

АЛГОРИТМ РАЗМЕЩЕНИЯ ПЛОСКИХ ФИГУР С НАИМЕНЬШЕЙ ДЛИНОЙ СВЯЗЫВАЮЩЕЙ ИХ СЕТИ

Ю.Г.Стоян, Н.Т.Туранов /г.Харьков/

При проектировании различного рода энергетических систем, химических предприятий, сети дорог и т. д. возникает следующая задача:

Имеется n плоских фигур S_i ($i = \overline{1, n}$) произвольной геометрической формы. Эти фигуры связаны между собой согласно следующей матрицы соединений:

$$C = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix}, \quad /1/$$

где элемент C_{ij} равен количеству связей между фигурами S_i и S_j , $C_{ij} = C_{ji}$ и $C_{ij} = 0$ при $i = j$. Равенство $C_{ij} = 0$ при $i = j$, то есть всех диагональных элементов, говорит о том, что внутренние связи фигур не учитываются.

Необходимо фигуры S_i ($i = \overline{1, n}$) разместить в области G заданной конфигурации так, чтобы длина соединений между всеми фигурами была наименьшей.

Следует заметить, что область G может быть многосвязной, а на размещаемые фигуры накладываются ограничения: между каждой парой фигур необходимо выдерживать расстояние не менее заданного; то же между каждой фигурой и границей области G .

Аналитическое описание сформулированной задачи, очевидно, должно включать в себя:

1. Условия взаимного непересечения фигур S_i ($i = \overline{1, n}$) [1 - 2]:

$$F_{ij}(x_i, y_i, \alpha_i, x_j, y_j, \alpha_j) \geq 0, \quad /2/$$

$i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}; i \neq j,$

где x_i, y_i, α_i и x_j, y_j, α_j - параметры размещения соответственно фигур S_i и S_j .

2. Условия размещения фигур S_i ($i = \overline{1, n}$) в заданной области G [1 - 2]:

$$F_i(x_i, y_i, \alpha_i) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad /3/$$

3. Функция цели /длина связывающей сети/, минимум которой необходимо определить, очевидно, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{C_{ij}} \left\{ \omega_{ij}^{(k)} \left[(x_{ij} - x_{jk})^2 + (y_{ij} - y_{jk})^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad /4/ \end{aligned}$$

где $\omega_{ij}^{(k)}$ - количество каналов в данном соединении,

$$X_{iy}(x_i, y_i, \alpha_i) = a_{iy} \cos \alpha_i - b_{iy} \sin \alpha_i + x_i, \quad /5/$$

$$Y_{iy}(x_i, y_i, \alpha_i) = a_{iy} \sin \alpha_i + b_{iy} \cos \alpha_i + y_i$$

- координаты точек M_{iy} /рис. 1/ соединений фигуры S_i относительно неподвижной системы координат XOY с остальными $n-1$ фигурами.

