Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.519.95.

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ОБЪЕКТА, ФАЗОВОЕ ПОЛОЖЕНИЕ КОТОРОГО ИЗВЕСТНО НЕТОЧНО

М.С.Никольский /Москва/

§ I. Постановка задачи преследования

Объект x, управляемый уравнением

$$\dot{x} = Ax - u, \tag{I}$$

где x - n -мерный вектор из эвклидова пространства R^n, A -матрица размерности $n \times n$, u - управляющий вектор, принадлежащий выпуклому компакту $P \subset R^n$, преследует объект y, управляемый уравнением

$$\dot{y} = By - v, \tag{2}$$

где y - n -мерный вектор из R^n, B - матрица размерности $n \times n$, v - управляющий вектор, принадлежащий выпуклому компакту $Q \subset R^n$. Нам будет удобно считать, что нулевой вектор θ из R^n принадлежит множествам P и Q.

Преследование начинается из положения x_0, y_0 в момент $t = 0$ и считается законченным в момент $t_1 \geqslant 0$, когда впервые

$$x(t_1) - y(t_1) \in M, \tag{3}$$

где M - выпуклое замкнутое множество из R^n, не совпадающее со всем R^n. Управления убегающего и догоняющего $v(t)$, $u(t)$ выбираются в классе измеримых функций.

Для ведения преследования догоняющему нужна информация о текущем состоянии игры. Предполагается, что догоняющий знает: а/уравнения /I/, /2/; б/ в каждый момент t вектор $x(t)$, и вектор

$$z(t) = y(t) + \omega(t), \tag{4}$$

где $\omega(t)$ - измеримая векторная функция, удовлетворяющая ограничению

$$\omega(t) \in \nu C, \tag{5}$$

где $\nu > 0$, C - выпуклый компакт, содержащий нулевой вектор θ. Считается, что функция $\omega(t)$ догоняющему неизвестна, а известен ему лишь компакт νC. Функцию $\omega(t)$ называют помехой.

Настоящая работа посвящена получению достаточных условий, при выполнении которых, догоняющий из положения x_0, z_0 может гарантировать ℓ -поимку за конечное время.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что догоняющий может осуществить ℓ -поимку из начального состояния x_0, z_0, если при любом допустимом поведении убегающего догоняющий может обеспечить за конечное время приход вектора $x(t) - y(t)$ на множество $M + S_\ell$, где $+$ означает алгебраическую сумму множеств, S_ℓ - n -мерный шар радиуса ℓ с центром в начале координат.

§ 2 . Предварительные построения

Фиксируем некоторые $\varepsilon > 0$. Пусть $t \geqslant \varepsilon$. На измеримых ограниченных функциях $q(\cdot)$, заданных на отрезке $[t-\varepsilon, t]$, определим оператор F_t формулой:

$$F_t q(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t} e^{-(s-t)B} q(s) ds.$$

Нетрудно понять, что для функций $\varphi(\cdot)$ вида: $\varphi(s) = e^{(s-t)B}\xi$, где ξ - n -мерный вектор, $F_t \varphi(\cdot) = \xi$.

Используя формулу Коши, функцию $z(s)$ /см. /4// на отрезке $[t-\varepsilon, t]$ можно записать в виде:

$$z(s) = e^{(s-t)B} y(t) + \int_{t}^{s} e^{(s-r)B}(-v(r))dr + \omega(s).$$

Применяя к этому равенству оператор F_t , получаем

$$\omega(t) = F_t z(\cdot) = y(t) + f_1(t) + f_2(t), \qquad /6/$$

где

$$f_1(t) = F_t \left\{ \int_{t}^{s} e^{(s-r)B}(-v(r))dr \right\}, f_2(t) = F_t \omega(\cdot). \qquad /7/$$

Функции $f_1(t), f_2(t)$ дифференцируемы при почти всех $t \geqslant \varepsilon$, производные от них даются формулами:

$$f_1'(t) = Bf_1(t) + v(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t}^{t-\varepsilon} e^{(t-r)B} v(r)dr, \qquad /8/$$

$$f_2'(t) = Bf_2(t) + \frac{1}{\varepsilon}\omega(t) - \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon B}\omega(t-\varepsilon). \qquad /9/$$

Из соотношений /2/, /6/, /7/, /8/, /9/ при почти всех $t \geqslant \varepsilon$, следует что

$$\dot{w}(t) = By(t) - v(t) + f_1'(t) + f_2'(t) = Bw(t) - v(t) +$$
$$+ f_1'(t) + f_2'(t) - B(f_1(t) + f_2(t)) = Bw(t) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{t}^{t-\varepsilon} e^{(t-r)B} v(r)dr + \frac{1}{\varepsilon}\omega(t) - \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon B}\omega(t-\varepsilon). \qquad /10/$$

Рассмотрим интеграл

$$J = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{t}^{t-\varepsilon} e^{(t-r)B} v(r)dr,$$

сделав замену $t-r=\eta$, получим

$$J=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\varepsilon} e^{\eta B}v(t-\eta)d\eta. \qquad /11/$$

Обозначим через Q_1 совокупность векторов J /см. /11// при всевозможных допустимых управлениях $v(t-\eta)$.

