Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 6.
УДК.512.25/26+519.3:330.115

# О ЦИКЛИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ ГОМОРИ

Б.Каламхатов /Москва/

Рассмотрим пример задачи целочисленного линейного программирования /ЦЛП/, решение которой по первому алгоритму Гомори [ I ] приводит к бесконечному числу итераций. Известно /см. например [ 2 ], стр.136/, что до сих пор конечность первого алгоритма Гомори доказывалась при следующих условиях:

1/ Множество оптимальных планов соответствующей задачи линейного программирования /ЛП/ ограничено.

2/ Решение задачи ЦЛП либо существует, либо целевая функция задачи ЛП ограничена снизу..

Оставался открытым вопрос о том,как ведет себя алгоритм Гомори, когда условие I/ выполнено, а условие 2/ не выполнено.

Пример, приводимый в данной работе, показывает, что невыполнение условия 2/ может привести к бесконечному числу итераций. Этот пример имеет следующий вид:

$$x_0 = -(x_1 + x_2) \longrightarrow max \qquad /1/$$

при условиях:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{2}\, x_1, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1, \end{aligned}\right\} \qquad /2/$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0, \qquad /3/$$

$$x_1,\ x_2 \ \text{ - целые} \qquad /4/$$

Задачу /I/ - /4/ перепишем в следующей форме:

$$x_0 = (1+\sqrt{2})(-x_1) \longrightarrow max, \qquad /1'/$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= -\sqrt{2}(-x_1), \\ x_3 &= -1-(1+\sqrt{2})(-x_1), \end{aligned}\right\} \qquad /2'/$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \qquad /3'/$$

$$x_1, x_2, x_3 \ \text{ - целые} \qquad /4'/$$

и имеем соответствующую симплекс-таблицу:

| | $1$ | $-x_1$ |
|---|---|---|
| $x_0$ | $0$ | $1+\sqrt{2}$ |
| $x_1$ | $0$ | $-1$ |
| $x_2$ | $0$ | $-\sqrt{2}$ |
| $x_3$ | $-1$ | $-(1+\sqrt{2})^{*}$ |

Применяя метод уточнения оценок, получаем решение задачи ЛП в следующей табличной форме:

| | $1$ | $-x_3$ |
|---|---|---|
| $x_0$ | $-1$ | $1$ |
| $x_1$ | $\sqrt{2}-1$ | $-(\sqrt{2}-1)$ |
| $x_2$ | $2-\sqrt{2}$ | $-(2-\sqrt{2})$ |
| $x_3$ | $0$ | $-1$ |

Полученное решение нецелочисленное. Поэтому можно применить алгоритм Гомори. Для наглядности приведем результаты нескольких итераций по алгоритму Гомори /см. Табл. I-3/:

Таблица I.

| | $1$ | $-x_3$ |
|---|---|---|
| $x_0$ | $-1$ | $1$ |
| $x_1$ | $\sqrt{2}-1$ | $-(\sqrt{2}-1)$ |
| $x_2$ | $2-\sqrt{2}$ | $-(2-\sqrt{2})$ |
| $x_3$ | $0$ | $-1$ |
| $\eta_1$ | $-(\sqrt{2}-1)$ | $-(2-\sqrt{2})^*$ |

Таблица 2.

| | $1$ | $-\eta_1$ |
|---|---|---|
| $x_0$ | $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ |
| $x_1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $x_2$ | $1$ | $-1$ |
| $x_3$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ |
| $\eta_2$ | $-\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}^*$ |

Таблица 3.

| | $1$ | $-\eta_2$ |
|---|---|---|
| $x_0$ | $-\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ | $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ |
| $x_1$ | $1$ | $-1$ |
| $x_2$ | $\frac{2}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ |
| $x_3$ | $\frac{2}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ |
| $\eta_3$ | $-(2-\sqrt{2})$ | $-(\sqrt{2}-1)^*$ |