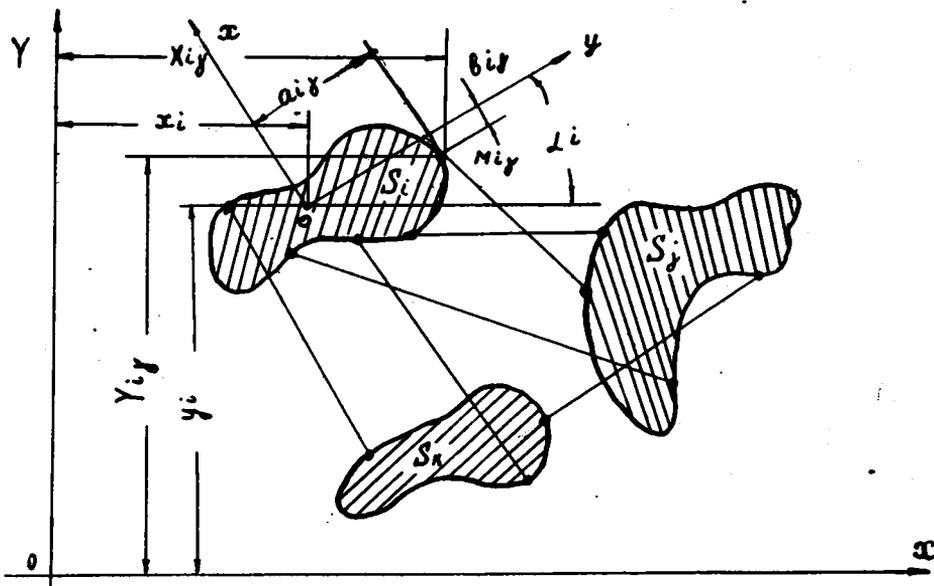


Рис. 1

Очевидно, если количество N_f элементов матрицы /1/, не равных нулю при $n \rightarrow \infty$, также будет неограниченно возрастать, то значения функции /4/ на области Γ , определяемой неравенствами /2-3/, будут распределяться по закону, сходящемуся к нормальному [3]. Действительно, это справедливо ввиду того, что множество Γ ограничено, так как область G имеет конечные размеры и, кроме того, очевидно, функция $\mathcal{K}(X, Y, \alpha) \in C^1$, а значит, в силу известной теоремы, является ограниченной на Γ , а также каждое слагаемое функции $\mathcal{K}(X, Y, \alpha)$, как видно из формулы /5/, зависит не более чем от $r=3$ соседних независимых переменных x_i, y_i, α_i или x_j, y_j, α_j .

Так как область Γ не выпукла, то сформулированная задача в общем случае является многоэкстремальной. Очевидно, что каждому относительному локальному экстремуму функции цели /4/ соответствует вполне определенное размещение фигур $S_i (i = \overline{1, n})$ в области G . Если поменять местами в таком размещении всего две фигуры и такое размещение взять за начальное /то есть параметры размещенных таким образом фигур образуют начальную точку/, то в общем случае будет получен новый локальный экстремум. Таким образом, количество относительных локальных экстремумов зависит от количества возможных размещений фигур $S_i (i = \overline{1, n})$, то есть в конечном итоге от количества n размещаемых фигур S_i .

Если предположить, что фигуры $S_i (i = \overline{1, n})$ различны между собой хотя бы по одному из следующих признаков: а/ по размерам,

б/ по конфигурации, в/ по матрице C /подмножество полных графов множества графов, определяемых матрицей C , содержит не менее n элементов/, то легко увидеть, что число возможных размещений в области G , а следовательно, и число N_2 относительных локальных экстремумов функции цели на Γ будет $N_2 \geq n!$. Заметим, что относительные локальные экстремумы функции /4/ считаем при этом различными, если они получены при различных $X, Y, \alpha \in \Gamma$.

Системы неравенств /2/ и /3/, очевидно, в общем случае состоят из $N_3 = \frac{n+1}{2} \cdot n + n$ неравенств, каждое из которых зависит не более чем от трех соседних независимых переменных x_i, y_i, α_i при x_j, y_j, α_j , и это количество, как видно, не зависит от числа фигур $S_i (i = \overline{1, n})$.

Если теперь количество размещаемых фигур неограниченно возрастает, то $N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty$ и $N_3 \rightarrow \infty$. А так как $\mathcal{K}(X, Y, \alpha)$ ограничена на Γ , то, как показано в работе [5], значения функции цели /4/ в точках относительных локальных экстремумов распределяются по закону L_1 , сходящемуся к нормальному, и из этого множества значений можно выделить подмножества, распределенные по закону L_2 , сходящемуся также к нормальному, причем второй центральный момент σ_2^2 распределения L_2 меньше σ_1^2 распределения L_1 . Как показано в работе [5], это позволяет осуществить поиск глобального экстремума с заданной точностью по вероятности, понимая под этим такое значение A функции цели $\mathcal{K}(X, Y, \alpha)$, что вероятность $P_{\mathcal{K}}$ получить лучший результат меньше β , то есть $P_{\mathcal{K}} < \beta$, где β -наперед заданное положительное число. Кроме того, получаемые значения функции $\mathcal{K}(X, Y, \alpha): X, Y, \alpha \in \Gamma$ можно сравнивать с предельной оценкой $\bar{\mathcal{K}}$, которую иногда удается получить. Такое сравнение, очевидно, будет полезным, если такая оценка не слишком грубая.

