Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 8.
УДК.519.95.

ОБ УСЛОВИЯХ СТАБИЛЬНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГРАХ.I

Ю.С.Осипов /Свердловск/

Работа примыкает к исследованиям [1 - 9]. Для дифференциально-разностных игр указываются условия сильной стабильности /стабильности/ множеств программного поглощения. Обсуждаемые в первой части работы достаточные условия охватывают случай нелинейных дифференциально-разностных игр. Эти условия конкретизируются затем на случай линейных систем с последействием. Во второй части работы указан другой путь получения условий сильной стабильности поглощения. Приводимые там необходимые и достаточные /а также достаточные/ условия охватывают, однако, лишь случай линейных дифференциально-разностных игр.

1. Рассмотрим управляемую систему с последействием вида

$$\dot{x}(t)=f_1(t,x(t),x(t-\tau),u)+f_2(t,x(t),x(t-\tau),v) \qquad /1.1/$$

Здесь x - n - мерный фазовый вектор; r_1 - мерный вектор u и r_2 - мерный вектор v - управляющие воздействия, выбором которых распоряжаются соответственно первый и второй игроки и которые стеснены ограничениями

$$u\in P(t)\ ,\quad v\in Q(t) \qquad /1.2/$$

где $P(t)$, $Q(t)$ - компакты, непрерывно зависящие от $t\in[t_0,\theta]$; $[t_0,\theta]$ - заданный промежуток времени $(\theta\geq t_0)$; функции $f_i(t,x,y,w)$ непрерывны в области возможных значений аргументов и липшицевы по x,y;

$$\|f_i(t,x_1,y_1,w)-f_i(t,x_2,y_2,w)\|\leq\lambda(\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|) \qquad /1.3/$$

где $\lambda=const\geq 0$, символ $\|z\|$ означает евклидову норму вектора z; запаздывание $\tau=const\geq 0$.

Примем обозначения: $x_t(s)=x(t+s)$ - отрезок траектории системы /1.1/, называемый состоянием системы в момент t /здесь и в дальнейшем аргумент s меняется в пределах $-\tau\leq s\leq 0$ /; H - линейное пространство вектор-функций $x(s)$, суммируемых с квадратом $\|x(s)\|$ с нормой

$$\|x(s)\|_\tau=\left(\|x(0)\|^2+\int_{-\tau}^{0}\|x(s)\|^2ds\right)^{1/2};$$

пара $p=\{t,x(s)\}$, $(t\in[t_0,\theta],\ x(s)\in H)$ - позиция игры; $F_1(t,x(s))$ - выпуклая оболочка множества векторов $\{f_1(t,x(0),x(-\tau),u)\,|\,u\in P(t)\}$; U_T - тривиальная стратегия первого игрока, определяемая [3] множествами $F_1(t,x(s))$; V_v (U_u) - программная стратегия второго /первого/ игрока, определяемая /8/ одноэлементными множествами $\{v(t)\}$ $(\{u(t)\})$, где $v(t)\,(u(t))$ - некоторое программное управление второго /первого/ игрока, т.е. измеримая функция, при почти всех

$t\in[t_0,\theta]$ удовлетворяющая ограничению /1.2/; $x[t,p_0,U_T,V_v]=x[t]$ – движение системы /1.1/ из позиции $p_0=\{t_0,x_0(s)\}$ отвечающее стратегиям U_T, V_v, т.е. абсолютно непрерывная при $t\in[t_0,\theta]$ функция, удовлетворяющая условию $x[t_0+s]=x_0(s)$ и при почти всех $t\in[t_0,\theta]$ включению

$$\dot{x}[t]\in F_1(t,x_t[s])+f_2(t,x[t],x[t-\tau],v(t)) \qquad /1.4/$$

/как и в случаях, рассмотренных в [8, 9], существование движений $x[t]$ проверяется предельным переходом от ломаных Эйлера подобно тому, как это делается при отсутствии эффекта последействием /4.10/; $\{x[\cdot]\}=\{x[\cdot,p_0,U_T,V_v]\}$ – совокупность всех движений $x[t,p_0,U_T,V_v]$; $\{x_t[s]\}=\{x_t[s,p_0,U_T,V_v]\}$ – совокупность отрезков $x_t[s]$ всех траекторий $x[t,p_0,U_T,V_v]$.

