Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 6.
УДК.512.25

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ШКАЛ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ТИПА РАЗМЕЩЕНИЯ,УНИФИКАЦИИ И СТАНДАРТИЗАЦИИ

Э.Х.Гимади(Гимадутдинов) /Новосибирск/

Задачи типа размещения, унификации и стандартизации,а также методы их решения все время привлекают к себе большое внимание [1] - [7][12].Сюда следует отнести задачи выбора оптимальных типоразмеров, рядов или шкал различных технических устройств [8] .

В данной статье /§1/ формулируются три задачи выбора оптимальных шкал /типа обобщенной задачи унификации/, причем в отличие от предыдущей работы автора [7] множества значений параметров U и точек их применения X могут не совпадать. Для рассматриваемых задач в случае произвольных функций платы $g^*(u)$ и цены $g(u,x)$ в настоящее время не известно эффективных методов решения, сравнимых по трудоемкости с методом динамического программирования /ДП/. Так,например, в работе [5] для решения обобщенной задачи унификации предлагается метод ветвей и границ, при котором, как известно [9] ,вычислительные трудности растут экспоненциально с ростом размерности задачи.

В § 2 настоящей статьи показывается, что задачи выбора оптимальных шкал при условии существования в оптимальном решении совокупности связаных областей применения $Z(u'',X)$ сводятся к соответствующим σ-задачам, для которых применим метод ДП. Как и в случае [7] , достаточным условием сведения к σ - задаче выбора оптимальной шкалы является свойство связности функции $g(u,x)$.

Далее рассматривается одна из поставленных задач - задача выбора $\tilde N$ - оптимальной шкалы. В § 3 строится эффективный алгоритм C решения этой задачи с количеством операций $\sim 0,5\,M^2$ и памятью M / M - мощность ε - сети/. В следующем параграфе действие алгоритма C иллюстрируется на численном примере, данные для которого взяты из работы [5] . В § 5 производится сравнение алгоритма C с алгоритмом A [11] , применимым в случае выполнения условия Глебова [10] . При этом, кроме того, оказывается возможным сокращение трудоемкости алгоритма C /согласно теореме 2/.

I. Предварительные замечания и постановка задачи

Пусть имеется некоторое замкнутое множество X , принадлежащее одномерному евклидову пространству E_1 . На X задана неотрицательная весовая функция $\varphi(x)$ - функция потребности /спроса/, либо неубывающая функция

$$F(x)=\int\limits_{\Omega_x(X)}\varphi(x')dx'$$

- интегральная функция потребностей, где

$$\Omega_x(X)=\{x'\in X/x'\leq x\in X\}.$$

Потребности $\{\varphi(x)\}$ удовлетворяются с помощью изделий со значениями параметров из некоторого ограниченного множества $U\subseteq E_1$. Для параметра $u\in U$ считается известной неотрицательная функция $g^o(u)$ - плата за участие изделия со значением параметра u в системе удовлетворения потребностей $\{\varphi(x)\}$.

На прямом произведении $U\times X$ задана вещественная ограниченная снизу функция $g(u,x)$ - цена использования изделия с параметром u для удовлетворения единичной потребности в точке $x\in X$. Считаем, что для любой пары $u_1,u_2\in U$ $g(u_1,x)\not\equiv g(u_2,x)$.

На X для набора параметров

$$u^N=(u_1,\dots,u_N)\in U^N$$

определим функцию $G(u^N,x)$ -миноранту семейства функций $\{g(u_i,x),\ u_i\in u^N\}$. Другими словами, $G(u^N,x)$ есть наименьшая цена удовлетворения единичной потребности в точке $x\in X$ при фиксированном наборе u^N. Назовем N -допустимым набор u^N, для которого суммарная цена

$$S(u^N,X)=\sum_{u_i\in u^N}g^o(u_i)+\int\limits_X G(u^N,x)dF(x) \qquad /1/$$

на систему удовлетворения потребностей $\{\varphi(x)\}$ конечна. Через $U_N\subseteq U^N$ обозначим множество N -допустимых наборов параметров. В дальнейшем мы будем предполагать, что в множестве $\{S(u^N,X)/u^N\in U_N\}$ всегда найдется минимальный элемент.

При фиксированном наборе $u^N\in U_N$ произведем покрытие множества X совокупностью взаимно-непересекающихся подмножеств

$$Z(u^N,X)=\{Z_{u_i}(u^N,X),\ u_i\in U_N\}$$

таким образом, что

$$Z_{u_i}(u^N,X)\subseteq B_{u_i}(u^N,X),\ i=\overline{1,N},$$

где

$$B_{u_i}(u^N,x)=\{x\in X/g(u_i,x)=G(u^N,x)\}.$$

По определению,

$$\bigcup_{u_i\in u^N}Z_{u_i}(u^N,X)=X.$$

Множество $Z_{u_i}(u^N,X)$ назовем областью применения параметра u_i в множестве X при выбранном наборе $u^N\in U_N$.

Теперь, очевидно, функция /1/ может быть записана в виде

$$S(u^N,X)=\sum_{i=1}^{N}\Big[g^o(u_i)+\int\limits_{Z_{u_i}(u^N,X)}g(u_i,x)dF(x)\Big]. \qquad /2/$$

Пару $\{u^N, Z(u^N, X)\}$, где $u^N \in U_N$, назовем N -допустимой шкалой.