Рассмотрим решение следующей задачи.

Имеются фигуры $S_i (i = \overline{1, 69})$ квадратной формы с размером сторон 1×1 единиц, то есть все 69 квадратов равны между собой. Все квадраты располагаются в прямоугольнике G с размерами сторон 8×9 единиц, то есть по меньшей стороне может разместиться точно 8 квадратов, а по большей 9 квадратов. Таким образом, в области может разместиться не более чем 72 квадрата. Прямоугольник S_{69} неподвижен и расположен, как показано на рис. 2.

Каждый из 68 квадратов может занимать любое из 72 положений /рис.2/ и никакое другое. Таким образом, указанные квадраты имеют всего лишь две степени свободы.

Все точки соединений подвижных фигур находятся в центре симметрии фигур $S_i (i = \overline{1, 69})$, то есть в точке пересечения диагоналей квадратов. При таком предположении каждый элемент матрицы соединений /1/ будет определять и количество соединений и число каналов между фигурами. Действительно, так как все длины соединений между

фигурами S_i и S_j равны между собой, а в каждом соединении $\omega_{ij}^{(n)}$ каналов, то каждый элемент матрицы в данной задаче будет иметь значение:

$$C'_{ij} = \sum_{Y=1}^{C_{ij}} \omega_{ij}^{(Y)} . \quad /6/$$

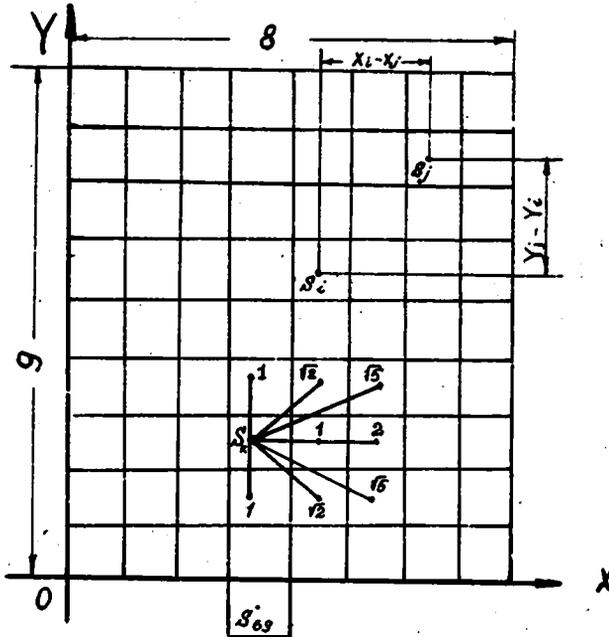


Рис. 2

Подвижные фигуры соединяются с неподвижной всегда по кратчайшему пути между центрами подвижных фигур и центром неподвижной фигуры S_{69} .

Матрица соединений C' представлена в виде таблицы. В первом столбце таблицы указан номер фигуры, а в последующих верхние цифры указывают номера фигур, с которыми соединена данная, а нижние цифры - число каналов в соответствующем соединении.

Расположим прямоугольник G относительно неподвижных осей координат XOY , как показано на рис. 2.

Если полюсом фигуры S_i является ее центр симметрии, то в силу вышесказанного и формул /5/ имеем:

$$X_i = x_i, \quad Y_i = y_i. \quad /7/$$

Так как фигуры S_i ($i = \overline{1, 68}$) все равны и могут занимать только 72 указанных положения /стороны фигур равны 1 и всегда параллельны сторонам области G /, то легко определить такие значения независимых переменных, которые удовлетворяют неравенствам вида /2/ и /3/:

$$\begin{aligned} X_i &= 0,5 + k, \quad k = \overline{1, 8} \\ Y_i &= 0,5 + t, \quad t = \overline{1, 9}, \end{aligned} \quad /8/$$

причем для разных фигур хотя бы два одноименных параметра должны иметь разные значения.

