Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 7.
УДК.512.25/26+519.3:330.115.

# О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

В.В.Леонов

Вопросу распространения на многошаговые процессы принципа максимума Л.С.Понтрягина посвящено большое число работ. Наиболее существенными, на наш взгляд, являются работы [1] - [6].

В данной статье выявляется зависимость условий оптимальности от характера многошагового процесса и устанавливается связь дискретных аналогов принципа максимума с принципом оптимальности Р.Беллмана.

## $1^{\circ}$. Постановка задачи. Метод динамического программирования

Рассмотрим многошаговый процесс

$$x_s(n)=f_s^n(\{x_j(n-1)\},\{u_k(n)\})\,(s,j=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,q_n;\ n=1,\ldots,N) \qquad /1/$$

$$x_s(0)=x_{s0}\quad (s=1,\ldots,m), \qquad /1'/$$

где $\bar{u}(n)=(u_1(n),\ldots,u_{q_n}(n))\in U_n$, причем $U_n$ является ограниченным множеством из евклидова пространства $E_{q_n}$ размерности $q_n\geqslant 1$. Кроме того, предполагаем, что решение системы /1/ при начальных условиях /1'/ существует и единственно, каковы бы ни были $\bar{u}(n)\in U_n$.

Всевозможные наборы $\bar{u}(1),\ldots,\bar{u}(N)$, где $\bar{u}(n)\in U_n$, будем называть допустимыми управлениями.

Систему /1/ можно записать в векторной форме:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}(n)=\bar{f}^n(\bar{x}(n-1),\bar{u}(n))\ (n=1,\ldots,N),\\&\bar{x}(0)=\bar{x}_0.\end{aligned}\right\} \qquad /1^{\circ}/$$

Обозначим через $\bar{x}_{\ell,k}(\bar{x}^*,\bar{u}(k+1),\ldots,\bar{u}(k+\ell))$, где $k+1\leqslant k+\ell\leqslant N$, решение системы

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}(k+\nu)=\bar{f}^{k+\nu}(\bar{x}(k+\nu-1),\bar{u}(k+\nu)))\ (\nu=1,\ldots,\ell),\\&\bar{x}(k)=\bar{x}^*,\end{aligned}\right\} \qquad /1^{k}/$$

а через $S_{\ell,k}(\bar{x}^*)$ множество

$$\{\bar{x}_{\ell,k}(\bar{x}^*,\bar{u}(k+1),\ldots,\bar{u}(k+\ell)):\ \bar{u}(k+\nu)\in U_{k+\nu}\ (\nu=1,\ldots,\ell)\}. \qquad /2/$$

Очевидно, что решение системы $/1^{\circ}/$ существует и единственно, если $\bar{f}^n(\bar{x},\bar{u})$ являются однозначными функциями от $(\bar{x},\bar{u})\in G_{n-1}\times U_n$ $(n=1,\ldots,N)$, причем нам известно, что $S_{n-1,0}(\bar{x}_0)\in G_{n-1}$ $(n=1,\ldots,N)$. В частности, если $G_k=E_m$ $(k=0,1,\ldots,N)$, то решение системы $/1^{\circ}/$ существует и единственно при любом допустимом управлении, каково бы ни было $\bar{x}_0\in E_m$.

Ставится следующая задача $Max$. Необходимо найти хотя бы одно допустимое управление $\bar{u}(1)=\bar{u}_1^N(\bar{x}_0),\ldots,\bar{u}(N)=\bar{u}_N^N(\bar{x}_0)$, в случае которого достигается

$$R^*(\bar{x}_0)=\max_{\bar{u}(n)\in U_n}\bar{c}\cdot\bar{x}_{N,0}(\bar{x}_0,\bar{u}(1),\ldots,\bar{u}(N)). \qquad /3/$$

Очевидно, для любого допустимого управления на $N$ шагов справедливо неравенство

$$\bar{C}\bar{X}_{N,0}(\bar{X}_0, \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(N)) \leqslant R^*(\bar{X}_0). \qquad /3'/$$