Для целевой функции вида /1/ или /2/ сформулируем теперь следующие задачи выбора оптимальных шкал:

Задача 1. Выбор N-оптимальной шкалы	Задача 2. Выбор N^K-оптимальной шкалы	Задача 3. Выбор $\tilde{N}$ -оптимальной шкалы
$S(u^N, X) \to min$; $u^N \in U_N$; N -фиксировано, >0	$S(u^N, X) \to min$; $u^N \in U_N$; $N \leq K$; K -целое положительное число.	$S(u^N, X) \to min$; $u^N \in U_N$; $N > 0$.

Набор параметров, при котором имеет место решение задачи 1, будем называть N -оптимальным набором, а значение оптимума целевой функции обозначим через

$$S_N(X) = \min_{u^N \in U_N} S(u^N, X). \qquad /3/\text{-1}$$

Соответствующие наборы параметров в задачах 2 и 3 будем называть N^K- и $\tilde{N}$ - оптимальными, а значения оптимумов целевой функции обозначим через $S^K(X)$ и $\tilde{S}(X)$:

$$S^K(X) = \min_{0 < N \leq K} S_N(X), \qquad /3/\text{-2}$$

$$\tilde{S}(X) = \min_{N > 0} S_N(X). \qquad /3/\text{-3}$$

2. Условия сведения задачи выбора оптимальной шкалы к задаче ДП и свойство связности функции $g(u, x)$.

Без ограничения общности далее будем считать, что множество X связно. В противном случае мы могли бы взять в качестве множества X отрезок $[a, b]$, где a и b - соответственно минимальная и максимальная точки множества X, и положить весовую функцию $\varphi(x) = 0$ при $x \in [a,b] \setminus X$.

Лемма 1. Если существует N -оптимальная шкала с совокупностью связных областей применения $\{Z_{u_i}(u^N, X), u_i \in u^N\}$, то оптимальное решение может быть получено также из следующей задачи, которую далее мы будем называть задачей $1^{б}$:

$$S_N(a, b) = \min_{x^N} \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}, x_i), \qquad /4/$$

где $$x^N=(x_1,\dots,x_N),\ a=x_0\le x_1\le\dots\le x_{N-1}\le x_N=b,$$
$$f(x,y)=\min_{u\in U}\Phi(u,x,y)=\Phi(u_{xy},x,y),$$
$$\Phi(u,x,y)=g^0(u)+\int\limits_x^y g(u,x)dF(x).$$

Доказательство. Упорядочим параметры $u_i,\ i=\overline{1,N}$, согласно возрастанию величины $x_i^N=\sup Z_{u_i}(u^N,X),\ i=\overline{1,N}$.

Так как $Z_{u_i}(u^N,X)$ связны и взаимно не пересекаются, то не пересекаются также интервалы $(x_{i-1}^N,x_i^N),\ i=\overline{1,N},\ x_0^N=a,\ x_N^N=b$. Очевидно,

$$S_N(X)=\sum_{i=1}^N\Big[g^0(u_i)+\int\limits_{Z_{u_i}(u^N,X)}g(u_i,x)dF(x)\Big]=\sum_{i=1}^N\Big[g^0(u_i)+$$
$$+\int\limits_{x_{i-1}^N}^{x_i^N}g(u_i,x)dF(x)\Big]=\sum_{i=1}^N\Phi(u_i,x_{i-1}^N,x_i^N)\geqslant\sum_{i=1}^N f(x_{i-1}^*,x_i^*)=\sum_{i=1}^N\Phi(v_i,x_{i-1}^*,x_i^*)=S_N(a,b),$$

где $x^{*N}=(x_1^*,\dots,x_N^*)$ – решение задачи 1^σ; $v_i=u_{x_{i-1}^*x_i^*},\ i=\overline{1,N}$.

Отсюда следует

$$S_N(X)\geqslant S_N(a,b)=\sum_{i=1}^N\Big[g^0(v_i)+\int\limits_{x_{i-1}^*}^{x_i^*}g(v_i,x)dF(x)\Big]\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{i=1}^N g^0(v_i)+\int\limits_X G(v^N,x)dF(x)\geqslant S_N(X),$$

откуда $S_N(X)=S_N(a,b)$. Лемма доказана.

Следствие I. Если выполняются условия леммы I, а значения функций $F(x),g(u,x)$ определены в узлах ε – сети, заданной на отрезке $[a,b]$, то N -оптимальная шкала может быть найдена методом ДП.

Действительно, для задачи I^σ справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$s_n(a,y)=\min_{a\le x\le y}[s_{n-1}(a,x)+f(x,y)] \text{ для } y\in[a,b],\ n=\overline{1,N}, \qquad /5/$$

причем $s_0(a,y)=0$ при $y\in[a,b]$.

Последовательно вычисляя таблицы $\{s_n(a,y),\ y\in[a,b]\}$ для $n=1,2,\dots,N$, мы получаем решение задачи I^σ и, следовательно, решение исходной задачи I.

В дальнейшем задачу I при условии существования в оптимальном решении совокупности связных областей применения будем называть σ – задачей выбора N – оптимальной шкалы. Аналогично определяем σ -задачи выбора N^K и $\tilde N$ -оптимальных шкал.

Определение I. Функция $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности, если для произвольной пары $u_1,u_2\in U$ разностная функция $(g(u_2,x)-g(u_1,x))$ меняет знак при монотонном изменении $x\in X$ не больше одного раза.