С учетом формул /6/ и /7/ функция цели будет иметь вид:

$$\mathcal{K}(x_1, \dots, x_{68}, y_1, \dots, y_{68}) = \sum_{i=1}^{68} \sum_{j=1}^{68} c'_{ij} [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{1/2}. \quad /9/$$

Очевидно, что число слагаемых правой части функции /9/ будет равно половине числа элементов матрицы соединений, не равных нулю, то есть $\omega = 216$ слагаемым.

В силу условий задачи число возможных размещений фигур S_i ($i = \overline{1, 68}$) будет, очевидно, равно $72!$. Таким образом, для определения глобального экстремума необходимо вычислить значения функции /9/ в $72!$ точках и из них выбрать наименьшее. Количество определяемых локальных экстремумов можно уменьшить, учитывая разного рода симметрию [4], если это возможно.

Всем подвижным фигурам присвоим номера от 1 до 68. С помощью датчика "псевдослучайных" чисел, работающего по равномерному закону распределения, формируется ряд из 68 пар чисел, причем таких, которые удовлетворяют соотношениям /8/. Другими словами, формируются координаты подвижных фигур, удовлетворяющих ограничениям вида /2/, /3/. Если принять, что первая пара чисел определяет параметры размещения первой фигуры S_1 , вторая пара - S_2 и так далее, то будет получено некоторое размещение фигур в области G . Вычислив значение функции цели /9/ при таком размещении фигур, получим величину локального экстремума этой функции.

"Задавая" датчиком "псевдослучайных" чисел "новые" параметры размещений фигур и вычисляя функцию цели при этих значениях параметров размещений, было получено $N = 3572$ различных локальных экстремумов функции цели. Из них наименьшее значение равнялось 1404 единицам. На основании полученных значений функции цели построена гистограмма /кривая I/ /рис.3/, которая дает хорошее приближение к нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным среднему арифметическому $m = m_c = 1646$, и дисперсией, равной квадрату среднеквадратического отклонения $D = \sigma^2 = \sigma_c^2 = 51,46^2$, полученных из статистического распределения. Критерий Пирсона $\chi^2 = 28,2$, $\nu = 38$ и соответствующее ему $p \approx 0,90$ указывает на хорошую согласованность теоретического и статистического распределений.

На рис.3 /кривые II и III/ изображены статистические распределения подмножеств значений функции цели $\mathcal{K}(X, Y)$, полученных из некоторых исходных. Кривая II имеет статистические характеристики $m_1 = 1484$, $\sigma_1 = 18$, кривая III - $m_2 = 1596$, $\sigma_2 = 17$, то есть $\sigma_1 < \sigma_2$ и $\sigma_2 < \sigma$.

Используя метод, предложенный в работе [5], составлен алгоритм решения задачи, который включает в себя следующие пункты:

а/ Вычисляем предельную оценку $\bar{\mathcal{K}}$, то есть такое наименьшее значение $\mathcal{K}(X, Y)$, что:

$$\min_{x, y \in \Gamma} \mathcal{K}(X, Y) \approx \bar{\mathcal{K}}.$$

/10/

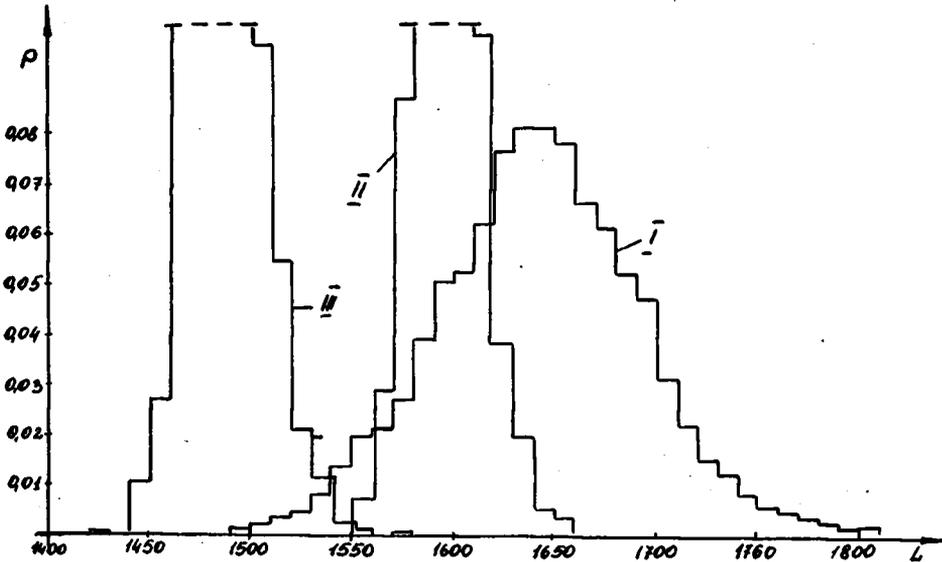


Рис. 3.

Для этого воспользуемся следующим: любая из фигур $S_k / k=1, 68/$ одновременно может иметь длину соединений /если в соединении один канал/, равную $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{18}$ и так далее, не более чем с четырьмя другими фигурами $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$ и так далее, не более чем с восьмью другими фигурами по каждой длине /рис.2/. Тогда, считая, что каждая фигура соединяется с другими только таким образом, легко подсчитать значение $\bar{\mathcal{K}}$, используя матрицу соединений и формулу /9/: $\bar{\mathcal{K}} \approx 550$.

б/ Определяем значение A . Так как число равновероятных "размещений" $N = 3572$, то есть достаточно большое, то значения m и σ , полученные статистически, принимаем за характеристики нормального закона распределения, к которому сходится статистический. Зададимся $\beta = 10^{-40}$. Тогда, очевидно, A определится из [6]:

$$\Phi(A) = \beta = \int_{-A}^A e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad /11/$$

по таблицам. Для очень малых значений β /так как нет таблиц/ воспользуемся неравенством:

$$\beta < \beta_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(A-m)^2}{2\sigma^2}} (m - \bar{\mathcal{K}}). \quad /12/$$

Задав произвольным значением A , путем нескольких приближений получим значение, близкое к искомому. Для $\beta = 10^{-40}$ и $m = 1646$,

$$\sigma = 51,46, A > 1100.$$

в/ Датчиком "псевдослучайных" чисел задаем размещение фигур и вычисляем соответствующее ему значение функции цели $\mathcal{K}(X^0, Y^0) = A^0$. Назовем это размещение исходным.

г/ Случайным образом /равновероятно/ выбираются две ячейки /под ячейками будем понимать 72 возможных положения фигуры в прямоугольнике G /: Предполагается, что хотя бы в одной из ячеек имеется фигура. Фигуры, которые размещены в выбранных ячейках, меняются местами. Будет получено новое размещение, которому соответствует новый локальный экстремум функции цели $\mathcal{K}(X_1^0, Y_1^0) = A_1^0$.

Следует заметить, что при вычислении этого значения функции $\mathcal{K}(X, Y)$ нет надобности вычислять значения всех слагаемых формулы /9/, так как свои значения изменили не более чем четыре параметра размещения, от которых зависят не более чем $\omega_1 < \omega$ слагаемых в формуле /9/. Это объясняется тем, что каждая фигура соединяется с другими не более чем $\omega_1 = 7$ соединениями, то есть:

$$\omega_1 = \max \left[\sum_{j=1}^{68} C'_{ij}, \sum_{j=1}^{68} C'_{2j}, \dots, \sum_{j=1}^{68} C'_{68j} \right]. \quad /13/$$

Это представляется одним из преимуществ по сравнению с равновероятным "просмотром" локальных экстремумов, так как при равновероятном "просмотре" необходимо вычислять значения всех слагаемых функций /9/, что, очевидно, требует серьезных затрат времени на вычисления.

