Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 7.
УДК.519.95.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДОПУСТИМЫХ ДВИЖЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА СКОРОСТЬ МОЖЕТ ОБРАЩАТЬСЯ В НУЛЬ

В.Н.Лагунов

В работах [1], [2] вводятся способами, несколько отличающимися друг от друга, классы допустимых движений $\{W_i\}$. Одним из условий корректности упомянутых определений классов $\{W_i\}$ является следующее: скорость i -го объекта не должна обращаться в нуль. В предлагаемой заметке показано, каким образом можно освободиться от вышеупомянутого условия /если, конечно, оно не входит по существу в число требований решаемой задачи/.

Определение класса допустимых движений в данной заметке несколько отличается от определений аналогичных классов в [1], [2]. Класс допустимых движений условимся обозначать символом

$$\{W_i, \varphi_i\}, \ i=1,2, \qquad /1/$$

где $i=1$ соответствует классу допустимых движений преследующего объекта, а $i=2$ - классу допустимых движений убегающего объекта.

Пусть W_i - замкнутое выпуклое ограниченное тело, перемещающееся в n -мерном евклидовом пространстве E^n как жесткое тело способом, описываемом ниже. Пусть W_i' -некоторое фиксированное положение вышеупомянутого тела в E^n относительно введенной в E^n координатной системы. Тогда существует такая прямая L'_i, что группа ортогональных преобразований E^n, оставляющих неподвижными точки L'_i, переводит W_i' в себя. Предполагается далее, что существует точка тела W_i', не принадлежащая прямой L'_i. Кроме того, предполагается, что L'_i - ориентированная прямая. Длину отрезка $W_i' \cap L'_i$, ориентированного так же, как и прямая L'_i, обозначим через $h_i \ (h_i \geqslant 0)$. Пусть V_i' - конец отрезка $W_i' \cap L'_i$. Тело W_i' с отмеченной на нем точкой V_i' назовем ориентированным телом. Будем считать, чтобы не вводить лишних обозначений, что тело W_i - ориентированное и что V_i - отмеченная на нем точка.

Пусть $\varphi_i(v)$ -вещественная неотрицательная непрерывная слева функция скалярного неотрицательного аргумента, удовлетворяющая соотношениям

$$0<\varphi_i(0)<h_i; \ 0<\varphi_i(v)\leqslant h_i, 0\leqslant v<v_{i0}; \varphi_i(v_{i0})=0 \ \text{ при } h_i>0, \qquad /2/$$

$$\varphi_i \equiv 0 \ \text{ при } h_i=0. \qquad /3/$$

Предполагается, что i -му объекту поставлена в соответствие пара: W_i, φ_i.

Положение тела W_i в момент t' для случая

$$\dot{r}_i(t')\neq 0, \ |\dot{r}_i(t')|\in[0, v_{i0}], \qquad /4/$$

где $\dot{r}_i(t)$ - вектор-скорость i -го объекта $/r_i(t)$ -его радиус--вектор/ определяется следующим образом:во-первых, прямая L_i проходит через начало O координатной системы и имеет направление вектора $\dot{r}_i(t')$, во-вторых, направление вектора $\overline{OV_i}$ совпадает с направлением прямой L_i , а длина его равна $\varphi(|\dot{r}_i(t')|)$, т.е. выполняется соотношение:

$$\overline{OV_i} = \varphi_i(|\dot{r}_i(t')|)\frac{\dot{r}_i(t')}{|\dot{r}_i(t')|}, \quad \dot{r}_i(t')\neq 0. \qquad /5/$$

Заметим, что при выполнении соотношения /3/ тело W_i вырождается в $(n-1)$ -мерный круг, ортогональный прямой L_i , причем центр упомянутого круга, в силу /5/,/3/, совпадает с началом координат O ; скорость в случае /3/, как будет следовать из определения класса /I/, отлична от нуля.

Пусть теперь

$$\dot{r}_i(t'')=0, \qquad /6/$$

причем случай, когда равенство вида /6/ выполняется на некотором отрезке $t_0\leq t\leq t''$, не исключается. Тогда положение тела W_i на некотором отрезке времени

$$t''\leq t\leq t''+\nu\ ,\ \nu\in(0,\nu_i), \qquad /7/$$

где ν_i определяется ниже, задается так же, как и в случае /4/ с единственным отличием: направление прямой L_i на отрезке времени/7/ не меняется и выбирается i -м игроком. Величина ν в /7/ находится также в распоряжении i -го игрока.