Определение 2. Если функция $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности и для пары $u_1,u_2\in U$ найдется такая точка $x^0>a$, что выполняются условия

$$E(u_1,u_2,x^0):\begin{cases} g(u_1,x^0)<g(u_2,x^0), \\ g(u_1,x)\leq g(u_2,x) \quad \text{при } x<x^0, \end{cases}$$

то параметр u_1 предшествует параметру u_2 $(u_1<u_2)$.

В силу того, что множество U состоит из параметров, у которых функции $g(u,x)$ попарно тождественно не совпадают, то рассматриваемое отношение может быть установлено для любой пары параметров из множества U, а отношение $u_1<u_2$ исключает обратное отношение $u_2<u_1$.

Следствие 2. Если функция $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности и $u_1<u_2$, то существует такая точка $x^*\leq b$, что

$$\left.\begin{aligned} g(u_1,x)&\leq g(u_2,x) \quad \text{при } x\leq x^*, \\ g(u_1,x)&\geq g(u_2,x) \quad \text{при } x>x^*, \end{aligned}\right\} \qquad /6/$$

причем найдется такая точка $x^0\leq b$, в которой $g(u_1,x^0)<g(u_2,x^0)$. При $x^*=b$ имеет место только первое из двух неравенств /6/.

Следствие 3. Если $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности и $u_1<u_2$, то

$$g(u_1,x)\leq g(u_2,x) \quad \text{при } x<\sup\{x\in X/g(u_1,x)<g(u_2,x)\}.$$

Следствие 4. Если $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности, $u_1<u_2$ и в некоторой точке x^* $g(u_1,x^*)>g(u_2,x^*)$, то

$$g(u_1,x)\geq g(u_2,x) \quad \text{при } x\geq x^*.$$

Лемма I. Если функция $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности, то из отношений $u_1<u_2$, $u_2<u_3$ следует $u_1<u_3$.

Доказательство. Так как $u_1<u_2$ и $u_2<u_3$, то согласно определению 2 найдутся точки $x_{12}^0>a$, $x_{23}^0>a$, в которых выполняются условия:

$$\left.\begin{aligned} &E(u_1,u_2,x_{12}^0), \\ &E(u_2,u_3,x_{23}^0). \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

Отсюда при $x_{12}^0\leq x_{23}^0$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} &g(u_1,x_{12}^0)\leq g(u_2,x_{12}^0)\leq g(u_3,x_{12}^0), \\ &g(u_1,x)\leq g(u_2,x)\leq g(u_3,x) \quad \text{при } x\leq x_{12}^0, \end{aligned}\right\} \qquad /8/$$

соответственно при $x_{23}^0\leq x_{12}^0$:

$$\left.\begin{aligned} &g(u_1,x_{23}^0)<g(u_2,x_{23}^0)\leq g(u_3,x_{23}^0), \\ &g(u_1,x)\leq g(u_2,x)\leq g(u_3,x) \quad \text{при } x\leq x_{23}^0. \end{aligned}\right\} \qquad /9/$$

Обозначив $x^0=\min(x_{12}^0,x_{23}^0)$, из /8/ и /9/ получим условие $E(u_1,u_3,x^0)$, что и доказывает теорему.

Из определения 2 и леммы 2 следует, что если функция $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности, то любое конечное подмножество параметров из U может быть линейно упорядочено согласно отношению $\prec$. Что касается произвольного набора $u^n=(u_1,\dots,u_n)\in U_n$, то он может содержать одинаковые параметры. В этом случае параметры этого набора упорядочены согласно отношению порядка $\preccurlyeq$:

$$u_1 \preccurlyeq u_2 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq u_n, \qquad /10/$$

где $u'\preccurlyeq u''$ означает либо $u'=u''$, либо $u'\prec u''$.

Т е о р е м а 1. Если функция $g(u,x)$ удовлетворяет свойству связности, то для произвольного набора параметров $u^n=(u_1,\dots,u_n)\in U_n$ найдется совокупность $Z(u^n,X)$ связных областей применения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем набор u^n, упорядоченный согласно /10/. Вычислим последовательность значений $x_0,x_1,\dots,x_n$, $a=x_0\le x_1\le\dots\le x_n=b$, пользуясь рекуррентным соотношением:

$$x_{k-1}=\begin{cases} a, & \text{если } B_{u_k}(u^k,X_k)=X_k, \\ \sup\{x\in X_k / g(u_k,x)>G(u^k,x)\} & \text{в противном случае,}\end{cases} \qquad /11/$$

где $X_k=[a,x_k]$, $u^k=(u_1,\dots,u_k)$, $k=\overline{1,n}$.

Построим совокупность областей $\{R_k\in X/(x_{k-1},x_k)\subseteq R_k\subseteq[x_{k-1},x_k], k=\overline{1,n}\}$, где граничные точки x_k, $k=\overline{0,n}$, распределены по областям R_k, $k=\overline{1,n}$, согласно следующей последовательной процедуре. При этом условимся, что при включении точки x_k в одну из областей R_k, R_{k+1} отмечаются все точки x_i, значения которых совпадают с x_k.