Пусть в m – мерном евклидовом пространстве E_m $(m\leq n)$ задано некоторое множество M. Пусть $W_t(\theta)$ – множество программного поглощения цели M системой /1.1/ в момент θ. По определению /8/, $W_t(\theta)$ есть совокупность всех $x(s)\in H$, обладающих свойством: какова бы ни была стратегия V_v среди движений $x[\xi,p,U_T,V_v]$, где $p=\{t,x(s)\}$, содержится движение $x[\xi]$, такое, что $\{x[\theta]\}_m\in M$ /Здесь и ниже символ $\{D\}_m$ означает матрицу, составленную из первых m строк матрицы D /. Система непустых множеств $W_t(\theta)$, $t_0\leq t\leq\theta$, называется сильно u – стабильной [8], если, каковы бы ни были позиция $p_*=\{t_*,x_*(s)\}$, где $t_*\in[t_0,\theta),x_*(s)\in W_{t_*}(\theta)$, момент $t^*\in(t_*,\theta]$ и стратегия V_v, среди движений $x[t,p_*,U_T,V_v]$ есть движение $x[t]$ со свойством: $x_{t^*}[s]\in W_{t^*}(\theta)$.

Свойство стабильности множеств $W_t(\theta)$ играет важную роль в теории дифференциальных игр [4 - 9]. Поэтому представляют интерес условия, при которых это свойство имеет место. В случае, когда под позицией игры понимается пара $p=\{t,x(s)\}$, где $x(s)\in C_{[-\tau,0]}$ / см.[8] /, условия сильной u – стабильности / u – стабильности/ множеств программного поглощения указаны в [8], следуя [5]. В случае, когда $x(s)\in H$ и система /1.1/ линейная, такие условия сформулированы /без доказательства/ в [7]. Цель настоящей работы-указать для системы /1.1/ условия стабильности множеств $W_t(\theta)$, а также дать доказательство соответствующих утверждений из [7].

Пусть выбрана некоторая позиция $p^*=\{t^*,x^*(s)\}$, где $t^*\in(t_0,\theta]$, $x^*(s)\notin W_{t^*}(\theta)$. /Если такой позиции p^* не существует, то, очевидно, система множеств $W_t(\theta)$ сильно u – стабильна/. По определению $W_{t^*}(\theta)$, элементу $x^*(s)$ может быть поставлено в соответствие некоторое множество $K(p^*)=\{V_{v^*}\}$ стратегий V_{v^*} таких, что ни одна из точек $y=\{x[\theta,p^*,U_T,V_v]\}_m$ не принадлежит M. Выберем теперь позицию $p_*=\{t_*,x_*(s)\}$, где $t_*\in[t_0,t^*),x_*(s)\in W_{t_*}(\theta)$. Пусть

$$v_*(t) = \begin{cases} v_0(t), \; t_0 \le t \le t^*, \\ v^*(t), \; t^* \le t \le \theta \end{cases} \qquad /1.5/$$

Здесь $v_0(t)$ - произвольное программное управление второго игрока, $v^*(t)$ - функция, порождающая какую-нибудь стратегию $V_{v^*} \in K(p^*)$. Так как $x_*(S) \in W_{t_*}(\theta)$, то V_v можно поставить в соответствие некоторое множество $\mathcal{L}(V_{v^*})$ движений $x[\cdot, p_*, U_T, V_{v^*}]$, обладающих свойством встречи с M : $\{x[\theta, p_*, U_T, V_{v_*}]\}_m \in M$.

Рассмотрим множество движений $\mathcal{L}_0 = \bigcup \mathcal{L}(V_{v^*})$, где объединение берется по всем $V_{v^*} \in K(p^*)$. Отвечающую этому множеству совокупность всех отрезков $x_{t^*}[S]$, где $x[\cdot] \in \mathcal{L}_0$, обозначим символом $\Gamma = \Gamma(t_*, x_*(S), t^*, x^*(S))$. В силу соответствия $x^* \to K(p^*)$, $K(p^*) \to \mathcal{L}_0$ имеем отображение элемента $x^*(S) \notin W_{t^*}(\theta)$ на множество $\Gamma \subset H$.

Предположим, что выполняются условия.

<u>Условие А.</u> Для любых позиций $p_* = \{t_*, x_*(S)\}$, $(t_* \in [t_0, \theta), x_*(S) \in H)$, числа $t^* \in (t_*, \theta]$ и стратегии V_v множество $\{x_{t^*}[S, p_*, U_T, V_v]\}$ является выпуклым.