В общем случае при всех допустимых управлениях имеет место строгое неравенство /3'/, и тем самым не существует решения задачи $Max$. Однако если для любого $n=1,\dots,N$ $\bar{f}^n(\bar{X},\bar{u})$ является непрерывной вектор-функцией от $(\bar{X},\bar{u})\in G_{n-1}\times U_n$, где $G_{n-1}\supseteq S_{n-1,0}(\bar{X}_0)$, $U_n$ - замкнутые множества, то тогда все множества $S_{n,0}(\bar{X}_0)$ являются замкнутыми множествами и тем самым существует решение задачи $Max$, так как

$$R^*(\bar{X}_0) = \sup_{\bar{X}\in S_{N,0}(\bar{X}_0)} \bar{C}\cdot\bar{X}. \qquad /3^*/$$

А теперь перейдем к изучению самой задачи $Max$. При этом мы будем для удобства пользоваться следующими обозначениями:

1/ $U_n(\bar{X}^*,\Delta)=\{\bar{u}:\bar{u}\in U_n;\ \bar{f}^n(\bar{X}^*,\bar{u})\in\Delta\}$;

2/ $R_k(\bar{X}^*)=\max\limits_{u(N-k+\nu)\in U_{N-k+\nu}} \bar{C}\bar{X}_{k,N-k}(\bar{X}^*;\bar{u}(N-k+1),\dots,\bar{u}(N))$; /4/

3/ $\bar{u}_s^{(k)}(\bar{X}^*)$ - такие $\bar{u}(N-k+s)\in U_{N-k+s}$ $(s=1,\dots,k)$, , которые доставляют максимум /4/;

4/ $F_X^n(\bar{X},\bar{u})=\|f_{s,i}^n(\bar{X},\bar{u})\|$, где $f_{s,i}^n(\bar{X},\bar{u})=\dfrac{\partial f_s^n(\bar{X},\bar{u})}{\partial x_i}$;

5/ $F_u^n(\bar{X},\bar{u})=\|\varphi_{s,j}^n(\bar{X},\bar{u})\|$, где $\varphi_{s,j}^n(\bar{X},\bar{u})=\dfrac{\partial f_s^n(\bar{X},\bar{u})}{\partial u_j}$;

6/ $|G|$ - мощность конечного множества $G$;

7/ $|\bar{X}|$ - модуль вектора $\bar{X}$;

8/ $C(\bar{X}^*,\rho)=\{\bar{X}:|\bar{X}-\bar{X}^*|\leqslant\rho\}$;

9/ $A^*$ - транспонированная матрица $A$;

10/ $\bar{e}$ - единичный вектор, $|\bar{e}|=1$;

11/ $Q(\bar{X}^*,\Delta)$ - множество единичных векторов $\bar{e}\in E_m$, для каждого из которых существует бесконечная последовательность $\bar{X}_s(\bar{e})\in\Delta$, $\bar{X}_s(\bar{e})\to\bar{X}^*$, такая, что

$$\lim_{s\to\infty}\min_t \frac{|\bar{X}_s(\bar{e})-t\bar{e}|}{|\bar{X}_s(\bar{e})-\bar{X}^*|}=0,\quad \bar{X}_s(\bar{e})\neq\bar{X}^*$$

12/ $Q_\varepsilon(\bar{X}^*,\Delta)=\{\bar{e}:|\bar{e}|=1;\ \bar{X}^*+t(\bar{e},\varepsilon)\in\Delta,\ 0<t(\bar{e},\varepsilon)\leqslant\varepsilon\}$;

13/ $P(\bar{X}^*,\Delta)$ - касательная плоскость к множеству $\Delta$ в его граничной точке $\bar{X}^*$;

14/ $K(\bar{X}^*,\Delta)=\{(\bar{X}^*+t\bar{e}):\bar{e}\in Q(\bar{X}^*,\Delta);\ t>0\}$;

15/ $K_\varepsilon(\bar{X}^*,\Delta)=\{(\bar{X}^*+t\bar{e}):\bar{e}\in Q_\varepsilon(\bar{X}^*,\Delta);\ t>0\}$;

16/ $K^+(\bar{X},\bar{y})=\{(\bar{X}^*+t\bar{e}):|\bar{e}|=1;\ \bar{e}\cdot\bar{y}>0;\ t>0\}$;

17/ $K^-(\bar{x},\bar{y})=\{(\bar{x}+t\bar{e}):|\bar{e}|=1;\ \bar{e}\cdot\bar{y}<0,\ t>0\}$;

18/ $K^0(\bar{x},\bar{y})=\{(\bar{x}^x+t\bar{e}):\ |\bar{e}|=1,\ \bar{e}\cdot\bar{y}=0,\ t\geqslant 0\}$.