На первом шаге процедуры точка x_k включается в область R_n, если $g(u_n,x_n)=G(u^n,x_n)$. Далее рассматриваем первую из неотмеченных точек x_{n-1}, x_{n-2} и т.д. Неотмеченную точку x_k при условии $g(u_k,x_k)=G(u^n,x_k)$ включаем в область R_k, а при $g(u_k,x_k)>G(u^n,x_k)$ и $g(u_{k+1},x_k)=G(u^n,x_k)$ - в область R_{k+1}. На последнем шаге точка $x_0=a$, если она не была отмечена ранее, включается в область R_1.

Согласно процедуре построения областей R_k, $k=\overline{1,n}$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\bigcup_{k=1}^{n} R_k = X=[a,b], \\ &R_i\cap R_k=\Lambda \quad \text{при } i\ne k.\end{aligned}\right\} \qquad /12/$$

Покажем, что

$$R_k\subseteq B_{u_k}(u^n,X). \qquad /13/$$

Из /11/ следует, что $G(u^k,x)=G(u^n,x)$ для всех $x<x_k$. Кроме того, если $x_{k-1}<x_k$, то $g(u^k,x)=G(u^n,x)$ при $x_{k-1}<x<x_k$. Если при этом учесть, что граничная точка x_k /или x_{k-1}/ могла быть включена в R_k при условии $g(u_k,x_k)=G(u^n,x_k)$ /соответственно при $g(u_k,x_{k-1})=G(u^n,x_{k-1})$/, получаем утверждение /13/.

Из /12/ и /13/ следует, что области R_k, $k=\overline{1,n}$, удовлетворяют определению областей применения, причем $R_k = Z_{u_k}(u^n, X)$, $k=\overline{1,n}$, а $Z(u^n, X)$ – совокупность связных областей. Доказательство теоремы окончено.

Из леммы I и теоремы I вытекает

Следствие 5. Свойство связности функции $g(u,X)$ является достаточным условием сведения задач I,2, и 3 к соответствующим σ -задачам выбора оптимальных шкал, решаемых методом ДП.

Будем называть N -оптимальным разбиением последовательность $X^N = (x_1, \dots, x_N)$, соответствующую граничным точкам связных областей применения N -оптимальной шкалы. При этом интервал (x_{i-1}, x_i), $i=\overline{1,N}$, принадлежит области применения параметра $u_i \in U^N$, $x_0 = a$, $x_N = b$.

3. Алгоритм решения σ -задачи выбора $\tilde{N}$ -оптимальной шкалы

Из вышесказанного следует, что σ -задача выбора $\tilde{N}$ -оптимальной шкалы сводится к отысканию $\tilde{N}$ -оптимального разбиения согласно следующим выражениям:

$$\tilde{S}(a,b) = \min_{N>0} S_N(a,b) = \min_{N>0} \min_{X^N} \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1}, x_i) = S_{\tilde{N}}(a,b) \qquad /14/$$

где $X^N = (x_1, \dots, x_N)$, $a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_N = b$;

$$f(x,y) = \min_{u \in U} \left[g^0(u) + \int_x^y g(u,x')dF(x') \right].$$

В силу неотрицательности функции платы $g^0(u)$ значение $f(x,x) > 0$ при $a \le x \le b$. Поэтому для получения оптимального решения достаточно рассматривать разбиения X^N с непустыми интервалами (x_{i-1}, x_i), $i=\overline{1,N}$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_N = b$.

Пусть функция $f(x,y)$ определяется на множестве узловых точек $\{z_k\}$ ε -сети на $[a,b]$, при этом $z_{k-1} < z_k$, $k=\overline{1,M}$; $z_0 = a$, $z_M = b$.

Согласно /14/ и следствию I $\tilde{N}$ -оптимальное разбиение может быть определено в результате последовательного вычисления M таблиц $\{S_N(a,y), y \in (a,b]\}$ с помощью рекуррентного соотношения /5/. Однако специфика задачи позволяет построить более эффективную вычислительную процедуру – алгоритм C.

Пусть для реализации алгоритма C затрачивается K_C операций типа вычисления функции $f(x,y)$, $a \le x \le y \le b$, Π_C – требуемая память. Через W_C обозначим трудоемкость алгоритма C, оцениваемую произведением $K_C \Pi_C$.

Можно показать справедливость рекуррентного соотношения:

$$\tilde{S}(a,y) = \min_{a \le x \le y} [\tilde{S}(a,x) + f(x,y)] \qquad /15/$$

для $y \in (a,b]$, причем $\tilde{S}(a,a) = 0$.

Пусть T_C – таблица значений оптимумов $\{\tilde{S}(a,z_k), k=\overline{1,M}\}$.

На 1 -м шаге алгоритма C полагаем $\tilde{S}(a,z_1) = f(a,z_1)$.

После заполнения таблицы T_c для $j<k\leqslant M$ на k -м шаге вычисляем следующее значение таблицы:

$$\tilde{s}(a,z_k)=\min_{0\leqslant j<k}\left[\tilde{s}(a,z_j)+f(z_j,z_k)\right]. \qquad /16/$$

На M -м шаге вычисляется величина оптимума $\tilde{s}$.

На построение таблицы T_c затрачивается количество операций $\sum_{k=1}^{M} k\simeq 0{,}5M^2$.

