Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 6.
УДК.512.25/26.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЦЕДУРЫ МАКСИМИЗАЦИИ ОСНОВНОГО ЛОКАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ.

В.В.Подиновский /Москва/

Обычно для решения задач теории векторной оптимизации применяются обобщенные критерии,"свертывающие" векторный критерий в скалярный [1-3]. Показано, что для решения этих задач можно использовать прием выделения одного из локальных критериев в качестве основного, который максимизируется при ограничениях на величины остальных критериев.

I.Введение.

Пусть U -/непустое/ множество допустимых решений, или планов, $F_i (i \in \mathcal{J} = \{1,2,\ldots,m\}$ - локальные критерии /"целевые" функционалы, определенные на U /, образующие векторный критерий $\bar{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$.

План u^* называется эффективным планом, или эффективной точкой множества U, если не существует другого плана u, для которого выполнялись бы неравенства $F_i(u) \geqslant F_i(u^*)$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, причем по крайней мере одно из них - строго.

Таким образом, если u^* -эффективный план, то для любого фиксированного плана $u \in U$ либо справедливы m равенств $F_i(u) = F_i(u^*)$ /в этом случае планы u, u^* называются эквивалентными/,либо найдется по крайней мере один такой номер $j \in \mathcal{J}$, что $F_j(u^*) > F_j(u)$.

Понятие эффективной точки является обобщением на случай векторного критерия понятия точки максимума скалярного критерия.

Векторная задача максимизации заключается в отыскании множества U^0 всех эффективных точек [1].

На практике задачи с векторными критериями обычно преобразуют в задачи, заключающиеся в максимизации одного скалярного критерия.Для этого применяют различные способы. Отметим два наиболее распространенных и в то же время простых способа.

1/ Выделяется основной локальный критерий F_j, который затем максимизируется при условии, чтобы величины остальных локальных критериев F_i были не меньше заданных значений B_i, т.е. решается задача: найти

$$\max_{u \in U} F_j(u) \qquad /1/$$
$$F_i(u) \geqslant B_i, \; i \in \mathcal{J}, \; i \neq j.$$

Любой план, являющийся решением этой задачи, считается оптимальным.

Указанный способ будет называться процедурой максимизации основного локального критерия.

2/ Векторный критерий $\bar{F}$ заменяется обобщенным критерием, т.е.

функционалом $\varphi(F_1, F_2, \ldots, F_m)$, где $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ -функция m переменных, определенная на множестве $F_1(U)\times F_2(U)\times\ldots\times F_m(U)$. Оптимальным считается любой план u^*, обращающий выбранный обобщенный критерий в максимум: $\varphi(u^*)=\max\limits_{u\in U}\varphi(u)$.

Легко понять, что вообще в качестве оптимального следует использовать лишь один из эффективных планов. Известно, однако, что применение указанных выше способов может привести к получению оптимальных планов, не являющихся эффективными. Поэтому необходимо иметь методы, позволяющие проверить, является ли выбранный /назначенный/ план эффективным.

Отыскивать эффективные планы,а также проверять, является ли рассматриваемый план эффективным, непосредственно с помощью приведенного выше определения затруднительно.Поэтому большое внимание уделяется установлению таких характерных свойств эффективных планов, которые позволяют создать методы для решения указанных задач. Для этой цели обычно используются обобщенные критерии.

Известны следующие основные результаты исследования свойств эффективных планов с помощью обобщенных критериев.

Т е о р е м а I. [I]. Если множество $U \subset E^n$ выпукло и все F_i -вогнутые функции, то для любого эффективного плана u^* существует такой вектор $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,$$

что максимум обобщенного критерия

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i(u)$$

на множестве U достигается при $u=u^*$.

Т е о р е м а 2 [2]. Если все $F_i>0$ на U, то для любого эффективного плана u^* существует вектор λ с компонентами $\lambda_i>0$,

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,$$

для которого обобщенный критерий $\min\limits_{i\in J}(\lambda_i F_i)$ достигает максимума на U при $u=u^*$. В качестве компонент λ_i вектора λ можно взять числа $\frac{a_i}{a}$, где $a_i=\frac{1}{F_i(u^*)}$,

$$a=\sum_{i=1}^{m}a_i.$$

П р и м е ч а н и е I. Нетрудно убедиться в том, что при выборе указанного в теореме 2 вектора λ любой план, обращающий в максимум критерий $\min\limits_{i\in J}(\lambda_i F_i)$, эквивалентен плану u^*.

