Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.519.95.

ОБ УСЛОВИЯХ СТАБИЛЬНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ. II

Ю.С.Осипов /Свердловск/

Указываются необходимые и достаточные /а также достаточные/ условия сильной стабильности множеств программного поглощения в линейных дифференциально-разностных играх. Полученные признаки стабильности охватывают, в частности, и случай управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [1 - 5] .Статья продолжает исследование [7].

1. Рассмотрим управляемую систему с последействием, описываемую уравнением

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_{\tau}(t)x(t-\tau)+B(t)u-C(t)v+w(t). \qquad /1.1/$$

Входящие в уравнение /1.1/ величины, как и другие встречающиеся ниже понятия и обозначения, не сопровождаемые пояснениями, определены в [7] .

Пусть задан промежуток времени $[t_0,\theta]$. Рассмотрим для системы /1.1/ множества программного поглощения $W_t(\theta)$, $t_0\le t\le\theta$. В первой части настоящей работы [7] получены достаточные признаки стабильности множеств $W_t(\theta)$ с помощью теоремы о неподвижной точке многозначных отображений. Укажем теперь другой путь получения /необходимых и достаточных/ условий u - стабильности множеств $W_t(\theta)$, $t_0\le t\le\theta$, основанный непосредственно на определении свойства стабильности. Приводимые ниже рассуждения связаны с вычислением опорного функционала множества $W_t(\theta)$. С этой точки зрения данный вывод представляет и самостоятельный интерес, так как опорным функционалом $W_t(\theta)$ удобно пользоваться при вычислении вектора $q(t,x(s))$, фигурирующего в определении экстремальной стратегии U^e [6] . Кроме того, знание опорных функционалов множеств программного поглощения позволяет установить связь изложенной в [6] экстремальной конструкции с известным правилом экстремального прицеливания [1] .

Рассмотрим вспомогательную задачу об управлении.

ЗАДАЧА 1.1. Заданы управляемая система /1.1/, отрезок времени $[t_*,t^*]$, $(t^*\ge t_*)$. Указаны ограничения /1.2/ [7] на управляющие воздействия. В пространстве H заданы два выпуклых замкнутых множества Y_1 и Y_2 . При выбранных любых $y_1(s)\in Y_1$ и программном управлении $v(t)$ требуется построить программное управление $u(t)$, переводящее систему /1.1/ за время t^*-t_* из состояния /см. [6 - 8]/ $y_1(s)$ в какое-либо состояние $y_2(s)\in Y_2$.

Т е о р е м а 1.1 Задача 1.1 разрешима тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$\inf_{h\in S(h)}\Big\{ r_1(t^*,t_*,h)-r_2(t^*,t_*,h)+ + \Big\langle \int_{t_*}^{t^*+s} F(t^*+s,\xi)\overline{w}(\xi)d\xi ,h\Big\rangle + + \inf_{y\in Y_1}\langle z(s,y),h\rangle - \inf_{y\in Y_2}\langle y,h\rangle\Big\}\geqslant 0 .$$

Здесь $S(h)$ означает множество тех $h\in H$, норма которых $\|h\|_\tau\leqslant 1$ и на которых определена разность $\alpha(h)=\inf_{Y_1}\langle z(S,y),h\rangle-\inf_{Y_2}\langle y,h\rangle$; /значения $\alpha(h)=\pm\infty$ допускаются/; величина $z(S,y)$ равна : при $\delta=t^*-t_*\geqslant\tau$

$$z(s,y)=f(s,y)=T(t^*+s,t_*,0)y(0)+\int_{-\tau}^{0}T(t^*+s,t_*,\eta)y(\eta)d\eta$$

при $\delta=t^*-t_*<\tau$

$$z(s,y)=f(s,y)$$

если $s\in[-\delta,0]$;

и

$$z(s,y)=y(s+\delta)$$

если $s\in[-\tau,-\delta]$.

