждение леммы очевидно. Изучим оставшийся случай $t_2>t_1>0$. Допустим, что включение /19/ не имеет места. Тогда существует такой вектор $\tilde{z}\in\hat{W}(0,t_2,M)$, что $\tilde{z}$ не принадлежит правой части соотношения /19/. Так как

$$\tilde{z}\bar{\in}(\hat{W}(t_2-t_1,t_2,M)+\int\limits_0^{t_2-t_1}\hat{C}(r)P\,dr)\overset{*}{-}\int\limits_0^{t_2-t_1}\hat{D}(r)Q\,dr,$$

то согласно лемме 2 существует такое допустимое управление $\tilde{V}(\cdot)$, определенное на отрезке $[t_2-t_1,t_2]$, что при любом допустимом управлении $u(\cdot)$ вектор $\hat{z}(t_2-t_1)$, получающийся из формулы /7/ при $t=t_2-t_1, z_\ell=\tilde{z}, V(s)=\tilde{V}(s), \ell=0$ не принадлежит $\hat{W}(t_2-t_1,t_2,M)$.

Применяя леммы 3,4, приходим к противоречию с нашим предположением.

Из леммы 5 легко следует утверждение теоремы I.

Л е м м а 6. Пусть

$$B(t_1)\tilde{y}\in W(t_1,M) \qquad /20/$$

при некотором $t_1\geqslant 0$. Пусть γ - точная нижняя грань чисел t_1, при которых имеет место включение /20/. Тогда

$$B(\gamma)\tilde{y}\in W(\gamma,M). \qquad /21/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если чисел t_1 конечное число, то соотношение /21/ очевидно. Если чисел t_1 бесконечное множество, то из них можно выделить подпоследовательность t_1^i $(i=1,2,\ldots)$, сходящуюся к γ .

Из теоремы I следует, что

$$W(t_1^i,M)\subset\left(W(\gamma,M)+\int_\gamma^{t_1^i}C(r)P\,dr\right)\overset{*}{-}\int_\gamma^{t_1^i}D(r)Q\,dr.$$

Из непрерывности операторных функций $C(r), D(r)$ и ограниченности множеств P, Q следует, что

$$\int_\gamma^{t_1^i}C(r)P\,dr\in S(t_1^i),$$

$$\int_\gamma^{t_1^i}D(r)Q\,dr\in S(t_1^i), \tag{22}$$

где $S(t_1^i)$ - шар из Z с центром в нулевой точке с радиусом, стремящимся к нулю при $t_1^i\to\gamma$. Положим

$$R(t_1^i)=\left(W(\gamma,M)+\int_\gamma^{t_1^i}C(r)P\,dr\right)\overset{*}{-}\int_\gamma^{t_1^i}D(r)Q\,dr.$$

Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такой номер $i(\varepsilon)$ что при $i>i(\varepsilon)$ выполняется включение

$$R(t_1^i)\subset W(\gamma,M)+S_\varepsilon, \tag{24}$$

где S_ε - шар из Z с центром в нулевой точке радиуса ε .

Из определения операции $\overset{*}{-}$ и из /23/ следует

$$R(t_1^i)+\int_\gamma^{t_1^i}D(r)Q\,dr\subset W(\gamma,M)+\int_\gamma^{t_1^i}C(r)P\,dr.$$

Отсюда и из соотношений /22/ следует включение /24/. Из непрерывности $B(t)\tilde{y}$, включения /24/ и замкнутости множества $W(\gamma,M)$ следует включение /21/. Лемма доказана.

Альтернированный интеграл $W(t,M)$ можно использовать для нахождения начальных состояний y , которые являются терминальными.

Рассмотрим данное начальное состояние y_0 и $W(t,M)$ при $t\geqslant 0$. Возможны два случая.

<u>I случай.</u> При всех $t\geqslant 0$ $B(t)y_0\bar{\in}W(t,M)$

<u>2 случай.</u> Существует хотя бы одно $t_1\geqslant 0$ такое, что

$$B(t_1)y_0\in W(t_1,M)$$

В первом случае мы ничего не можем сказать о том, является y_0 терминальным или нет. Во втором случае согласно лемме 6 существует наименьшее t_1 , при котором выполняется включение $B(t_1)y_0\in W(t_1,M)$. Обозначим его через $T(y_0)$.