Покажем по методу математической индукции, что к-я таблица имеет следующий вид:

| | $1$ | $-\eta_{k-1}$ |
|---|---|---|
| $x_0$ | $a_{0k}$ | $b_{0k}$ |
| $x_1$ | $a_{1k}$ | $b_{1k}$ |
| $x_2$ | $a_{2k}$ | $b_{2k}$ |
| $x_3$ | $a_{3k}$ | $b_{3k}$ |
| $\eta_k$ | $-\{a_{i_k k}\}$ | $\{a_{i_k k}\}-1$ |

где

$b_{0k}=-a_{0k}>0,$

$b_{1k}=-a_{1k}<0,$

$b_{2k}=-a_{2k}<0,$

$b_{3k}=-(a_{1k}+a_{2k})=-a_{3k}-1,$

$a_{3k}=a_{1k}+a_{2k}-1.$

При $k=1$, $a_{i1}$ ( $i=0,1,2,3,$/ - соответствующие элементы таблицы I. Покажем, что если к-я таблица имеет вид, изображенный выше, то такой же вид имеет и /к + I/ - я таблица.

$$a_{ik+1}=a_{ik}+\frac{\{-a_{i_k k}\}b_{ik}}{1-\{a_{i_k k}\}}, \qquad /5/$$

$$b_{ik+1}=\frac{b_{ik}}{1-\{a_{i_k k}\}}. \qquad /6/$$

Рассмотрим два случая:

а/ $i_k\in\{0,1,2\}$;

$$a_{ik+1}=a_{ik}+\frac{-\{a_{i_k k}\}(-a_{ik})}{1-\{a_{i_k k}\}}=a_{ik}+\frac{\{a_{i_k k}\}a_{ik}}{1-\{a_{i_k k}\}}=\frac{a_{ik}(1-\{a_{i_k k}\})+\{a_{i_k k}\}a_{ik}}{1-\{a_{i_k k}\}}=$$

$$=\frac{a_{ik}}{1-\{a_{i_k k}\}}; \qquad b_{ik+1}=\frac{-a_{ik}}{1-\{a_{i_k k}\}};$$

б/ $i_k = 3$ ;

$$a_{3k+1} = a_{3k} + \frac{-\{a_{i_k k}\} b_{3k}}{1-\{a_{i_k k}\}} = a_{3k} + \frac{-\{a_{i_k k}\}(-a_{3k}-1)}{1-\{a_{i_k k}\}} = \frac{a_{3k}+\{a_{i_k k}\}}{1-\{a_{i_k k}\}} \qquad /7/$$

Надо доказать, что:

$$b_{3k+1} = -a_{3k+1} - 1 \qquad /8/$$

или

$$b_{3k+1} + a_{3k+1} = -1 \qquad /8'/$$

$$b_{3k+1} = \frac{b_{3k}}{1-\{a_{i_k k}\}} = \frac{-a_{3k}-1}{1-\{a_{i_k k}\}}. \qquad /9/$$

Сложив /7/ и /9/, получим /8'/.

Покажем, что при этих преобразованиях допустимость и двойственная допустимость таблицы сохраняются и алгоритм Гомори при $k \to \infty$ не дает искомого результата.

Из /5/ следует, что $a_{ik+1} > a_{ik}$, $i = 1$, . Из /6/ при $i = 0$ имеем, что

$$b_{0k+1} = \frac{b_{0k}}{1-\{a_{i_k k}\}} > 0 .$$

Теперь в силу ограничения $x_2 = \sqrt{2}\, x_1$, заметим, что $x_1$ и $x_2$ одновременно не могут быть целыми числами. Так как в таблице $M_k$ всегда имеется нецелочисленная компонента, то алгоритм дает бесконечное число итераций.

Автор выражает благодарность Ю.Ю.Финкельштейну, который обратил его внимание на данную задачу.

Поступила в редакцию 23.3.1970г.

Л и т е р а т у р а

1.R.E.Gomory, Outline of an algorithm for integer solution to linear programs. Bull.Amer.Math.Soc.,64,N5 /1958/.

2. А.А.Корбут, Ю.Ю.Финкельштейн, Дискретное программирование М., Наука, 1969.