Восстановление оптимального разбиения осуществляем с помощью вычисленной таблицы T_c. Для этого на I-м шаге полагаем $x_{\tilde{N}}=b$. На 2-м шаге, пользуясь таблицей T_c, производим сравнение значения $\tilde{s}(a,x_{\tilde{N}})$ с выражением $\tilde{s}(a,z_k)+f(z_k,x_{\tilde{N}})$, начиная с $k=M-1$ и далее уменьшая k на I. В силу построения таблицы найдется значение $z_k=x_{\tilde{N}-1}$, при котором будем иметь равенство $\tilde{s}(a,x_{\tilde{N}})=\tilde{s}(a,x_{\tilde{N}-1})+f(x_{\tilde{N}-1},x_{\tilde{N}})$.

Определив точки x_j, $j=\overline{i,N}$, $i>0$, сравниваем значение $\tilde{s}(a,x_i)$ с выражением $\tilde{s}(a,z_k)+f(z_k,x_i)$ для $z_k<x_i$.

Восстановление $\tilde{N}$ -оптимального разбиения заканчивается, как только будет получена точка $x_0=a$. Одновременно с этим мы получаем оптимальное количество параметров $\tilde{N}$.

На восстановление разбиения $x^{\tilde{N}}$ затрачивается не более M операций. Таким образом, на решение σ -задачи выбора $\tilde{N}$ -оптимальной шкалы алгоритм C затрачивает количество операций K_c порядка $0{,}5M^2$ и память $\Pi_c=M$, трудоемкость $W_c\simeq 0{,}5M^3$.

З а м е ч а н и е. Задача 3 может иметь множество оптимальных наборов параметров, дающих оптимум при разном $\tilde{N}$. В этом случае имеет смысл дополнительно потребовать, чтобы был выбран оптимум с наименьшим числом параметров $\tilde{N}$. Для решения σ -задачи 3 в этом случае воспользуемся следующей модификацией алгоритма C. Вначале полагаем $\tilde{N}(a)=0$. На I-м шаге при вычислении значения $\tilde{s}(a,z_1)$ в таблице T_c запоминаем также величину $\tilde{N}(z_1)=1$. Далее при вычислении $\tilde{s}(a,z_k)$ по формуле /16/ среди всех $\{j\in[0,k)/\tilde{s}(a,z_k)=\tilde{s}(a,z_j)+f(z_j,z_k)\}$ выбираем номер ℓ_k с наименьшим значением $\tilde{N}(z_j)$. Полагаем $\tilde{N}(z_k)=\tilde{N}(z_{\ell_k})+1$. На последнем шаге построения таблицы T_c получим значение оптимума $\tilde{s}(a,b)$ и наименьшее число параметров $\tilde{N}=\tilde{N}(b)$.

При восстановлении $\tilde{N}$ -оптимального разбиения необходимо теперь последовательно решать функциональные уравнения для $x_i\in x^{\tilde{N}}$: $\tilde{s}(a,x_i)=\tilde{s}(a,z_j)+f(z_j,x_i)$ только для $\{j\in[0,k)/\tilde{N}(x_i)=\tilde{N}(z_j)+1\}$.

Количество операций при этом $K_c\simeq 0{,}5M^2$, память $\Pi_c=2M$.

З а м е ч а н и е. При решении σ -задачи 3 может оказаться более удобным использование рекуррентного соотношения вида:

$$\tilde{s}(z_k,b)=\min_{k<j\leqslant M}\left[f(z_k,z_j)+\tilde{s}(z_j,b)\right].$$

при $0 \leq k < M$, $\tilde{S}(b,b)=0$.

В этом случае применяем алгоритм C' -модификацию алгоритма C .

Пусть вычислены значения $\tilde{S}(z_j, b)$ таблицы $T_{C'}$, для $k<j\leq M$. Тогда следующее значение $\tilde{S}(z_k, b)$ вычисляем по формуле

$$\tilde{S}(z_k, b) = \min_{k<j\leq M} [f(z_k, z_j) + \tilde{S}(z_j, b)]. \qquad /17/$$

На последнем шаге вычисляем величину оптимума $\tilde{S}(a,b)$.

Число операций и память при этом остаются теми же, что и для алгоритма C .

4. Числовой пример σ -задачи 3.

Рассмотрим исходные данные обобщенной задачи унификации, решаемой в работе [5] методом ветвей и границ.

Имеется M видов деталей, $k=\overline{1,M}$. Потребность в числе деталей k -го сорта- φ_k . Деталь j -го сорта может быть заменена q_{kj} деталями сорта $k \geq j$. Платеж за налаживание производства деталей k -го сорта равен g_k^0 , а стоимость производства одной детали сорта k равна C_k .

Пусть $K^N=(k_1,\dots,k_N)$ - набор сортов производимых деталей. Обозначим через ν_{kj} -количество деталей k -го сорта, производимых для замены деталей с номером $j \leq k$.

Множества U и X здесь совпадают и равны отрезку натурального ряда $\{1,2,\dots,M\}$.

Задача заключается в отыскании такого набора сортов $k^{\tilde{N}}, 1\leq \tilde{N} \leq M$, и такой матрицы (ν_{kj}), $j \leq k \in k^{\tilde{N}}$, что затраты $\tilde{S}$ на покрытие всех потребностей $\{\varphi_k, k=\overline{1,M}\}$ были бы минимальны. В таблице I и 2 приведены исходные данные задачи, взятые из работы [5].

Т а б л и ц а I.