В принципиальном отношении особенно интересна теорема 2, которая показывает, что выбор конкретного эффективного плана из множества U^0 эквивалентен назначению соответствующих "коэффициентов важности" λ_i для критерия $\min\limits_{i\in J}(\lambda_i F_i)$.

При выполнении условий теоремы I для отыскания эффективных планов более удобен критерий $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i$ [4], который при положительных $\lambda_i \ (i=1,2,\dots,m)$ достигает максимума на U лишь в эффективных точках.

Критерий $\min_{i\in \mathcal{J}}(\lambda_i F_i)$ целесообразно использовать только в тех случаях, когда условия теоремы I не выполняются. Однако применение этого критерия осложняется тем, что при произвольно назначенных числах $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, он может обращаться в максимум и в неэффективных точках. Это затрудняет отыскание эффективных планов, а проверку эффективности выбранного плана позволяет произвести лишь в редких случаях.

2. Применение процедуры максимизации основного локального критерия

Т е о р е м а 3. Если u^* -эффективный план, то для любого $j\in \mathcal{J}$:

$$\max_{u\in U} F_j(u) = F_j(u^*), \qquad /2/$$

$$F_i(u) \geqslant F_i(u^*),\ i\in \mathcal{J},\ i\neq j.$$

Всякий план, являющийся решением задачи /2/, эквивалентен плану u^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку план u^* эффективен, то для произвольного фиксированного плана u либо выполнится система m равенств $F_i(u) = F_i(u^*)$, и тогда план u, будучи эквивалентным плану u^*, окажется решением задачи /2/, либо найдется такой номер $r\in \mathcal{J}$, для которого $F_r(u^*) > F_r(u)$; но при этом план u, конечно, не будет решением задачи /2/.

Доказанная теорема в принципиальном отношении играет такую же роль, что и теорема 2. Она показывает, что выбор конкретного плана из множества U° эквивалентен использованию процедуры максимизации основного локального критерия F_j при надлежащим образом назначенных ограничениях на величины остальных критериев.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы план u^* был эффективным, необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением каждой из задач /2/ для $j=1,2,\dots,m$. Всякий план, являющийся решением каждой из этих задач, эквивалентен плану u^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждается теоремой 3. Докажем достаточность. Для этого предположим, что план u^*, удовлетворяя условиям теоремы, не является эффективным, так что существует план u, для которого справедливы m неравенств $F_i(u) \geqslant F_i(u^*)$, причем для $i=r$ соответствующее неравенство - строгое. Это означает, что план u, удовлетворяя всем ограничениям в задаче /2/ для $j=r$, доставляет критерию F_r значение $F_r(u)$, большее, чем $F_r(u^*)$; но последнее противоречит исходному предположению, и достаточность доказана. Справедливость утверждения об эквивалентности планов теперь вытекает из теоремы 3.

Теорема 4 показывает, что проверку выбранного плана на эффективность можно свести к проверке его оптимальности для скалярных задач /2/; для проведения последней в зависимости от "природы" рассматриваемого множества U и функционалов F_i следует воспользоваться любыми подходящими условиями оптимальности, известными в вариационном исчислении, математическом программировании и т.д. Указанный метод целесообразно использовать и в том случае, когда выполнены условия теоремы I; он более удобен, чем метод, основанный на использовании установленных в работе [3] условий, которым удовлетворяют эффективные точки.

Нижеследующие результаты показывают, что процедуру максимизации основного локального критерия можно использовать также и для отыскания эффективных планов.

Т е о р е м а 5. Пусть $B_i\ (i=2,3,\dots,m)$ -произвольные числа. Построим, если это возможно, следующую последовательность задач:

$$
\begin{aligned}
&1/\ \text{найти}\ \max_{u\in U} F_1(u)=A_1;\\
&\qquad\qquad F_i(u)\geqslant B_i\quad (i=2,3,\dots,m);\\
&2/\ \text{найти}\ \max_{u\in U} F_2(u)=A_2;\\
&\qquad\qquad F_1(u)\geqslant A_1,\ F_i\geqslant B_i\quad (i=3,4,\dots,m);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&m/\ \text{найти}\ \max_{u\in U} F_m(u)=A_m;\\
&\qquad\qquad F_i(u)\geqslant A_i\ (i=1,2,\dots,m-1).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Если существует план u^*, являющийся решением задачи m/ /для этого, конечно, необходимо, чтобы и каждая из предыдущих $m-1$ задач имела решение/, то он эффективен. Каждый план, являющийся решением задачи m /, эквивалентен плану u^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим вначале, что $A_i\geqslant B_i$. Поэтому план u^* является решением любой из задач /3/, и, следовательно, $F_i(u^*)=A_i$ для всех $i\in J$. Предположим, что план u^* не эффективен, и пусть u -такой план, что $F_i(u)\geqslant F_i(u^*)$, причем $F_r(u)>F_r(u^*)$. Но тогда u, удовлетворяя всем ограничениям задачи r / из /3/, доставляет F_r значение $F_r(u)$, большее, чем A_r. Получилось противоречие, что и доказывает эффективность плана u^*. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