<u>Условие В.</u> При любых фиксированных $t_* \in [t_0, \theta)$, $x_*(S) \in W_{t_*}(\theta)$, $t^* \in (t_*, \theta]$ множество $\Gamma(t_*, x_*(S), t^*, x^*(S))$ $(x^*(S) \notin W_{t^*}(\theta))$ можно построить выпуклым и слабо полунепрерывным сверху по $x^*(S)$.

Т е о р е м а 1.1. При условиях А, В система множеств $W_t(\theta)$, $t_0 \le t \le \theta$, сильно u - стабильна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим от противного, что существуют $t_* \in [t_0, \theta)$, $x_*(S) \in W_{t^*}(\theta)$, $t^* \in (t_*, \theta]$ и V_{v_1}, такие, что множество $X = \{x_{t^*}[S, p_*, U_T, V_{v_1}]\}$ не пересекается с $W_{t^*}(\theta)$. Каждому $x^*(S) \in X$ поставим в соответствие описанное выше множество Γ, причем в качестве $v_0(t)$ из /1.5/ возьмем именно функцию v_1, порождающую V_{v_1}. Таким путем получаем отображение каждой точки $x^*(S) \in X$ на некоторое подмножество $\Gamma(t_*, x_*(S), t^*, x^*(S)) \subset X$. Далее, повторяя соответствующие рассуждения из работы [9], получаем, что множество траекторий $\{x[\cdot, p_*, U_T, V_v]\}$ бикомпактно в $C_{[t_*, \theta]}$. Отсюда и из условия А вытекает, что множество X замкнуто в слабой топологии пространства H. Учитывая теперь условие В, заключаем, что отображение $x^*(S) \to \Gamma$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5 [11]. Согласно этой теореме данное отображение имеет неподвижную точку: существует $x^0(S) \in X$, такое, что $x^0(S) \in \Gamma(t_*, x_*(S), t^*, x^0(S))$. Последнее включение означает, что некоторое движение $x[t, p^0, U_T, V_{v^*}]$, $p^0 = \{t^*, x^0(S)\}$, попадает на M в момент θ. Это противоречит выбору стратегии V_{v^*}. Теорема доказана.

П р и м е ч а н и е. 1.1 Если в предыдущих рассуждениях заменить $W_t(\theta)$ на множества $W_t^*(\theta)$ программного поглощения M к моменту θ /см. [8] / и под $\mathcal{L}(V_{v^*})$ понимать некоторые совокупности движений $x[\cdot, p_*, U_T, V_{v^*}]$, попадающих на M не позже, чем к моменту θ , то условия А, В будут достаточными условиями u - стабильности множеств $W_t^*(\theta)$ /см.[8]/.

Примечание I.2. Теорема I.I остается, очевидно, справедливой и в том случае, когда в условиях А, В число t^* будет означать лишь момент времени, достаточно близкий к t_* .

2. Пусть теперь система /I.I/ линейная и имеет вид

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_\tau(t)x(t-\tau)+B(t)u-C(t)v+w(t) \qquad /2.1/$$

Пусть множества $P(t)$, $Q(t)$ из /I.2/ выпуклые, множество M - выпуклый компакт в E_m . Указанные в теореме I.I. достаточные условия сильной u - стабильности множеств $W_t(\theta)$ могут быть сформулированы тогда в более эффективной форме подобно тому, как это сделано для обыкновенных систем в [4], [5] . /Заметим, что множества $W_t(\theta)$ будут теперь выпуклыми и слабо замкнутыми в H множествами [7] /. С этой целью выберем произвольно $t^*\in(t_0,\theta]$, $x^*(S)\notin W_{t^*}(\theta)$ и рассмотрим для системы /2.I/ задачу на программный максимин $\beta = \max_{V_v}\min_{U_u}\gamma(\{x[\theta]\}_m,M)$ - расстояния γ фазовой точки $x[\theta,p^*,U_u,V_v]$ до множества M . Здесь $x[t]=x[t,p^*,U_u,V_v]$ - движение системы /2.I/, отвечающее стратегиям U_u, V_v /ясно,что $x[\cdot,p^*,U_u,V_v]\in\{x[\cdot,p^*,U_T,V_v]\}$ /. Это движение с помощью формулы Коши [I2] может быть представлено в виде

$$x[t]=F(t,t^*)x^*(0)+\int_{-\tau}^{0}F(t,t^*+\tau+s)A_\tau(t^*+\tau+s)x^*(s)ds+$$

$$+\int_{t^*}^{t}F(t,\xi)[B(\xi)u(\xi)-C(\xi)v(\xi)+w(\xi)]d\xi ,$$

где непрерывная матрица $F(t,\xi)$ удовлетворяет условиям: $F(t,\xi)\equiv 0$ при $\xi>t$; $F(t,t)=E$ - единичная матрица и при $t<\xi$

$$\frac{\partial F(t,\xi)}{\partial \xi}=-F(t,\xi)A(\xi)-F(t,\xi+\tau)A_\tau(\xi+\tau) .$$