Для решения задачи $Max$ можно, вообще говоря, воспользоваться методом динамического программирования. Действительно, из принципа оптимальности Р.Беллмана следует справедливость рекуррентных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &R_k(\bar{x})=\max_{\bar{u}\in U_{N-k+1}} R_{k-1}(\bar{f}^{N-k+1}(\bar{x},\bar{u}))\ (k=1,\dots,N),\\ &R_0(\bar{x})=\bar{C}\cdot\bar{x}; \end{aligned}\right\} \qquad /5/$$

$$\bar{u}_s^{(k)}(x)=\bar{u}_{s-1}^{(k-1)}(\bar{f}^{N-k+1}(\bar{x},\bar{u}_1^{(k)}(\bar{x}))\ (S=2,\dots,k), \qquad /6/$$

где $\bar{u}_1^{(k)}(\bar{x})$ - такое $\bar{u}\in U_{N-k+1}$, которое доставляет максимум /5/. При этом оптимальное $\bar{u}_k^N(x_0)=\bar{u}_n^{(N)}(\bar{x}_0)$, при которых достигается максимум /3/, в общем случае при использовании принципа оптимальности находятся лишь после последовательного отыскания с помощью рекуррентных соотношений /5/ и /6/ всех $R_k(\bar{x})$ и $\bar{u}_s^{(k)}(\bar{x})$ для $\bar{x}\in G_{N-k}\ (k=1,\dots,N)$.

В случае приближенного решения задачи $Max$, основанного на замене множеств $G_k$ и $U_k$ соответствующими $\varepsilon$ -сетями $G_k^\varepsilon$ и $U_k^\varepsilon$, память и количество операций, необходимые [7] для приближенного решения задачи, оцениваются следующим образом:

$$\text{память}\ \Pi_N^{Д.П.}\sim c\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left[\left(\sum_{v=1}^{N-k} q_{k+v}\right)|G_k^\varepsilon|\right],\ \text{где}\ c\geqslant 1; \qquad /7/$$

количество операций

$$T_N^{Д.П.}\sim c_1\left[|G_1^\varepsilon||U_1^\varepsilon|+|G_{N-1}^\varepsilon||U_N^\varepsilon|+\sum_{k=2}^{N-1}|G_{k-1}^\varepsilon||G_k^\varepsilon||U_k^\varepsilon|\right], \qquad /8/$$

где $c_1\geqslant 1$.

Если учесть, что "погружающие" множества $G_k\supseteq S_{k,0}(\bar{x}_0)$ $(k=1,\dots,N-1)$ априори находятся чрезвычайно грубо, то на основании оценок /7/ и /8/ можно утверждать, что даже для системы /1⁰/ сравнительно невысокого порядка отыскание оптимального управления с удовлетворительной степенью точности невозможно осуществить на современных ЭВМ, если использовать метод динамического программирования. В связи с этим в настоящее время делаются попытки распространить основные идеи принципа максимума на случай многошаговых процессов. Это новое, перспективное направление, однако теоретически еще недостаточно разработанное и используемое на практике эпизодически, без должной степени обоснования. Поэтому в данной статье мы вынуждены ограничиться лишь формулировкой и анализом необходимых условий оптимальности, на наш взгляд, более точно учитывающих специфику управляемого процесса.

## $2^{\circ}$. Уравнения в вариациях. Общие условия оптимальности

Предположим, что нами найдено или просто выбрано некоторое допустимое управление $\bar{u}^{\circ}(1),\dots,\bar{u}^{\circ}(N)$, и мы хотим проверить, может ли оно быть оптимальным в смысле решения задачи $Max$.

Один из способов проверки заключается в следующем.

Обозначим

$$\bar{x}^{\circ}(n)=\bar{x}_{n,0}(\bar{x}_0,\bar{u}^{\circ}(1),\dots,\bar{u}^{\circ}(n)), \qquad /9/$$

$$\bar{x}^{*}(n)=\bar{x}_{n,0}(\bar{x}_0,\bar{u}^{*}(1),\dots,\bar{u}^{*}(n)), \qquad /9'/$$

$$\bar{z}(n)=\bar{x}^{*}(n)-\bar{x}^{\circ}(n) \qquad /9''/$$

Очевидно, что, каково бы ни было допустимое управление $\bar{u}^{*}(1),\dots,\bar{u}^{*}(N)$, должно выполняться неравенство

$$\bar{c}\bar{z}(N)\leq 0, \qquad /10/$$

если уравнение $\bar{u}^{\circ}(1),\dots,\bar{u}^{\circ}(N)$ является оптимальным.