Если окажется, что $A_1^0 > A^0$, то переставленные фигуры возвращаются в исходное положение. Датчиком случайным образом /исключая предыдущее размещение/ "переставляется" новая пара фигур, и при этом размещении вычисляется $\mathcal{K}(X_2^0, Y_2^0) = A_2^0$. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не окажется, что

$$A_2^0 < A^0, \quad /14/$$

$$\text{где } A_2^0 = \mathcal{K}(X_2^0, Y_2^0).$$

д/ Как только выполняется неравенство /14/ и, кроме того, $A_2^0 > A$, полученное размещение, соответствующее значению локального экстремума A_2^0 , принимаем за исходное A^0 и переходим к выполнению пункта г/.

Если окажется, что $A_2^0 \leq A$, то процесс решения на этом заканчивается.

Если окажется, что осуществлен полный перебор возможных размещений при данном исходном размещении /очевидно, что число возможных размещений $\gamma = \frac{n}{2}(n+1) = 72 \cdot 36 = 2628$ / и не выполнилось неравенство /14/, необходимо перейти к выполнению пункта в/.

За исходное размещение для данной задачи было взято размещение /рис.4/, которому соответствует значение $\mathcal{K}(X, Y) = 1620$. В

результате решения получено размещение, показанное на рис.5, которому соответствует наименьшее из всех полученных значений функции цели $\mathcal{X}(X,Y) = 1064 < A$.

68	18	6	5	57	33	27	40
10	61	31	16	53	12	20	14
60	58	43	48	62	2	64	13
46	34	63		17	54	23	25
38	8	45	52	11	39	3	47
36	59	60	1	67		56	15
43			35	29	4	7	21
9	66	24	19	32	37	44	22
51	65	42	41	26	55	28	31
			69				

Рис.4

	6	5	22	32	39	17	14
	53	21	54	15	40	38	30
	62	16	41	42	27	37	13
61	55	12	49	11	28	33	29
59	68	51	31	20	3	18	8
64	60	52	36	50	1	7	2
57	9	10	58	43	34	24	23
26	25	45	47	35	44	19	4
63	66	65	67	46	48	56	
			69				

Рис.5

Процесс решения данной задачи показан на рис.6. На этом рисунке построены гистограммы значений функции цели при разном количестве полученных локальных экстремумов /при разном числе переставленных пар/.