Опираясь на /2.2/ и аппарат теории [ ], можно проверить, что искомый максимин β равен

$$\beta=\beta(x^*(s))=\max_{\|\ell\|=1}\{-\rho(\theta,t^*,\ell)-\langle\ell T(\theta,t^*,s),x^*(s)\rangle\} \qquad /2.3/$$

Здесь ℓ - n - мерный вектор вида $\ell=\{\ell_1,\dots,\ell_n,0,\dots,0\}$; символ $\langle x,y\rangle$ означает скалярное произведение в H , такое, что $\langle x,x\rangle=\|x\|^2_{E_n}$; $T(\theta,t,0)=F(\theta,t)$, $T(\theta,t,s)=F(\theta,t+\tau+s)A_\tau(t+\tau+s)$ при $s\in[-\tau,0)$ и величина

$$\rho(\theta,t,\ell)=\int_t^\theta[\max_{u\in P(\xi)}\ell F(\theta,\xi)B(\xi)u(\xi)-\max_{v\in Q(\xi)}\ell F(\theta,\xi)C(\xi)v(\xi)+$$

$$+\ell F(\theta,\xi)w(\xi)]d\xi-\min_{y\in M}(\ell_1y_1+\dots+\ell_my_m).$$

При этом решение $\{U_{u^o}, V_{v^o}\}$ такой задачи определяется функциями $u^o(t), v^o(t), t^* < t \le \theta$, удовлетворяющими принципу максимума соответственно на элементах $h^o_u(t) = \ell^o F(\theta, t)B(t); h^o_v(t) = \ell^o F(\theta, t)C(t)$:

$$h^o_u(t)u^o(t) = \max_{u \in P(t)} h^o_u(t)u \qquad /2.5/$$

$$h^o_v(t)v^o(t) = \max_{v \in Q(t)} h^o_v(t)v$$

где $\ell^o = \ell^o(x^*(S))$ - вектор, доставляющий максимум в /2.3/.

Выберем в качестве множества $K(p^*)$ /см. стр. 14 /, порождающего Γ, совокупность всех стратегий $V_{v^*} = V_{v^o}$, решающих задачу на программный максимин, Будем обозначать теперь это множество символом $K_v(p^*)$.

Т е о р е м а 2.1. Если любой позиции $p^* = \{t^*, x^*(S)\}$, где $t^* \in (t_o, \theta], x^*(S) \notin W_{t^*}(\theta)$, множество $K_v(p^*)$ выпуклое, то система множеств программного поглощения $W_t(\theta)$, $t_o \le t \le \theta$ сильно u - стабильна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при условиях теоремы /2.1/ имеют место свойства А, В. Свойство А является, очевидно, простым следствием линейности системы /2.1/ по u, x и выпуклости $P(t)$ из /1.2/, если при этом учесть, что любое движение $x[t, p^*, U_T, V_v]$ системы /2.1/ может быть представлено в виде /2.2/, где $u(t) = u[t]$ - некоторая суммируемая реализация управления первого игрока при почти всех $t \in [t^*, \theta]$, удовлетворяющая /1.2/. Проверим условие В. Пусть заданы произвольно $t_* \in [t_o, \theta)$, $t^* \in (t_*, \theta]$, $x_*(S) \in W_{t_*}(\theta)$, $x^*(S) \in W_{t^*}(\theta)$. Выберем в качестве множества $\mathcal{L}(V_{v^*})$ /см. стр. 15 / совокупность всех движений $x[\cdot, p^*, U_T, V_{v^*}]$, попадающих в момент θ на M /напомним, что функция $v_*(t)$ определяется согласно /1.5/, где теперь следует положить $v^*(t) = v^o(t)$ /. Рассмотрим множество $\Gamma(t_*, x_*(S), t^*, x^*(S))$. В силу выпуклости множеств $M, K_v(p^*)$ и линейности системы /2.1/ по x, u, v множество Γ - выпуклое. Покажем, что оно слабо полунепрерывно сверху по $x^*(S)$. Предположим от противного, что существуют последовательность $\{x^{*(k)}(S)\}$, где $x^{*(k)}(S) \notin W_{t^*}(\theta)$, слабо сходящаяся в H к $x^*(S)$, и последовательность $\{x^{(k)}(S)\}$, где $x^{(k)}(S) \in \Gamma_k = \Gamma(t_*, x_*(S), t^*, x^{*(k)}(S))$, слабо сходящаяся в H к некоторому элементу $x^o(S)$, такие, что