Зафиксируем некотрое $k\in\{1,\dots,N\}$. При заданном $k$ будем рассматривать управления

$$\bar{u}^{*}(n)=\bar{u}^{(k)}(n,\bar{u}_k^{*})=\begin{cases}\bar{u}^{\circ}(n) \text{ для } n\neq k,\\ \bar{u}_k^{*} \text{ для } n=k.\end{cases} \qquad /11/$$

Если $\bar{u}^{*}(n)$ удовлетворяют /11/, то

$$\bar{z}(n)=\begin{cases}\bar{0} & \text{для } n<k,\\ \bar{f}^{k}(\bar{x}^{\circ}(k-1),\bar{u}_k^{*})-\bar{f}^{k}(\bar{x}^{\circ}(k-1),\bar{u}^{\circ}(k)) & \text{для } n=k,\\ \bar{f}^{n}(\bar{x}^{\circ}(n-1)+\bar{z}(n-1),\bar{u}^{\circ}(n))-\bar{f}^{n}(\bar{x}^{\circ}(n-1),\bar{u}^{\circ}(n)) & \text{для } n>k.\end{cases} \qquad /12/$$

Предположим, что существуют матрицы $F_x^{n}(\bar{x}^{\circ}(n-1),\bar{u}^{\circ}(n))(n=1,\dots,n)$. Тогда, каково бы ни было $k\in\{1,\dots,N\}$, при $|z(k)|\leq\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало, для $n>k$

$$\bar{z}(n)=\bar{y}(n)+o(\varepsilon), \qquad /13/$$

где

$$\bar{y}(n)=F_x^{n}(\bar{x}^{\circ}(n-1),\bar{u}^{\circ}(n))\bar{y}(n-1) \qquad \text{для } n>k, \qquad /14/$$

$$\bar{y}(k)=z(k)=\bar{f}^{k}(\bar{x}^{\circ}(k-1),\bar{u}_k^{k})-\bar{f}^{k}(\bar{x}^{\circ}(k-1),\bar{u}^{\circ}(k)), \qquad /15/$$

откуда следует, что

$$\bar{z}(N)=F_x^{N}(\bar{x}^{\circ}(N-1),\bar{u}^{\circ}(N))F_x^{N-1}(\bar{x}^{\circ}(N-2),\bar{u}^{\circ}(N-1))\dots F_x^{k+1}(\bar{x}^{\circ}(k-1),\bar{u}^{\circ}(k))\bar{z}(k)+o(\varepsilon) \qquad /16/$$

Обозначим

$$[F_x^{k+1}(\bar{x}^{\circ}(k),\bar{u}^{\circ}(k+1))]^{*}\dots[F_x^{N}(\bar{x}^{\circ}(N-1),\bar{u}^{\circ}(N))]^{*}\bar{c}=\bar{\varphi}(k), \qquad /17/$$

$$H^{k}(\bar{x},\bar{\varphi},\bar{u})=\bar{\varphi}\cdot\bar{f}(\bar{x},\bar{u}). \qquad /18/$$

Очевидно, что $\bar{\varphi}(k)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\varphi}(k)=[F_x^{k+1}(\bar{x}^{\circ}(k),\bar{u}^{\circ}(k+1))]^{*}\bar{\varphi}(k+1)\ (k=1,\dots,N-1),\\ &\bar{\varphi}(N)=\bar{c}\end{aligned}\right\} \qquad /19/$$

Легко заметить, что

$$\tau \bar{z}(N) = H^k(\bar{x}^\circ(k-1), \bar{\varphi}(k), \bar{u}^*_k) - H^k(\bar{x}^\circ(k-1), \bar{\varphi}(k), \bar{u}^\circ(k)) +$$

$$+ o(\varepsilon) = \bar{\varphi}(k)\cdot \bar{z}(k) + o(\varepsilon) = \bar{\varphi}(k)[\bar{f}^k(\bar{x}^\circ(k-1), \bar{u}^*_k) -$$

$$- \bar{f}^k(\bar{x}^\circ(k-1), \bar{u}^\circ(k))] + o(\varepsilon), \qquad /20/$$