K	C_k	g_k^0	φ_k
I	I	4	60
2	2	5	I2
3	3	I0	I2
4	5	20	24
5	6	I5	I5
6	I0	I4	I0

Т а б л и ц а 2 (q_{kj})

	I	2	3	4	5	6
I	I					
2	1/10	I				
3	1/6	1/4	I			
4	1/5	1/3	1/6	I		
5	1/4	1/2	1/2	1/6	I	
6	1/3	1/2	1/3	1/3	1/5	I

Обозначим через g_{kj} стоимость производства деталей k -го сорта для замены одной детали j -го сорта:

$$g_{kj} = \begin{cases} C_k q_{kj} & \text{при } j \leq k, \\ g_\infty , & j > k, \end{cases}$$

где g_∞ -достаточно большое число.

Очевидно, для отыскания оптимума $\tilde{S}$ вместо таблиц $\{C_k\}$ и $\{q_{kj}\}$

достаточно иметь одну таблицу 3 значений g_{kj}. Из рассмотрения этой таблицы следует, что функция g_{kj} удовлетворяет свойству связности, т.е. для произвольной пары сортов $k_1, k_2 \in \overline{1,6}$ разность

$$\Delta(k_1, k_2, j) = g_{k_2 j} - g_{k_1 j}$$

меняет знак при монотонном изменении номера j не более одного раза. В этом случае рассматриваемая обобщенная задача унификации эквивалентна следующей σ -задаче 3 выбора $\widetilde{N}$ -оптимальной шкалы сортов:

$$\widetilde{S} = \min_{1 \leq \widetilde{N} \leq 6} S_N(0,6) = \widetilde{S}_{06}, \qquad /18/$$

где

$$S_N(0,6) = \min_{0 = \ell_0 \leq \ell_1 \leq \ldots \leq \ell_N = 6} \sum_{i=1}^{N} f_{\ell_{i-1}\ell_i}, \qquad /19/$$

$$f_{m\ell} = \min_{k \geq \ell} \left[g_k^0 + \sum_{j=m+1}^{\ell} g_{kj} \varphi_j \right]. \qquad /20/$$

Т а б л и ц а 3 (g_{kj}).

$k \backslash j$	I	2	3	4	5	6
I	I	g_∞	g_∞	g_∞	g_∞	g_∞
2	0,2	2	g_∞	g_∞	g_∞	g_∞
3	0,5	0,75	3	g_∞	g_∞	g_∞
4	I.0	$1\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	5	g_∞	g_∞
5	I.5	3	3	I	6	g_∞
6	$3\frac{1}{3}$	5	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	2	I0

Т а б л и ц а 4 $(f_{m\ell})$

$m \backslash \ell$	I	2	3	4	5	6
0	I7	4I	85	230	3II	524
I	-	I9	50	III	20I	324
2	-	-	30	75	I55	264
3	-	-	-	39	I24	224
4	-	-	-	-	44	I44
5	-	-	-	-	-	II4

Для решения задачи /18/ - /20/ применяем алгоритм согласно рекуррентному соотношению /17/, или в дискретном случае

$$S_{m6} = \min_{m < \ell \leq 6} \left[f_{m\ell} + \widetilde{S}_{\ell 6} \right].$$

Для наглядности в табл. 4 приведены значения $f_{m\ell}$, $m < \ell$, вычисленные согласно /20/, хотя для алгоритма C' хранить в памяти всю эту таблицу не требуется. Значение $\widetilde{S}_{66}$ полагаем равным нулю. Проведем вычисление таблицы $T_{C'} = \{\widetilde{S}_{m6}, m = \overline{0,5}\}$ по шагам:

I -й шаг. Вычисляем $\widetilde{S}_{5,6} = f_{5,6} = 114$.

2 -й шаг. $\widetilde{S}_{4,6} = \min\limits_{4<\ell\leq 6} (f_{4\ell} + \widetilde{S}_{\ell 6}) = \min(44+114, \underline{144+0}) = 144.$

3 -й шаг. $\widetilde{S}_{3,6} = \min\limits_{3<\ell\leq 6} (f_{3\ell} + \widetilde{S}_{\ell 6}) = \min(\underline{39+144}, 124+114, 224+0) = 183.$

4 -й шаг. $\widetilde{S}_{26} = \min\limits_{2<\ell\leq 6} (f_{2,\ell} + \widetilde{S}_{\ell 6}) = \min(\underline{30+183}, 75+144, 155+114, 264) = 213.$

5 -й шаг. $\widetilde{S}_{16} = \min\limits_{1<\ell\leq 6} (f_{1,\ell} + \widetilde{S}_{\ell 6}) = \min(\underline{19+213}, 50+183, 111+144, 201+114, 324) = 232.$

6 -й шаг. $\widetilde{S} = \min\limits_{0<\ell\leq 6} (f_{0,\ell} + \widetilde{S}_{\ell 6}) = \min(\underline{17+232}, 41+213, 85+183, 230+144, 425, 524) = 249.$

При отыскании значения оптимума $\tilde{S} = 249$ ж/. потребовалось $\frac{M(M+1)}{2} = 21$ вычислений функции $f_{m\ell}$. Теперь отыскиваем $\tilde{N}$ -оптимальный набор сортов $k^{\tilde{N}}$, для которого получен оптимум $\tilde{S}$.

На последнем 6 -м шаге вычисления таблицы $T_{C'}$ минимум получен при $\ell_1 = 1$. Следовательно, область применения $Z_{K_1}(k^{\tilde{N}}, X)$ состоит из деталей I -го сорта. Из выражения для f_{q_1} из /20/ находим, что для замены деталей I -го сорта производятся детали сорта $k_1 = 2$. Количество производимых деталей сорта $k_1 = 2$ для замены деталей сорта $\ell = 1$ равно $\nu_{21} = q_{21}\varphi_1 = 0,1 \cdot 60 = 6$.