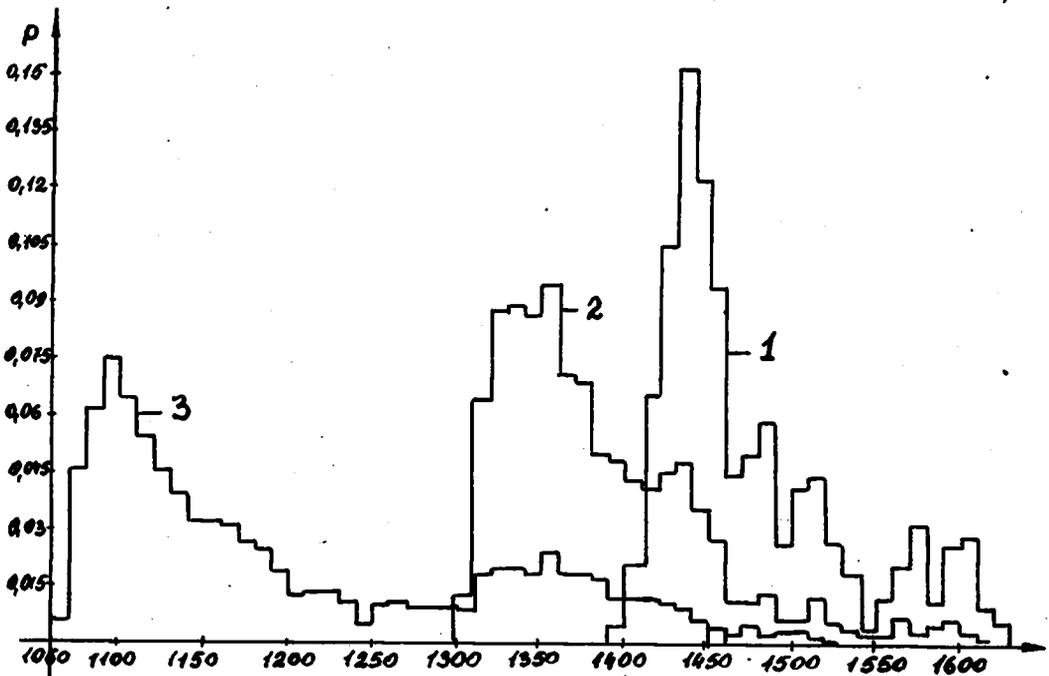


Рис. 6.

Кривая 1 построена при числе значений функции $K(X, Y)$ $n_1 = 227$; среднее арифметическое $m_1 = 1472$ и наименьшее значение функции цели после 227 перестановок пар фигур $K_1 = 1399$.

Кривая 2 построена при $n_2 = 999$, $m_2 = 1385$, $K_2 = 1304$.

Кривая 3 построена при $n_3 = 4097$, $m_3 = 1205$, $K_3 = 1064$.

Значение функции цели $K_4 = 1404$, полученное после 3572 равновероятных "бросков", было определено с помощью данного алгоритма всего после 223 перестановок пар фигур. Если учесть, что объем вычислений значений функции цели после $\frac{216}{7} > 30$ перестановок пар фигур соответствует вычислению функции цели после одного равновероятного "броска", то получаем, что значение $K_4 = 1404$ по объему вычислений равно:

$$y_1 < \frac{n_2}{30} = \frac{227}{30} \approx 8. \quad /15/$$

Таким образом, с помощью данного алгоритма получен результат, значительно лучший и за меньшее время, чем время, которое понадобилось бы для вычислений $y_2 < \frac{4097}{30} < 137$ значений функции цели при "равновероятных бросках".

Легко заметить, что среднее арифметическое $/m_1, m_2, m_3, m_4/$ с увеличением числа переставляемых пар фигур все время уменьшается /сдвигается влево/. Кроме того, вероятность получения "плохих" значений все время уменьшается. Например, вероятность получения результатов, худших, чем $K_5 = 1550$, после $n_1 = 67$ перестановок пар фигур равна $p_1 \approx 0,34$; после $n_2 = 227$ $p_2 \approx 0,134$; после $n_3 = 999$ $p_3 \approx 0,03$; после $n_4 = 2883$ $p_4 \approx 0,01$; после $n_5 = 4097$ $p_5 \approx 0,007$.

Заметим, что полученный результат мог быть получен за меньшее число переставляемых пар, если бы случайный выбор пар фигур осуществлялся без возрастания. Другими словами, если бы исключалась выборка тех пар фигур, которые уже выбирались для каждого исходного размещения.

Поступила в редакцию 1.10.1969 г.

Л и т е р а т у р а

1. В.Л.Рвачев, Ю.Г.Стоян. К вопросу об оптимальном раскрое материалов. Вопросы теоретической кибернетики, Киев, 1965.

2. Ю.Г.Стоян. Метод R -функций в задачах оптимального раскроя. Диссертация. Харьков, 1965.

3. И.В.Моцкус. О некоторых асимптотических свойствах функций многих переменных. Сб. "Автоматика и вычислительная техника", Рига, 1965, вып. 13.

4. А.Г.Глушко, В.Л.Рвачев, Ю.Г.Стоян. К вопросу о поиске абсолютного экстремума в одной задаче оптимального раскроя. Алгоритми-

ческие языки и автоматизация программирования. Киев, 1966.

5. Ю. Г. Стоян. Об одном способе поиска наилучшего решения для одного класса многоэкстремальных задач. "Управляемые системы" вып. 3, Новосибирск, Из-во "Наука", 1970.

6. В. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М. 1965.