если

$$\bar{u}^*_k \in U_k(\bar{x}^\circ(k-1), C(\bar{x}^\circ(k), \varepsilon) \cap S_{1,k-1}(\bar{x}^\circ(k-1))). \qquad /21/$$

Из /20/, /21/ и условия оптимальности /10/ вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а I. Если допустимое управление является оптимальным, причем существуют $F^n_x(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n))(n = 1, \ldots, N)$ , то тогда для любого $n = 1, \ldots, N$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\bar{u} \in U_n(\bar{x}^\circ(n-1), C(\bar{x}^\circ(n), \varepsilon) \cap S_{1,n-1}(\bar{x}^\circ(n-1)))} \frac{1}{\varepsilon}[H^n(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{\varphi}(n), \bar{u}) - H^n(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{\varphi}(n), \bar{u}^\circ(n))] \le 0.$$

С л е д с т в и е I. Если при условиях теоремы I существует $F^n_u(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n))(n = 1, \ldots, N)$ , то

$$\sup_{\bar{e} \in Q(\bar{u}^\circ(n), U_n)} [F^n_u(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n))]^* \bar{\varphi}(n) \cdot \bar{e} \le 0, \qquad /23/$$

причем если размерность $q_n$ множества $U_n$ больше I и существует такая гиперплоскость, проходящая через точку $\bar{u}^\circ(n)$ , которая, за исключением точки $\bar{u}^\circ(n)$ , целиком лежит внутри конуса $K(\bar{u}^\circ(n), U_n)$ , то

$$[F^n_u(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n)]^* \bar{\varphi}(n) = \bar{0}, \qquad /24/$$

что эквивалентно равенствам

$$\frac{\partial H^n(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n))}{\partial u_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, q_n). \qquad /25/$$

С л е д с т в и е 2. Если управление $\bar{u}^\circ(1), \ldots, \bar{u}^\circ(N)$ оптимально и существуют $\{F^n_x(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n))\}$, $\{F^n_u(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n))\}$ , то выполнение неравенства

$$[F^n_u(\bar{x}^\circ(n-1), \bar{u}^\circ(n))]^* \bar{\varphi}(n) \cdot (\bar{u} - \bar{u}^\circ(n)) < 0$$

для всех $\bar{u}$ , являющихся внутренними точками конуса $K(\bar{u}^\circ(n), U_n)$, возможно лишь в том случае, когда не существует гиперплоскости, проходящей через $\bar{u}^\circ(n)$ и целиком лежащей внутри конуса $K(\bar{u}^\circ(n), U_n)$ .

Следует заметить, что если оптимальное $\bar{u}^\circ(n)$ является точкой гладкости границы $\Gamma_n$ множества $U_n$ , то для всех $\bar{u} \in P(\bar{u}^\circ(n), U_n)$ справедливо тождество

$$grad_u H^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}^0(n))\cdot(\bar{u}-\bar{u}^0(n))=0.$$

Таким образом, на основании полученных результатов мы можем сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Если допустимое управление $\bar{u}^0(1),\dots,\bar{u}^0(N)$ оптимально, существуют $F_x^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{u}^0(n))$, $F_u^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{u}^0(n))$ $(n=1,\dots,N)$, множества $U_n$ имеют размерность не ниже 2-х и являются замкнутыми множествами с гладкой границей, то

$$grad_u H^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}^0(n))=\begin{cases}\bar{0}, \text{ если } \bar{u}^0(n)\in U_n\setminus\Gamma_n,\\ |grad_u H^n(\dots)|\bar{n}^0(\bar{u}^0(n)), \text{ если } \bar{u}^0(n)\in\Gamma_n,\end{cases} \qquad /26/$$

где $\bar{n}^0(\bar{u}^0(n))$ - единичная внешняя нормаль к границе $\Gamma_n$ в точке $\bar{u}^0(n)$, причем $\bar{u}^0(n)\in\Gamma_n$, если $q_n=m$,

$$det(F_u^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{u}))\neq 0 \text{ для } \bar{u}\in U_n.$$

Условия /26/ для множества $U_n$ с гладкой границей носят столь общий характер, что им могут удовлетворять также и допустимые управления, доставляющие глобальный минимум функции /3/. Более существенное ограничение на класс допустимых управлений, подозрительных на оптимальное, содержится в теореме 3, учитывающей характер множеств $S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))$.