Далее решаем функциональное уравнение $\tilde{S}_{16} = f_{1,\ell} + \tilde{S}_{\ell 6} = 232, 1 < \ell \leq 6$. Равенство имеет место уже при $\ell_2 = 2$. Из выражения /20/ для $f_{1,2}$ получим номер сорта $k_2 = 3$, производимый для замены только деталей сорта $\ell = 2$. При этом $\nu_{32} = q_{32} \cdot \varphi_2 = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$.

Аналогичным образом получаем остальные сорта $\tilde{N}$ -оптимального набора сортов деталей $k^5 = (2,3,4,5,6)$. При этом $\tilde{N} = 5$, $Z(k^5, X) = \{(1),(2),(3),(4),(5,6)\}$, $\nu_{21} = 6$, $\nu_{32} = 6$, $\nu_{43} = 2$, $\nu_{54} = 4$, $\nu_{65} = 3$, $\nu_{66} = 10$.

5. σ -задача 3 в случае выполнения условия Глебова [10] :

$$f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) - f(y_1, x_2) \geq 0 \qquad /Г/$$

для x_1, x_2, y_1, y_2, $a \leq x_1 \leq y_1 \leq y_2 \leq x_2 \leq b$.

При выполнении условия /Г/ для отыскания $\tilde{N}$ -оптимального разбиения может быть использован также алгоритм A [11]. Алгоритмы А и С эквивалентны по памяти: в обоих случаях затрачивается $\sim M$ ячеек. Основное отличие этих алгоритмов - в принципе построения и числе операций.

Сравним алгоритмы по отношению трудоемкостей:

$$\varkappa = \frac{W_A}{\gamma_{CA} \cdot W_C} = \frac{\tilde{N} M^2 (\log_2 M + 3,5)}{\gamma_{CA} \cdot M^3} = \frac{\tilde{N}}{\gamma_{CA} M} (\log_2 M + 3,5), \qquad /21/$$

где γ_{CA} -коэффициент сравнительной трудоемкости элементарных операций обоих алгоритмов. В силу достаточно большей конструктивной сложности алгоритма A коэффициент $\gamma_{CA} < 1$.

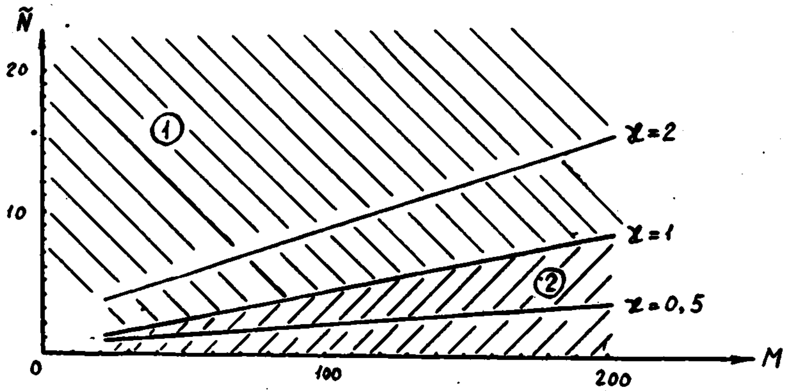
Из /21/ формально следует, что в случае выполнения условия /Г/ при оптимальном числе параметров

$$\tilde{N} < \tilde{N}^* = \frac{\gamma_{CA} M}{\log_2 M + 3,5} \qquad /21'/$$

выгоднее использовать алгоритм А, в противном случае предпочтителен алгоритм С.

На рисунке в соответствии с /21/ изображены зависимости значения $\tilde{N}$ как функции от M при $\gamma_{CA} = 0,5$ и $\varkappa = 2; 1; 0,5$:

ж/ В работе [5] при решении рассматриваемого примера ошибочно отсечена оптимальная ветвь и получено несколько большее значение минимума $\tilde{S} = 250$ для набора сортов /2,4,5,6/.



1. Область предпочтения алгоритма C .

2. Область предпочтения алгоритма A .

Условие /Г/ может быть использовано для сокращения числа операций, необходимых для решения σ -задачи 3 с помощью алгоритма C .

Пусть ℓ_k -номер узла ε -сети, при котором имеет место равенство

$$\tilde{\xi}(a,z_k)=\tilde{\xi}(a,z_{\ell_k})+f(z_{\ell_k},z_k). \qquad /22/$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию /Г/, то для известного номера ℓ_k существует такой номер ℓ_{k+1} функционального уравнения

$$\tilde{\xi}(a,z_{k+1})=\tilde{\xi}(a,z_j)+f(z_j,z_{k+1}),\ 0\leq j\leq k, \qquad /23/$$

что

$$\ell_{k+1}\geq\ell_k \qquad /24/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что значения номера ℓ_{k+1} , удовлетворяющего /24/, не существует. Тогда любой номер ℓ_{k+1} удовлетворяет соотношению

$$0\leq\ell_{k+1}<\ell_k<k. \qquad /25/$$

Из /23/ и /25/ следует, что

$$\tilde{\xi}(a,z_{k+1})=\tilde{\xi}(a,z_{\ell_{k+1}})+f(z_{\ell_{k+1}},z_{k+1})<\tilde{\xi}(a,z_{\ell_k})+f(z_{\ell_k},z_{k+1}) \qquad /26/$$