Величины

$$r_1(t^*,t_*,h)=\max_{u\in\{u(\cdot)\}}\Big\langle h,\int_{t_*}^{t^*+s}F(t^*+s,\xi)B(\xi)\overline{u}(\xi)d\xi\Big\rangle$$

$$r_2(t^*,t_*,h)=\max_{v\in\{v(\cdot)\}}\Big\langle h,\int_{t_*}^{t^*+s}F(t^*+s,\xi)C(\xi)\overline{v}(\xi)d\xi\Big\rangle ,$$

где $\{u(\cdot)\}$, $(\{v(\cdot)\})$ - множество всех суммируемых на $[t_*,t^*]$ функций, удовлетворяющих при почти всех $t\in[t_*,t^*]$ ограничениям /I.2/ [7] ; $\overline{u}(\xi)=u(\xi)$ при $\xi\in[t_*,t^*]$ и $\overline{u}(\xi)=0$ при $\xi<t_*$. Аналогично определяются функции $\overline{v}(\xi)$ и $\overline{w}(\xi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть неравенство /I.2/ имеет место. Предположив, что задача /I.I/ решения не имеет, заключаем, что существуют $y_1\in Y_1$ и $v_1\in\{v(\cdot)\}$ такие, что при любом $u\in\{u(\cdot)\}$

$$x_{t^*}(S)\notin Y_2 . \qquad /I.4/$$

Здесь $x_{t^*}(S)$ - элемент траектории $x(t)$ системы /I.I/, удовлетворяющей условию $x(t_*+S)=y_1(S)$ и отвечающей программным управлениям $u(t)$, $v_1(t)$. Используя формулу Коши, элемент $x_{t^*}(S)$ можем представить в виде:

при $\delta=t^*-t_*<\tau$

$$x_{t_*}(s)=\begin{cases}\varphi(s)=z(s,y_1)+\int\limits_{t_*}^{t^*+s}F(t^*+s,\xi)[B(\xi)u(\xi)-C(\xi)v_1(\xi)+w(\xi)]d\xi, \\ \qquad -\delta\le s\le 0 \\ y_1(s+\delta), \quad -\tau\le s\le -\delta;\end{cases}$$

при $\delta=t^*-t_*\geq\tau$

$$x_{t^*}(s)=\varphi(s).$$

Нетрудно видеть, что совокупность элементов $x_{t^*}(s)$ /I.5/,отвечающих всевозможным $u\in\{u(\cdot)\}$, образует в H выпуклое и слабо бикомпактное множество. Учитывая, что Y_2 - выпуклое и слабо замкнутое в H множество, пространство H - гильбертово, заключаем [9], что существует не нулевой элемент $h^*\in H$ $(\|h^*\|_\tau\le 1)$, такой, что

$$\sup_{u\in\{u(\cdot)\}}\langle h^*,x_{t^*}(s)\rangle-\inf_{y\in Y_2}\langle h^*,y\rangle<0$$

/Заметим, что величина $\alpha(h)$ определена при $h=h^*$ /. Совокупность соотношений /I.6/, /I.5/ противоречит, очевидно, неравенству /I.2/. Аналогичным образом доказывается необходимость условия /I.2/. В самом деле, пусть задача /I.I/ разрешима,но неравенство /I.2/ не имеет места. Последнее означает, что существуют нулевой элемент $h_*\in H$ $(h_*\in S(h))$ и $y_1(s)\in Y_1$, такие, что каково бы ни было программное управление $u(t)$, выполняется неравенство:

$$\langle z(s,y_1)+\int\limits_{t^*}^{t^*+s}F(t^*+s,\xi)[B(\xi)\bar u(\xi)-C(\xi)\bar v_*(\xi)+$$

$$+\bar w(\xi)]d\xi,h_*\rangle-\inf_{y\in Y_2}\langle y,h_*\rangle<0$$

Здесь $\bar v_*(\xi)=0$ при $\xi<t_*$; $\bar v_*(\xi)=v_*(\xi)$ при $\xi\in[t_*,t^*]$, где $v_*(\xi)$ - функция, на которой в /I.3/ при $h=h_*$ достигается максимум. Условие /I.7/ означает, что из начального состояния $x(t_*+s)=y_1(s)$ систему /I.I/ за время t^*-t_* нельзя перевести в какое -либо состояние, принадлежащее множеству Y_2, если только управление $v(t)$ выбрано из условия: $v(t)=v_*(t)$, $(t_*\le t\le t^*)$. Это, однако,противоречит предположению о том, что задача I.I разрешима. Теорема доказана.