Т е о р е м а 2. Во втором случае начальное состояние y_0 является терминальным. Из начального состояния y_0 управляющий системой /I/ может гарантировать приход вектора $z(t)$ на M при любом допустимом поведении $v(t)$ при дополнительном предположении, что в каждый момент $t \geqslant 0$ ему известен вектор $y(t) = F_t z(\cdot)$, где $z(\cdot)$ — функция $z(\tau)$ /см. /I// при $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $T(y_0) = 0$, то $z(0) \in M$ и цель управления уже достигнута. Рассмотрим случай $T(y_0) > 0$. В начальный момент $t = 0$ управляющий системой /I/ знает управление $v(t)$ на $\varepsilon_1 > 0$ вперед. Не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon_1 \leqslant T(y_0)$. Используя свою информацию, управляющий системой согласно теореме I и лемме I может на отрезке $[0, \varepsilon_1]$ построить такое допустимое управление $u(t)$, что для $y(t_1)$, где $t_1 = \varepsilon_1$, будет выполнено соотношение

$$B(T_0 - \varepsilon_1) y(t_1) \in W(T_0 - \varepsilon_1, M),$$

здесь $T_0 = T(y_0)$

Положим $y(t_1) = y_1$. Может случиться, что $T_0 - t_1 > T(y_1)$. Если $T(y_1) = 0$, то цель управления достигнута, если $T(y_1) > 0$, то, зная управление $v(t)$ на $\varepsilon_2 > 0$ вперед /ε_2 можно считать $\leqslant T(y_1)$/, управляющий системой может обеспечить выполнение включения $B(T_1 - \varepsilon_2) y(t_2) \in W(T_1 - \varepsilon_2, M)$, где $T_1 = T(y_1)$. Положим $y(t_2) = y_2$. Если $T(y_2) = 0$, то цель управления достигнута, если $T(y_2) > 0$, то управляющий может продолжить управление вышеприведенным способом. Положим $t_i = \sum_{k=1} \varepsilon_k$, где ε_k — длина отрезка, на котором управляющий системой строит управление. Очевидно, что

$$T(y(t_i)) \leqslant T_0 - t_i \qquad /25/$$

Может быть два случая.

Случай а. При некотором конечном i $T(y(t_i)) = 0$. Это будет означать, что цель управления достигнута за время $\leqslant T_0$;

Случай b. При всех конечных i $T(y(t_i)) = 0$. Из неравенства /25/ следует, что $t_i < T_0$. Числа t_i образуют возрастающую последовательность. Поэтому $t_i \to \tilde{t} \leqslant T_0$. Из предположения /а/ следует, что $y(t_i) = F_{t_i} z(\cdot)$ стремится в смысле нормы Y к вектору $y(\tilde{t}) = F_{\tilde{t}} z(\cdot)$. Далее, $B(T(y(t_i))) y(t_i) \in W(T(y(t_i)), M)$. Числа $T(y(t_i))$ составляют строго убывающую последовательность положительных чисел. Поэтому $T(y(t_i)) \to T^*$. Теперь, проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 6, можно показать, что $B(T^*) y(\tilde{t}) \in W(T^*, M)$. Очевидно, что $T(y(\tilde{t})) \leqslant T^* \leqslant T_0 - \tilde{t}$. Если $T(y(\tilde{t})) = 0$, то цель преследования достигнута; если $T(y(\tilde{t})) > 0$, то можно продолжить построение траектории $z(t)$ при $t \geqslant \tilde{t}$ вышеописанным образом. Из сказанного следует, что построение траектории $z(t)$ может быть продолжено до тех пор, пока $T(y(t))$ не обратится в 0, причем это произойдет не позже $T_0 = T(y_0)$.

Примером применения развитой теории являются линейные дифференциальные игры преследования /см. [2], [3] /. Другим примером являются линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний: пусть движение n -мерного вектора R^n из евклидова пространства R^n описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{z}(t)=\sum_{i=1}^{m} H_i z(t-\omega_i)-u(t)+v(t), \qquad /26/$$

где H_i - постоянные матрицы размерности $n\times n$ $,0=\omega_0<\omega_1<\ldots<\omega_m$ - постоянные запаздывания, $u(t)$ - n - мерная измеримая функция, удовлетворяющая включению: $u(t)\in P$ - выпуклому компакту из R^n, $v(t)$ - n - -мерная измеримая функция, удовлетворяющая включению: $v(t)\in Q$ - ограниченному множеству из R^n. Догоняющий распоряжается выбором вектора $u(t)$. Считается, что ему известны непрерывная векторная функция $z(s)$ при $t-\omega_m\le s\le t$ и вектор $v(s)$ при $t\le s\le t+\varepsilon(t)$ при каждом $t\geqslant 0$, где $\varepsilon(t)>0$.