$$x^o(S) \notin \Gamma(t_*, x_*(S), t^*, x^*(S)). \qquad /2.6/$$

По определению Γ_k, элемент $x^{(k)}(S)$ является отрезком $x^{(k)}_{t^*}[S]$ траектории

$$x^{(k)}[t] = F(t, t_*)x_*(0) + \int_{-\tau}^{0} F(t, t_* + \tau + S)A_\tau(t_* + \tau + S)x_*(S)dS +$$

$$+\int_{t_*}^{t} F(t,\xi)[B(\xi)u_k[\xi]-C(\xi)v_*^{(k)}(\xi)-w(\xi)]d\xi,$$

удовлетворяющей условию

$$\{x^{(k)}[\theta]\}_m \in M. \qquad /2.8/$$

Здесь $v_*^{(k)}$ определяется равенством /I.5/, где следует положить $v^*(t)=v_k^0(t)$, и $v_k^0(t)$ - функция, порождающая какую-либо стратегию $V_{v_0^{(k)}} \in K_v(p^{*(k)})$, $p^{*(k)}=\{t^*, x^{*(k)}(s)\}$; $u_k[t]$ - некоторая суммируемая реализация управления u, при почти всех $t\in[t_*,\theta]$, удовлетворяющая /I.2/. Так как множество всех суммируемых на $[t_*,\theta]$ функций, удовлетворяющих при почти всех $t\in[t_*,\theta]$ какому-либо из ограничений /I.2/, является слабо бикомпактным в H множеством, то можно, выделяя, если нужно, последовательности, считать что последовательности $\{u_k[t]\},\{v_*^{(k)}(t)\}$ слабо сходятся (в $\mathcal{L}^{(2)}_{[t_*,\theta]}$) соответственно к некоторым функциям $\bar u(t)$, $\bar v(t)$, которые при почти всех $t\in[t_*,\theta]$ также удовлетворяют условиям /I.2/. Отсюда следует, что предел $\bar x[t]$ (в $C_{[t_*,\theta]}$) последовательности движений $\{x^{(k)}[t]\}$ снова является некоторым движением $x[t,p_*,U_T,V_{\bar v}]$ системы /2.I/, удовлетворяющим /в силу замкнутости M и условия /2.8/ / включению

$$\{\bar x[\theta]\}_m \in M. \qquad /2.9/$$

Из равномерной сходимости последовательности функций $\{x^{(k)}[t]\}$, $t_*\le t\le\theta$ к $\bar x[t]$ вытекает, что последовательность элементов $\{x^{(k)}(s)\}=\{x_{t^*}^{(k)}[s]\}$ сходится по норме, а следовательно, и слабо в H к элементу $\bar x_{t^*}[s]$. В силу единственности слабого предела имеем равенство $x^0(s)=\bar x_{t^*}[s]$. Слабая полунепрерывность сверху множества $\Gamma(t_*,x_*(s),t^*,x^*(s))$ в точке $x^*(s)$ будет, очевидно, доказана /см. /2.6/,/2.9//, если мы теперь покажем, что функция $\bar v(t)$, $t^*\le t\le\theta$, является решением задачи /2.3/ - /2.5/ на програмный максимин из позиции $p^*=\{t^*, x^*(s)\}$. Для этого достаточно показать, что какова бы ни была програмная стратегия U_u, движение $x[t,p^*,U_u,V_{\bar v}]$, определяемое соотношением /2.2/ при $v(t)=\bar v(t)$, $t^*\le t\le\theta$, удовлетворяет неравенству /см. 2.3 /:

$$\gamma(\{x[\theta]\}_m, M)\ge\beta. \qquad /2.10/$$

Рассмотрим последовательность $\{x[t]^{(k)}\}$ движений

$$x[t]^{(k)}=F(t,t^*)x^{*(k)}(0)+\int_{-\tau}^{0}F(t,t^*+\tau+s)A_\tau(t^*+\tau+s)x^{*(k)}(s)ds+$$