Из определения класса /I/, которое мы сейчас завершим, будет видно, что правило для определения положения тела в случае /6/ не противоречит правилу,сформулированному для случая /4/.

В тех случаях, когда речь будет идти о теле W_i , положение которого в пространстве E^n задано в соответствии с вышесформулированными правилами, тело W_i мы будем обозначать следующим образом

$$W_i(\dot{r}_i(t),\varphi_i(|\dot{r}_i(t)|)), \qquad /8/$$

подчеркивая зависимость положения тела от $\dot{r}_i,\ \varphi_i\ ,\ t$.

Легко видеть, что в случае /2/ соотношения:

$$\varphi_i(v)\to 0,$$
$$v\to v_{i0}\quad (v<v_{i0}),$$

эквивалентны. Отсюда вытекает, что для достаточно малого $\omega>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из неравенства

$$v<v_{i0}-\delta=v_{i\delta}, \qquad /9/$$

следует:

$$\varphi_i(v)>\omega. \qquad /10/$$

Обозначим через g_i радиус наибольшего шара с центром в начале координат, вписанного в тело W_i при $t=t''$ /см./6//. В силу свойств тела и соотношения /2/, $g_i>0$, причем g_i не зависит от выбора направления прямой L_i в момент t'', которое мы обозначим через L_i''.

Скажем, что движение i -го объекта принадлежит классу /I/, если это движение описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{r}_i(t)=u_i(t), t\geq 0, \; r_i(0)=r_i^0, \; \dot{r}_i(0)=\dot{r}_i^0, \; |\dot{r}_i^0|\leq v_{i0}, \qquad /11/$$

где $u_i(t)$ -управление, являющееся измеримой вектор-функцией для моментов t, не принадлежащих отрезкам времени типа /7/, и $u_i(t)$ удовлетворяет соотношению /см. /9/, /10/ /:

$$u_i(t)=u_i^0=const, |u_i^0|=\frac{1}{2}min(\omega, g_i), \; t\in[t'', t''+\nu], \qquad /12/$$

$$\nu\in(0,\nu_i), \; \nu_i=\frac{V_i\delta}{|u_i^0|},$$

где направление вектора u_i^0 совпадает с направлением L_i''. Кроме того, конец радиус-вектора $u_i(t)$ должен все время принадлежать множеству /8/:

$$u_i(t)\in W_i(\dot{r}_i(t), \varphi_i(|\dot{r}_i(t)|)), \; t\geqslant 0. \qquad /13/$$

Предполагается далее, что в случае /3/ вектор $\dot{r}_i^0$ в /11/ не есть нуль-вектор.

Вектор-функция $u_i(t)$, фигурирующая в сформулированном выше определении класса /I/ и называемая допустимым управлением, является, очевидно, суммируемой на любом конечном отрезке времени $0\leq t\leq \tau$. Но тогда в соответствии с /11/ однозначно определена и функция

$$r_i(\tau)=\int_0^\tau\left[\int_0^\theta u_i(t)dt+\dot{r}_i^0\right]d\theta+r_i^0, \; \theta\in[0,\tau], \; \tau\geqslant 0, \qquad /14/$$

которую мы назовем допустимой траекторией i -го объекта, соответствующей допустимому управлению $u_i(t)$. Движение i -го объекта по допустимой траектории в соответствии с /14/ назовем допустимым движением.

Заметим, что ввиду произвольной малости ν в /12/ и ограниченности $|u_i^0|$ норма скорости $|\dot{r}_i(t''+\nu)|$ может быть сделана сколь угодно малой. В частности, эта норма может быть сделана меньше констант, ограничивающих снизу норму скорости в работах [1], [2]. Таким образом, на участке траектории, где движение происходит со скоростью, норма которой не меньше вышеупомянутых констант, критерий принадлежности движения допустимому классу, данный в предлагаемой заметке, совпадает с аналогичными критериями работ [1], [2] в том смысле, что допустимое управление, соответствующее указанному участку траектории, будучи измеримой функцией, должно удовлетворять условию типа /13/.

Отметим в заключение, что зависимость множества /8/ от $\dot{r}_i$ и t такова, что требование полунепрерывности сверху относительно включения по фазовой координате и времени для тела /8/, вообще говоря, не выполняется /ср. [3], стр. 25/.

Поступила в редакцию 18.II.1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. В.Н.Лагунов, Об управлении преследуемого объекта, Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, 13.

2. В.Н.Лагунов, Игра преследования при наличии трения, Управляемые системы, Новосибирск, 1968, 1.

3. А.Ф.Филиппов, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, Вестник МГУ, серия матем., 1959, № 2.