Целью догоняющего является приведение вектора $z(t)$ на заданное замкнутое, выпуклое множество $M\subset R^n$ при любом допустимом изменении вектора $v(t)$, который находится в распоряжении убегающего. Возможность применения развитой теории базируется на следующем представлении для решения $z(t)$ уравнения /26/ /см. [6] / при $t\geqslant 0$:

$$z(t)=K(t)h(0)+\sum_{i=0}^{m}\int_{-\omega_i}^{0}K(t-\omega_i-s)H_i h(s)ds+$$
$$+\int_0^t K(t-s)(-u(s)+v(s))ds,$$

где $K(t)$ - матричная функция, обладающая следующими свойствами: а/ $K(t)=0$ при $t<0$, b/ $K(0)=E$, где E - единичная матрица, c/ функция $K(t)$ непрерывна на $[0,+\infty)$, d/ $K(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $K'(t)=\sum_{i=0}^{m}H_i K(t-\omega_i)$ при $t>0, t\bar{\in} S_+$. Множество S_+ строится так. Обозначим через S множество точек вида: $t=\sum_{i=0}^{m} j_i\,\omega_i$, j_i - целые числа. По определению множество S_+ равно пересечению множества S с $(0,+\infty)$. В формуле /27/ фукция $h(s)(-\omega_m\le s\le 0)$ предполагается непрерывной. В качестве пространств Z, U, V возьмем евклидово пространство R^n. В качестве Y возьмем банахово пространство $C(-\omega_m,0)$ непрерывных n -мерных функций, определенных на $[-\omega_m,0]$. Функция $h(t)(-\omega_m\le t\le 0)$ является начальным состоянием для системы $z(t)$ /см. /27/ /. Положим

$$B(t)y=K(t)h(0)+\sum_{i=0}^{m}\int_{-\omega_i}^{0}K(t-\omega_i-s)H_i h(s)ds, \qquad /28/$$

$$C(t-s)=K(t-\omega_m-s),\ D(t-s)=K(t-\omega_m-s), \qquad /29/$$
$$F_x z(\cdot)=z(x+s),$$

где $-\omega_m \le s \le 0,\ x \ge 0$.Очевидно,что $F_x z(\cdot)$ - элемент пространства Y . $z(t)$/см. /26//является непрерывной функцией t при $t \ge -\omega_n$.Из непрерывности функции на конечном отрезке вытекает ее равномерная непрерывность на этом отрезке.Используя этот факт,нетрудно показать,что $F_x z(\cdot) \to F_{x_0} z(\cdot)$ в норме Y при $x \to x_0$.Таким образом,предположение /а/ выполнено.

Выполнимость предположения /b/ является простым следствием теоремы о замкнутости /см. [7] /.

Будем считать, что альтернированный интеграл $W(t,M)$, построенный для процесса /27/, непуст при всех $t \ge 0$. Отметим, что $W(t,M)$ является замкнутым, выпуклым множеством в R^n .

Теперь можно применить альтернированный интеграл $W(t,M)$ для нахождения начальных состояний, из которых догоняющий в дифференциальной игре /26/ может завершить игру за конечное время при любом измеримом поведении управления $V(t)$ убегающего.

Поступила в редакцию 7.12.1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. Э.Хилл. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1951 .

2. Л.С.Понтрягин. О линейных дифференцильных играх I. -ДАН СССР, т.174, № 6, 1967.

3. Л.С.Понтрягин. О линейных дифференциальных играх П.-ДАН СССР, т.175, № 4, 1967.

4. **P.L.FALB. Infinite Dimensional Control Problems I: on the Closure of Set of Attainable States for Systems.-Journ.Math.Anal. and Applications,vol.9,N1,1969.**

5. М.С.Никольский. Нестационарные линейные дифференциальные игры.-"Вестник МГУ", серия матем., мех., № 3, 1969.

6. Р.Беллман, К.Кук.Дифференциально-разностные уравнения. М., "Мир", 1967.

7. А.Ф.Филиппов. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.-"Вестник МГУ", серия матем., мех., физ., астрон., хим.. № 2, 1969.