Т е о р е м а 3. Если допустимое управление $\bar{u}^0(1),\dots,\bar{u}^0(N)$ оптимально и существуют $F_x^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{u}^0(n))$ $(n=1,\dots,N)$, то

$$K(\bar{x}^0(n),S_{1,k-1}(\bar{x}^0(k-1)))\cap K^+(\bar{x}^0(n),\bar{\varphi}(n))=\phi\ (n=1,\dots,N). \qquad /27/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать теорему от противного. Пусть $K(\bar{x}^0(k^0),S_{1,k^0-1}(\bar{x}^0(k^0-1)))\cap$ $\cap K^+(\bar{x}^0(k^0),\bar{\varphi}(k^0))=\tilde{K}\neq\phi$.

Возьмем произвольный луч $\{(\bar{x}^0(k^0)+t\bar{e}^0):t>0\}\subset\tilde{K}$. Так как $\tilde{K}\neq\phi$, то $\{(\bar{x}^0(k^0)+t\bar{e}^0):t>0\}\subset K(\bar{x}^0(k^0),S_{1,k^0-1}(\dots))$, причем существует бесконечная последовательность $\{\bar{x}_s(k^0)\}$ точек из $S_{1,k^0-1}(\bar{x}^0(k^0-1))$, удовлетворяющих условиям:

$$\bar{x}_s(k^0)=\bar{x}^0(k^0)+\varepsilon_s\bar{e}+\bar{r}_s\neq\bar{x}^0(k^0), \text{ где } \varepsilon_s>0,\ \varepsilon_s\to 0,\ |\bar{r}_s|=O(\varepsilon_s).$$

Кроме того, $\bar{\varphi}(k^0)\cdot\bar{e}^0>0$ вследствие включения

$$\{(\bar{x}^0(k^0)+t\bar{e}^0):t>0\}\subset K^+(\bar{x}^0(k^0),\bar{\varphi}(k^0)).$$

Очевидно, что существует такая последовательность $\bar{u}^s_{k^0}\in U_{k^0}$, что $\bar{f}^{k^0}(\bar{x}^0(k^0-1),\bar{u}^s_{k^0})=\bar{x}_s(k^0)$, так как $\bar{x}_s(k^0)\in S_{1,k^0-1}(\bar{x}^0(k^0-1))$.

Обозначим через $\bar{z}^s(n)$ векторы $\bar{z}(n)$, получаемые в результате решения системы /12/ при $k=k^0$, $\bar{u}^*_{k^0}=\bar{u}^s_{k^0}\in U_{k^0}$.

Легко заметить, что

$$\bar{c}\bar{z}^s(N)=\varepsilon_s\bar{\varphi}(k^0)\cdot\bar{e}^0+o(\varepsilon_s), \text{ причем } \bar{\varphi}(k^0)\cdot\bar{e}^0>0.$$

Следовательно, найдется такое $s^0 \gg 1$, что для $s \gg s^0$ будет иметь место неравенство

$$\bar{c}\bar{z}^s(N) > 0,$$

чего не может быть, так как при оптимальном управлении справедливо /10/, каково бы ни было $\bar{u}^*_{k^0} \in U_k$. Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Следствие 1. /принцип локального максимума/. Если выполняются условия теоремы 3, то тогда для любого $n \in \{1,\dots,N\}$ точка $\bar{x}^0(n) \in S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))$ является либо изолированной точкой, либо не внутренней точкой сгущения элементов множества $S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))$.

В последнем случае найдется такое достаточно большое $\varepsilon > 0$, что

$$\bar{\varphi}(n)\bar{x}^0(n) = H^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}^0(n)) = \max_{\bar{u}\in U_n(S^\varepsilon(\bar{x}^0(n-1),\bar{x}^0(n)))} H^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}), \qquad /28/$$

где

$$S^\varepsilon(\bar{x}^0(n-1),\bar{x}^0(n)) = S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1)) \cap$$
$$\cap [K_\varepsilon(\bar{x}^0(n),S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))) \cup K(\bar{x}^0(n),S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1)))] \qquad /29/$$

причем множество $U_n(S^\varepsilon)$ не является конечным.