Отсюда с учетом /22/ имеем:

$$\tilde{\xi}(a,z_k)=\tilde{\xi}(a,z_{\ell_k})+f(z_{\ell_k},z_k)>\tilde{\xi}(a,z_{\ell_{k+1}})+f(z_{\ell_k},z_k)+f(z_{\ell_{k+1}},z_{k+1})-f(z_{\ell_k},z_{k+1}).$$

Используя условие /Г/, получаем неравенство

$$\tilde{\xi}(a,z_k)>\tilde{\xi}(a,z_{\ell_{k+1}})+f(z_{\ell_{k+1}},z_k),$$

что противоречит определению решения z_{ℓ_k} в /22/. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что в некоторых случаях можно существенно сократить количество операций при построении алгоритма C. Действительно, на k -м шаге алгоритма для вычисления значения $\tilde{\xi}(a,z_k)$ вместо формулы /16/ можно воспользоваться следующей

$$\tilde{S}(a,z_k) = \min_{\ell_{k-1} \leq j < k} \left[\hat{S}(a,z_j) + f(z_j, z_k)\right].$$

При этом дополнительно нужно помнить только значение ℓ_{k-1} от предыдущего $(k-1)$ -го шага. На k -м шаге количество операций сокращается на ℓ_{k-1} вычисление. Требуемое число операций на вычисление всей таблицы T_C в этом случае будет равно

$$K_C = \sum_{k=1}^{M} (k - \ell_k) < \frac{M^2}{2}.$$

Оценим эту величину с помощью последовательности номеров узловых точек $j_1, j_2, \ldots, j_{\tilde{N}}$, соответствующих $\tilde{N}$ -оптимальному разбиению. Согласно построению алгоритма C, $0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_{\tilde{N}} = M$. Кроме того, очевидно, $\ell_{j_i} = j_{i-1}$, $i = 1, \tilde{N}$. Так как для всех $k \in [j_{i-1}, j_i)$ согласно теореме 2, можно выбрать такие ℓ_k, что $\ell_k \geq \ell_{j_{i-1}} = j_{i-2}$, то справедливы преобразования

$$K_C < \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i} (k - j_{i-2}) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} (j_i - j_{i-1})\left[(j_i - j_{i-1}) + 2(j_{i-1} - j_{i-2})\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \delta_i(\delta_i + 2\delta_{i-1}),$$

где $\delta_i = j_i - j_{i-1}$.

Оценим K_C для случая, когда интервалы применения примерно одинаковы: $\delta_i \approx \frac{M}{\tilde{N}} = \delta$:

$$K_C \leq 0,5 \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \delta_i(\delta_i + 2\delta_{i-1}) \approx 1,5\,\tilde{N}\delta^2 = 1,5\,\frac{M^2}{\tilde{N}},$$

откуда при достаточно большом числе оптимальных параметров в среднем можно ожидать существенного выигрыша в количестве операций для алгоритма C /примерно в $\frac{\tilde{N}}{3}$ раз/.

В соответствии с этим несколько расширяется область предпочтения алгоритма C по сравнению с алгоритмом А. Вместо /21/ здесь будем иметь зависимость вида

$$\tilde{N}^* = \sqrt{\frac{2\gamma_{CA} M}{\log_2 M + 3,5}}.$$

В заключение считаю своим долгом выразить признательность В.Т. Деменьтьеву и Н.И.Глебову за внимание к данной работе.

Поступила в редакцию:
первоначальный вариант 20.5.1970г.
окончательный вариант 8.7.1970г.

Литература

1. В.Т.Поляк, Опыт решения задач размещения производства,Наука, М., 1964.

2. В.Т.Дементьев, Об одной задаче оптимального размещения точек

на отрезке, Дискретный анализ, Новосибирск, 1965, вып.4.

3. М.И.Тамм, О решении одной задачи оптимальной унификации математическими методами, Тезисы конференции по математическому оптимальному программированию, Новосибирск, 1965.

4.Young, A. Henry,On the optimum location of checking station, Oper.Res.,II,N5 /1963/.

5. С.И.Зуховицкий, Р.А.Поляк, М.Е.Примак, Об одном классе задач вогнутого программирования, Экономика и мат. методы, IУ, вып.3,1968.

6. М.И.Беркович, Задачи стандартизации и некоторые методы их решения, Экон. и мат. методы, У, вып.2, 1969.

7. Э.Х.Гимадутдинов, О свойствах решений одной задачи оптимального размещения точек на отрезке, Управляемые системы,Новосибирск, вып.2, 1969.

8. Ю.В.Чуев, Методика выбора оптимальных рядов технических устройств, Стандарты и качество, М., 1969, 7.

9. Дж. Литл, К.Мурти и др., Алгоритм решения задачи о коммивояжере, Экон и мат. методы, М., вып. I, 1965.

10. Н.И.Глебов, О выпуклых последовательностях, Дискретный анализ, Новосибирск, вып. 4, 1965.

11. Э.Х.Гимадутдинов, Об одном классе задач нелинейного программирования, Управляемые системы, Новосибирск, вып.3, 1969.

12. Н.З.Шор, Л.Ф.Мараховский, Выбор оптимальной совокупности типовых элементов, Труды семинара "Теория автоматов",вып.5,Киев,1969.