П р и м е ч а н и е 2. Легко проверяется, что при $m=2$ любой эффективный план, являющийся решением задачи I/, оказывается также решением и задачи m /. В общем же случае $(m>2)$ этого утверждать нельзя.

С л е д с т в и е I. Если задача /I/ имеет единственное решение u^*, то план u^* эффективен.

Заметим, что задача /I/ заведомо можеть иметь не более одного решения, если U выпукло, все F_i -квазивогнуты, а F_j, сверх того, строго квазивогнут[ж/].

С л е д с т в и е 2. Пусть U -компакт и все F_i непрерывны на U. Если ограничения задачи /I/ непротиворечивы, то /непустое/ множество ее решений содержит по крайней мере один эффективный план.

При отыскании эффективных планов с помощью процедуры максимизации основного локального критерия параметры B_i целесообразно назначать, как показывает теорема 3, в пределах от m_i до M_i, где

$$m_i = \inf_{u\in U^\circ} F_i(u), \quad M_i = \sup_{u\in U} F_i(u)$$

/предполагается, конечно, что U° не пусто/.

Для выяснения вопроса о возможности определения величин m_i, M_i /которые желательно знать и при использовании обобщенного критерия $\min\limits_{i\in J}(\lambda_i F_i)$ /, рассмотрим множество U^*, определенное следующим образом: $U^* = U^*_m$; $U^*_0 = U$;

$$U^*_i = \{u : u\in U^*_{i-1},\ F_i(u) = \max_{v\in U^*_{i-1}} F_i(v)\}\ (i=1,2,\dots,m).$$

Множество U^*, очевидно, не пусто, если U -компакт, а все F_i полунепрерывны сверху. Легко проверяется, что $U^*\subset U^\circ$, и все планы из U^* эквивалентны. Поэтому, если U^* не пусто, то можно определить вектор $\bar F^* = (F^*_1, F^*_2, \dots, F^*_m)$, где $F^*_i = F_i(u)$, u-любой план из U^*.

Л е м м а. Если U^* не пусто, то $\max\limits_{u\in U^\circ} F_1(u) = F_1^*$. При $m=2$ справедливо также равенство: $\min\limits_{u\in U^\circ} F_2(u) = F_2^*$.

П р и м е ч а н и е 3. Каждой перестановке $F_{i_1}, F_{i_2},\dots,F_{i_m}$ соответствует "свое" множество U^* и вектор $\bar F^*$. Пусть F_i^0 -минимальное из $m!$ чисел F_i^*. Простые примеры показывают, что даже в случае выпуклого множества U и линейных F уже при $m=3$ может оказаться, что $\min\limits_{u\in U^\circ} F_i(u) < F_i^0$.

Автор благодарен Н.Т.Тынянскому, В.Н.Лебедеву и В.М.Гаврилову за обсуждение работы.

[ж/] Функционал f, определенный на выпуклом множестве X линейного пространства E^n, называется квазивогнутым, если для любых x, $y\in X$ и $\alpha\in[0,1]$ справедливо неравенство $f[\alpha x+(1-\alpha)y] \geq \min\{f(x), f(y)\}$. Если же это неравенство при любых $x\neq y$ и $\alpha\in(0,1)$ выполняется как строгое, то f -строго квазивогнутый.

Строго квазивогнутый функционал может иметь не более одного локального /а следовательно, и глобального/ максимума.

Поступила в редакцию 5.2.1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. С.Карлин, Математические методы в теории игр,программировании и экономике, изд-во "Мир", М.,1964.

2. Ю.Б.Гермейер,Методологические и математические основы исследования операций и теории игр, изд-во ВЦ МГУ, М., 1967, вып.1.

3. H.W.Kohn,A.W.Tucker, Nonlinear programming, Proceeding of the Second Berkley Symposium on Mathematical Statistics and Probality,1951.

4. A.M.Geoffrition, Proper efficiency and the theory of vector maximization,J.Math.Anal.Appl.,22,N3,1968.