Следствие 2. Если множества $S_{1,n-1}(\bar{x})$ при $\bar{x} \in S_{n-1,0}(\bar{x}_0)$ суть замкнутые связные множества с гладкой границей и существуют матрицы $F^n_{\bar{x}}(\bar{x},\bar{u})$ для $(\bar{x},\bar{u}) \in S_{n-1,0}(\bar{x}_0) \times U_n$, то для того, чтобы управление $\bar{u}^0_1,\dots,\bar{u}^0(N)$ было оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

1/ $\bar{x}^0(n)$ лежит на границе $S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))$;

2/ $P(\bar{x}^0(n),S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))) = K^0(\bar{x}^0(n),\bar{\varphi}(n))$;

3/ $K(\bar{x}^0(n),S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))) = K^0(\bar{x}^0(n),\bar{\varphi}(n)) \cup K^-(\bar{x}^0(n),\bar{\varphi}(n))$;

4/ $K_\varepsilon(\bar{x}^0(n),S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))) \cap K^+(\bar{x}^0(n),\bar{\varphi}(n)) = \phi$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Замечание. Из следствия 1 вытекает, что если множество $S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1))$ выпукло, то

$$H^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}^0(n)) = \max_{\bar{u}\in U_n} H^n(\bar{x}^0(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}), \qquad /30/$$

так как в данном случае

$$S^\varepsilon(\bar{x}^0(n-1),\bar{x}^0(n)) = S_{1,n-1}(\bar{x}^0(n-1)), \qquad /31/$$

каковы бы ни были $\bar{x}^0(n)$ и $\varepsilon > 0$.

## 3°. Случай однородных разностных уравнений. Условия оптимальности. Связь дискретного принципа максимума с принципом оптимальности Р.Беллмана

Предположим, что в случае процесса /1°/ вектор-функции $\bar{f}^n(\bar{x},\bar{u})$

являются однородными вектор-функциями относительно $\bar{x}$, т.е. справедливо тождество

$$\bar{f}^{n}(\theta\bar{x},\bar{u}) \equiv \theta^{\alpha_n}\bar{f}^{n}(\bar{x},\bar{u}). \qquad /32/$$

Докажем, что каково бы ни было допустимое управление $\bar{u}(1), \dots, \bar{u}(N)$, справедливо тождество

$$H^{n}(\bar{x}(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}(n)) \equiv \alpha_{n+1}H^{n+1}(\bar{x}(n),\bar{\varphi}(n+1),\bar{u}(n+1)). \qquad /33/$$

Действительно, из /32/ следует, что

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_s^{n+1}(\bar{x},\bar{u})}{\partial x_i}x_i \equiv \alpha_{n+1}f_s^{n+1}(\bar{x},\bar{u})\ (s=1,\dots,m), \qquad /34/$$

что эквивалентно векторному тождеству

$$F_x^{n+1}(\bar{x},\bar{u})\bar{x} \equiv \alpha_{n+1}\bar{f}^{n+1}(\bar{x},\bar{u}). \qquad /34'/$$

Так как

$$H^{n}(\bar{x}(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}(n)) = \bar{\varphi}(n)\cdot\bar{f}^{n}(\bar{x}(n-1),\bar{u}(n)) = \bar{\varphi}(n)\cdot\bar{x}(n) =$$
$$= [F_x^{n+1}(\bar{x}(n),\bar{u}(n+1))]^{*}\varphi(n+1)\cdot\bar{x}(n) =$$
$$= \bar{\varphi}(n+1)\cdot F_x^{n+1}(\bar{x}(n),\bar{u}(n+1))\bar{x}(n), \qquad /35/$$

то, учитывая /34'/, получим

$$H^{n}(\bar{x}(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}(n)) = \bar{\varphi}(n+1)\cdot\alpha_{n+1}\bar{f}^{n+1}(\bar{x}(n),\bar{u}(n+1)) =$$
$$= \alpha_{n+1}H^{n+1}(\bar{x}(n),\bar{\varphi}(n+1),\bar{u}(n+1))$$

что и требовалось доказать.