Опираясь на теорему I.I. , получаем

С л е д с т в и е I.I. Система множеств программного поглощения $W_t(\theta)$, $t_0\le t\le\theta$, сильно u - стабильна тогда и только тогда, когда условие /I.2/, где $Y_1=W_{t_*}(\theta)$, $Y_2=W_{t^*}(\theta)$, выполняется при любых $t_*\in[t_0,\theta)$, $t^*\in(t_*,\theta]$.

Данное утверждение может быть сформулировано в более эффективной форме, если учесть строение множеств $W_t(\theta)$. В самом деле, каждое множество $W_t(\theta)$ состоит [6] из тех и только тех $x(s)$, которые удовлетворяют неравенству /см. [6] /

$$\varphi(t, x(s)) = \min_{\|\ell\| \le 1} [\rho(\theta, t, \ell) + \langle \ell T(\theta, t, s), x(s) \rangle] \geq 0 .$$

Обозначим символом G_t подпространство в H, натянутое на всевозможные элементы $g(s)$ вида $g(s) = \ell T(\theta, t, s)$.

Справедлива

Т е о р е м а I.2 Система множеств программного поглощения $W_t(\theta), t_0 \le t \le \theta$, сильно $\mathcal{U}$ - стабильна тогда и только тогда, когда для любых $t_* \in [t_0, \theta)$, $t^* \in (t_*, \theta]$ выполняется неравенство:

$$\inf_{\substack{\|g\|_t \le 1 \\ g \in G_{t^*}}} \Big\{ r_1(t^*, t_*, g) - r_2(t^*, t_*, g) + \Big\langle \int_{t_*}^{t^*+s} F(t^*+s, \xi) \bar{w}(\xi) d\xi,$$

$$g \Big\rangle + \inf_{y \in W_{t_*}} \langle z(s, y), g \rangle - \inf_{y \in W_{t^*}} \langle y, g \rangle \Big\} \geq 0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия /I.9/ следует непосредственно из следствия I.I. Покажем, что условие /I.9/ является достаточным для сильной $\mathcal{U}$ - стабильности множеств $W_t(\theta)$ Предполагая противное, заключаем, что условие /I.9/ выполняется, но существуют моменты $t_* \in [t_0, \theta)$, $t^* \in (t_*, \theta]$, элемент $y_1(s) \in W_{t_*}(\theta)$, программное управление $v_1(t)$, $t_* \le t \le t^*$, такие, что элемент $x_{t^*}(s)$ /I.5/ ни при каком $u \in \{u(\cdot)\}$ не принадлежит множеству $W_{t^*}(\theta)$. В силу /I.8/ последнее означает, что существует элемент $g_* \in G_{t^*}$, такой, что при всех $u \in \{u(\cdot)\}$

$$\langle g_*, x_{t^*}(s) \rangle - \inf_{y \in W_{t^*}} \langle g_*, y \rangle < 0$$

С другой стороны, из условия /I.9/ при любом $u \in \{u(\cdot)\}$ имеем неравенство:

$$\langle g_*, x_{t^*}(s) \rangle - \inf_{y \in W_{t^*}} \langle g_*, y \rangle \geq 0 .$$

Соотношения /I.10/, /I.11/ противоречивы. Теорема доказана.