$$+\int_{t^*}^{t} F(t,\xi)[B(\xi)u(\xi)-C(\xi)v_k^0(\xi)+W(\xi)]d\xi .$$

Так как $\{x^{*(k)}(S)\}$ слабо сходится в H к $x^*(S)$ и $\{v_k^0(t)\}$ слабо сходится в $\mathcal{L}^{(2)}_{[t^*,\theta]}$ к $\bar{v}(t),(t^*\leq t\leq\theta)$, то из /2.II/ заключаем,что последовательность векторов $\{x[\theta]^{(k)}\}$ сходится к вектору $x[\theta]$. Учитывая, что $v_k^0(t)$ - решение задачи /2.3/ - /2.5/ на программный максимин из позиции $p^{*(k)}$, по свойству расстояния γ имеет место неравенство

$$\gamma(\{x[\theta]\}_m, M)\geq\beta(x^{*(k)}(S))-\|\{x[\theta]-$$

$$-x[\theta]^{(k)}\}_m\|-\|y-y^{(k)}\|,$$

где y, $y^{(k)}$ -ближайшие /в E_m / соответственно к $\{x[\theta]\}_m, \{x[\theta]^{(k)}\}_m$, элементы из M. Далее, нетрудно проверить, что функционал $\beta(x^*(S))$ является слабо непрерывным в H. Но тогда, переходя в /2.I2/ к пределу /при $k\to\infty$ / и учитывая оценку [I3] $\|y-y^{(k)}\|\leq\|\{x[\theta]-x[\theta]^{(k)}\}_m\|$, получаем нужное нам неравенство /2.I0/. Теорема доказана.

Следствие 2.I. Если при любых $t^*\in(t_0,\theta], x^*(S)\notin W_{t^*}(\theta)$ вектор $l^0=l^0(x^*(S))$, доставляющий максимум в /2.3/, единственный, то система множеств программного поглощения $W_t(\theta), t_0\leq t\leq\theta$, сильно u -стабильна.

В самом деле, при условии единственности вектора $l^0(x^*(S))$ из принципа максимума /2.5/ вытекает, что множество $\{v^0(t)\}$ решений задачи /2.3/ - /2.5/ на программный максимин является обязательно множеством выпуклым.

Примечание 2.I. Заметим, что вектор $l^0(x^*(S))$ будет заведомо единственным, если существует выпуклое множество $R(t)$, такое, что при всех $t\in[t_0,\theta]$

$$\{B(t)P(t)\}_m=\{C(t)Q(t)\}_m+R(t). \qquad /2.13/$$

Здесь справа стоит алгебраическая сумма множеств ; $B(t)P(t)=$

$$=\{B(t)u\mid u\in P(t)\},\ C(t)Q(t)=\{C(t)v\mid v\in Q(t)\}.$$

Поступила в редакцию 26.I.I97I г.

Литература

I.Л.С.Понтрягин. К теории дифференциальных игр. - УМН, 2I,№ 4, I966.

2.Е.Ф.Мищенко, Л.С.Понтрягин. Линейные дифференциальные игры.-

-ДАН СССР, 174, № 1, 1967.

3. Б.Н.Пшеничный. Структура дифференциальных игр.-ДАН СССР, 184, № 2, 1969.

4. Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. Изд-во "Наука", 1970.

5. Н.Н.Красовский. К теории дифференциальных игр.-ПММ, т. 34, вып. 2, 1970.

6. Н.Н.Красовский, А.И.Субботин. О структуре дифференциальных игр.-ДАН СССР, 190, № 3, 1970.

7. Н.Н.Красовский, Ю.С.Осипов. Линейные дифференциально разностные игры.-ДАН СССР, /в печати/.

8. Ю.С.Осипов. Дифференциальные игры систем с последействием.-ДАН СССР, 196, № 4, 1971.

9. Ю.С.Осипов. К теории дифференциальных игр систем с последействием.-ПММ, т.35, вып.2, 1971.

10. А.Ф.Филиппов. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.-Мат. сб., 51 /93/, вып. 1, 1961.

11. Х.Ф.Боненбласт, С.Карлин. Об одной теореме Вилля.-"Бесконечные антогонистические игры", М., 1963.

12. А.Халанай. Differential Equations. Acad. Press New York, 1966.

13. В.К.Иванов. Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах.-"Сиб.мат.журнал," т.VI, № 4, 1965.