Учитывая рекуррентное соотношение /33/, получаем

$$H^{n}(\bar{x}(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}(n)) \equiv \left(\prod_{j=n+1}^{N}\alpha_j\right)\cdot(\bar{c}\cdot x(N)). \qquad /36/$$

Очевидно, что если $\alpha_{n_0} = 0$, то

$$H^{n}(\bar{x}(n-1),\bar{\varphi}(n),\bar{u}(n)) \equiv 0 \quad \text{для } n \le n_0-1,$$

откуда следует, что невозможно извлечь никакой информации об оптимальном управлении в результате изучения $H^{n}(\dots)$ для $n < n_0$. Но оказывается, что этого и не нужно делать. Действительно, из /17/ и /18/ следует, что

$$H^{n} = \bar{\varphi}(n)\cdot\bar{x}(n),$$

причем

$$\bar{\varphi}(n) = \bar{\varphi}_n(\bar{x}(n),\bar{u}(n+1),\dots,\bar{u}(N)),$$

$$\bar{\varphi}_n(\bar{x}(n),\bar{u}(n+1),\dots,\bar{u}(N)) = [F_x^{n+1}(\bar{x}(n),\bar{u}(n+1))]^{*}\times$$
$$\times\bar{\varphi}_{n+1}(\bar{f}^{n+1}(\bar{x}(n),\bar{u}(n+1)),\bar{u}(n+2),\dots,\bar{u}(N)).$$

Обозначим:

$$V_s(\bar{x}) = \max_{\bar{u}(N-s+\nu)\in U_{N-s+\nu}}\frac{\bar{x}\,\bar{\varphi}_{N-s}(\bar{x},\bar{u}(N-s+1),\dots,\bar{u}(N))}{\prod_{j=N-s+1}^{N}\alpha_j} \equiv$$
$$\equiv R_s(\bar{x})\quad (s=1,\dots,N-n_0),$$

$$\bar{\chi}_s(\bar{x}) = \bar{\varphi}_{N-s}(\bar{x}, \bar{u}_1^{(s)}(\bar{x}), \ldots, \bar{u}_s^{(s)}(\bar{x})),$$

$$\bar{\chi}_0 \equiv \bar{C}.$$

Тогда очевидно, что для того, чтобы решение $\bar{x}^\circ(1), \ldots, \bar{x}^\circ(N)$ и управление $\bar{u}^\circ(1), \ldots, \bar{u}^\circ(N)$ были оптимальны, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

I/ $$V_s(\bar{x}^\circ(N-s)) = \max_{\bar{u} \in U_{N-s+1}} \frac{\bar{x}^\circ(N-s)\{[F_x^{N-s+1}(\bar{x}^\circ(N-s), \bar{u})]^* \bar{\chi}_{s-1}(\bar{f}^{N-s+1}(\bar{x}^\circ(N-s), \bar{u}))\}}{\prod\limits_{j=N-s+1} \alpha_j} =$$

$$= \{\bar{x}^\circ(N-s) \cdot [F_x^{N-s+1}(\bar{x}^\circ(N-s), \bar{u}^\circ(N-s+1))]^* \bar{\chi}_{s-1}(\bar{f}^{N-s+1}(\bar{x}^\circ(N-s), \bar{u}^\circ(N-s+1)))\} \Big/ \prod_{j=N-s+1}^{N} \alpha_j \quad (s = 1, \ldots, N-n_0);$$

2/ $$V_s(\bar{x}^\circ(N-s)) = \max_{\bar{x} \in S_{N-s,0}(\bar{x}_0)} V_s(\bar{x}) \quad (s = 1, \ldots, N-n_0).$$

Если не учитывать условие 2/, то мы будем иметь лишь необходимые условия оптимальности. Совместная формулировка условий I/ и 2/ совпадает с условиями оптимальности динамического программирования.

Поступила в редакцию I.I2.I970 г.

Л и т е р а т у р а


I. Фан Лянь-Цень, Ван Чу-сен, Дискретный принцип максимума. Изд., "Мир", М.,1967.

2. Л.И.Розоноэр,Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем, Ш, Автоматика и телемеханика, 20,№ 12, 1959.

3. Р.Габасов, Ф.М.Кириллова, К вопросу о распространении принципа максимума Л.С.Понтрягина на дискретные системы, Автоматика и телемеханика, № II, 1966.

4. А.И.Пропой, О принципе максимума для дискретных систем управления, Автоматика и телемеханика, № 7, 1965.

5. А.Г.Бутковский, О необходимых и достаточных условиях оптимальности для импульсных систем управления, Автоматика и телемеханика, № 8, 1963.

6. S.S.L.,Chang. Optimization of Nonlinear Control Systems by means of Digitized Maximum Principle, IRE Internat.Convention Record,part.4,N.Y,1961.

7. В.В.Леонов. Задача динамического программирования для одномерных многошаговых процессов, Проблемы кибернетики, вып.17; "Наука" М., 1966.