Из теоремы I.2. непосредственно вытекает

С л е д с т в и е I.2. Система множеств программного поглощения $W_t(\theta), t_0 \le t \le \theta$, сильно $\mathcal{U}$ - стабильна тогда и только тогда, когда при любых $t_* \in [t_0, \theta)$, $t^* \in (t_*, \theta]$ выполняется неравенство:

$$\inf_{u \in U_1} \Big\{ r_1(t^*, t_*, \ell T(\theta, t^*, s)) - r_2(t^*, t_*, \ell T(\theta, t^*, s)) +$$

$$+ \Big\langle \int_{t_*}^{t^*+s} F(t^*+s, \xi) w(\xi) d\xi, \ell T(\theta, t^*, s) \Big\rangle + \inf_{y \in W_{t^*}} \langle z(s, y), \ell T(\theta, t^*, s) \rangle -$$

$$- \inf_{y \in W_{t^*}} \langle y, \ell T(\theta, t^*, s) \rangle \Big\} \geqslant 0 .$$

Примечание I.I. Из определения стабильности множеств $W_t(\theta)$ [8] вытекает, что момент t^*, фигурирующий в теореме I.2 и следствиях I.I, I.2, можно считать достаточно близким к моменту t_*.

2. Проверка условий теоремы I.2. и следствий I.I, I.2 весьма затруднительна. Однако можно указать случаи, когда такую проверку удается осуществить. Таким путем мы приходим к достаточным условиям сильной $\mathcal{U}$ - стабильности множеств программного поглощения. Прежде чем сформулировать эти условия, докажем вспомогательное утверждение. Обозначим символом $\rho_{t^*}(h)\ (h \in H)$, опорный функционал множества $W_{t^*}(\theta)$:

$$\rho_{t^*}(h) = \sup_{y \in W_{t^*}} \langle h, y \rangle .$$

Лемма 2.I. Если функция $\rho(\theta, t^*, \ell)$ является квазивыпуклой по ℓ, то справедливо равенство:

$$\rho_{t^*}(h) = \begin{cases} \infty , & \text{если } h \notin G_{t^*} ; \\ \rho(\theta, t^*, -\ell^*), & \text{если } h = \ell^* T(\theta, t^*, s) \end{cases} \qquad /2.2/$$

Доказательство: Составим функционал Лагранжа /см. /I.8//:

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = \langle h, y \rangle + \lambda \varphi(t^*, y) , \qquad /2.3/$$

где λ - некоторое неотрицательное число. Так как множество неотрицательных чисел замкнуто, то

$$\rho_{t^*}(h) = \sup_{y \in H,\ \lambda \geqslant 0} \inf \mathcal{L}(y, \lambda) . \qquad /2.4/$$

Отсюда, учитывая, что функционал /см. /I.8//

$$\alpha(y, \ell) = \rho(\theta, t^*, \ell) + \langle \ell T(\theta, t^*, s), y \rangle$$

является положительно однородным по ℓ, получаем соотношение:

$$\rho_{t^*}(h) = \sup_{y \in H} \inf_{\ell \in E_n} \varphi(y, \ell) , \qquad /2.5/$$

где $\varphi(y, \ell) = \langle h, y \rangle + \alpha(y, \ell)$. Покажем, что

$$\sup_{y \in H} \inf_{\ell \in E_n} \varphi(y, \ell) = \inf_{\ell \in E_n} \sup_{y \in H} \varphi(y, \ell) .$$

Отсюда будет следовать утверждение леммы, так как, очевидно,

$$\inf_{\ell\in E_n}\sup_{y\in H}\varphi(y,\ell)=\begin{cases}\infty, & \text{если } h\notin G_{t^*};\\ \rho(\theta,t^*,-\ell^*), & \text{если } h=\ell^*T(\theta,t^*,s).\end{cases} \qquad /2.6/$$

Пусть $\mathcal{L}\subset E_n$ - некоторый выпуклый компакт, содержащий вектор ℓ^*, если $h=\ell^*T(\theta,t^*,s)$. Функционал $\varphi(y,\ell)$ является линейным по y и непрерывным и квазивыпуклым по ℓ. На произведении $H\times\mathcal{L}$ для $\varphi(y,\ell)$ выполняются все условия теоремы 3.5. [10]. Поэтому

$$\sup_{y\in H}\inf_{\ell\in\mathcal{L}}\varphi(y,\ell)=\inf_{\ell\in\mathcal{L}}\sup_{y\in H}\varphi(y,\ell)=\inf_{\ell\in E_n}\sup_{y\in H}\varphi(y,\ell). \qquad /2.7/$$

Далее, учитывая, что функционал $\alpha(y,\ell)$ положительно однороден по ℓ и при $y\in W_{t^*}(\theta)$ $\alpha(y,\ell)>0$ для любого $\ell\in E_n$ /см./1.8//, получаем равенства:

$$\sup_{y\in H}\inf_{\ell\in E_n}\varphi(y,\ell)=\sup_{y\in W_{t^*}}\inf_{\ell\in E_n}\varphi(y,\ell)=$$
$$=\sup_{y\in H}\inf_{\ell\in\mathcal{L}}\varphi(y,\ell). \qquad /2.8/$$

Соотношения /2.6/-/2.8/ доказывают справедливость утверждения леммы.

Т е о р е м а 2.1. Если при любом $t\in[t_0,\theta]$ функция $\rho(\theta,t,\ell)$ является квазивыпуклой по ℓ, то система множеств программного поглощения $W_t(\theta)$, $t_0\le t\le\theta$ сильно u - стабильна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любых $t_*\in[t_0,\theta)$, $t^*\in(t_*,\theta]$ имеет место неравенство /1.9/ /при этом, учитывая сказанное в примечании 1.1., считаем, что $t^*-t_*<\tau$ /. В самом деле, пусть $q=\ell T(\theta,t^*,s)$ - произвольный элемент из G_{t^*}. Тогда

$$r_1(t^*,t_*,q)=\int_{t_*}^{t^*}\max_{u\in P(\xi)}\ell\Phi(t^*,\xi)B(\xi)u(\xi)d\xi,$$

$$r_2(t^*,t_*,q)=\int_{t_*}^{t^*}\max_{v\in Q(\xi)}\ell\Phi(t^*,\xi)C(\xi)v(\xi)d\xi,$$

$$\left\langle\int_{t^*}^{t^*+s}F(t^*+s,\xi)w(\xi)d\xi,q\right\rangle=\int_{t_*}^{t^*}\ell\Phi(t^*,\xi)w(\xi)d\xi,$$

где $\Phi(t^*,\xi)=F(\theta,t^*)F(t^*,\xi)+\int_{\xi-t^*}^{0}F(\theta,t^*+\tau+s)A_\tau(t^*+\tau+s)F(t^*+s,\xi)ds.$

При $t^*=\xi$ $\Phi(\xi,\xi)=F(\theta,\xi)$. С другой стороны, учитывая [11], что матрица $F(\theta,t^*)$, как функция t^*, удовлетворяет уравнению с опережающим аргументом

$$\frac{\partial F(\theta,t^*)}{\partial t^*}=F(\theta,t^*)A(t^*)-F(\theta,t^*+\tau)A_\tau(t^*+\tau),$$

а матрица $F(t^*,\xi)$, как функция t^*, удовлетворяет уравнению с запаздывающим аргументом

$$\frac{\partial F(t^*,\xi)}{\partial t^*}=A(t^*)F(t^*,\xi)+A_\tau(t^*)F(t^*-\tau,\xi),$$

получаем, что

$$\frac{\partial \Phi(t^*,\xi)}{\partial t^*}\equiv 0. \qquad /2.10/$$

Следовательно, при любом $\xi\in[t_*,t^*]$

$$\Phi(t^*,\xi)=F(\theta,\xi) \qquad /2.11/$$

и /см. /1.8/, /2.9//

$$r_1(t^*,t_*,g)-r_2(t^*,t_*,g)+$$
$$+\left\langle\int_{t^*}^{t^*+s}F(t^*+s,\xi)w(\xi)d\xi,\,g\right\rangle=\rho(t^*,t_*,\ell)\ .$$

Далее, опираясь на лемму 2.I., заключаем, что

$$-\inf_{y\in W_{t^*}}\langle y,g\rangle=\rho(\theta,t^*,\ell)\ . \qquad /2.12/$$

Вычислим теперь величину $\inf\limits_{y\in W_{t_*}}\langle z(s,y),g\rangle$ из /1.9/.

Имеем

$$\inf_{y\in W_{t_*}}\langle z(s,y),g\rangle=\inf_{y\in W_{t_*}}\langle \varkappa,y\rangle\ , \qquad /2.13/$$

где $\varkappa\in H$, причем

$$\varkappa(0)=g(0)F(t^*,t_*)+\int_{-\delta}^{0}g(s)F(t^*+s,t_*)ds\,;$$

при $s\in[-\tau+\delta,0)$

$$\varkappa(s)=g(s-\delta)\,;$$

при $s\in[-\tau,-\tau+\delta)$

$$\varkappa(s)=\Big[g(0)F(t^*,t_*+\tau+s)+ \qquad /2.14/$$
$$+\int_{-\delta}^{0}g(\eta)F(t^*+\eta,t_*+\tau+s)d\eta\Big]A_\tau(t_*+\tau+s)\ .$$

Здесь $\delta=t^*-t_*$.

Из /2.14/, учитывая, что $g(s)=\ell T(\theta,t^*,s)$, и используя свойства матрицы $\Phi(t^*,t_*)$ /см. /2.10/, /2.11/ /, получаем, что

$$\varkappa(s)=\ell T(\theta,t_*,s). \qquad /2.15/$$

Но тогда, опираясь на лемму 2.I., имеем равенство:

$$\inf_{y\in W_{t_*}}\langle z(s,y),g\rangle=-\rho(\theta,t_*,\ell). \qquad /2.16/$$

Соотношения /2.II/, /2.I2/, /2.I6/ имеют место при любом $g \in G_t *$. Сумма величин, стоящих в правых частях /2.II/, /2.I2/, /2.I6/, равна нулю. Это означает, что неравенство /I.9/ действительно имеет место. Теорема доказана.

Примечание 2.I. Условие квазивыпуклости функции $\rho(\theta,t,\ell)$, очевидно, выполняется, если вектор ℓ^0 , доставляющий минимум в задаче /I.8/, является единственным. Таким образом, еще раз, но другим путем получаем условие сильной u - стабильности множеств $W_t(\theta), t_0 \le t \le \theta$, указанное в следствии 2.I. [7].

Примечание 2.2. При отсутствии в системе /I.I/ последействия ($\tau = 0$) условие выпуклости функции $\rho(\theta,t,\ell)$, как достаточное условие стабильности, являющееся прямым следствием условия стабильности [I] при единственном векторе ℓ^0 , отмечалось в работе [4], а затем в работе [5].

Поступила в редакцию 26.I.I97I г.

Литература

I. Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. "Наука", 1970.

2. Е.Ф.Мищенко, Л.С.Понтрягин. Линейные дифференциальные игры. ДАН СССР, I74, № I.

3. Л.С.Понтрягин. О линейных дифференциальных играх. - ДАН СССР, I74, № 6, I75, № 4, I967.

4. Н.Н.Красовский. Игровые задачи динамики. П. - "Известия АН СССР", Техническая кибернетика, № I, I970.

5. Б.Н.Пшеничный, М.И.Сагайдак. О дифференциальных играх с фиксированным временем. - "Кибернетика" № 2, I970.

6. Н.Н.Красовский, Ю.С.Осипов. Линейные дифференциально-разностные игры. - ДАН СССР, /в печати/.

7. Ю.С.Осипов. Об условиях стабильности поглощения в дифференциально-разностных играх.-"Управляемые системы", вып. 8, I97I.

8. Ю.С.Осипов. Дифференциальные игры систем с последействием.- - ДАН СССР, I96, № 4, I97I.

9. Н.Данфорд, Дж.Шварц. Линейные операторы. т.I, ИЛ, I962.

I0. М.Сайон. Некоторые общие теоремы о минимаксах.-"Бесконечные антагонистические игры", Физмат, I963.

II. А.Халанай. **Differential Equations. Acad.Press.New York, 1966.**