Из равенства /10/ и определения множеств Q_1, C легко следует, что при почти всех $t\geqslant\varepsilon$

$$\dot{w}(t)=Bw(t)-\lambda(t), \qquad /12/$$

где $\lambda(t)$ - измеримая функция, удовлетворяющая включению

$$\lambda(t)\in\Lambda=Q_1-\frac{\nu}{\varepsilon}C+\frac{\nu}{\varepsilon}e^{\varepsilon B}C, \qquad /13/$$

здесь знаки + и — означают алгебраическую сумму и алгебраическую разность множеств. Нетрудно показать,что Q является выпуклым компактом, ограниченным равномерно при ограниченных ε . Множество Λ является выпуклым компактом, размеры которого существенно зависят от ε и ν .

Нетрудно видеть, что для функций $f_1(t), f_2(t)$ /см. /7// при ограниченных ε справедливы неравенства:

$$|f_1(t)|\leqslant K_1\varepsilon, \quad |f_2(t)|\leqslant K_2\nu, \qquad /14/$$

где K_1, K_2 - константы. Условимся и впредь буквой K с индексом обозначать константы. Из соотношений /6/, /14/ получаем неравенство

$$|w(t)-y(t)|\leqslant K_1\varepsilon+K_2\nu, \qquad /15/$$

из которого видно, что функция $w(t)$ тем лучше аппроксимирует функцию $y(t)$, чем меньше число $\varepsilon+\nu$.

Ниже в § 4 мы покажем, как можно использовать траекторию $w(t)$ в исходной задаче преследования /1/, /2/, /3/.

§ 3. Вспомогательная задача преследования

Рассмотрим вспомогательную задачу преследования объектом x объекта w , управляемого уравнением /12/. Числа $\varepsilon>0$ и $\nu>0$ считаются фиксированными. Преследование начинается из положения x_0, w_0 в момент $t=0$ и считается законченным в момент $t_1\geqslant 0$, когда впервые выполняется включение,

$$x(t_1)-w(t_1)\in M. \qquad /16/$$

Управления убегающего и догоняющего $\lambda(t), u(t)$ выбираются в классе измеримых функций. Предполагается, что догоняющий знает:

а/ уравнения /1/, /12/;

б/ в каждый момент t векторы $x(t), w(t)$.

Для игры /1/, /12/, /16/ /числа ε и ν фиксированы/ построим альтернированный интеграл Л.С.Понтрягина $W(t)$ /см. [1] , [2] /. Это можно сделать следующим образом. Пусть $t>0$. Рассмотрим рациональное разбиение ω отрезка $[0,t]$: $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_k=t$, где $\tau_0,\ldots,\tau_{k-1}$ – рациональные числа. Поставим в соответствие разбиению ω множество $\sum\omega$, получающееся по формуле.

$$\sum\omega=\left(\left(\left(\left[M+\int_0^{\tau_1}e^{rA}P\,dr\right]\overset{*}{-}\int_0^{\tau_1}e^{rB}\Lambda\,dr\right)+\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{rB}P\,dr\right]\overset{*}{-}\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{rB}\Lambda\,dr\right)+\ldots$$

Определим $W(t)$ как пересечение множеств $\sum\omega$ по всем рациональным разбиениям ω :

$$W(t)=\bigcap_{\omega}\sum\omega. \qquad /17/$$

Может оказаться, что одно из множеств $\sum\omega$ или их пересечение является пустым, тогда $W(t)$ будет пустым множеством.

П р е д п о л о ж е н и е 1. При некотором $t=T\geqslant 0$ альтернированный интеграл Л.С.Понтрягина непуст, и для точки x_0, W_0 имеет место включение

$$e^{TA}x_0-e^{TB}W_0\in W(T). \qquad /18/$$

Нетрудно понять, что из непустоты $W(T)$ следует непустота $W(t)$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Отметим важное свойство множества $W(t)$:

$$W(t)\subset\left[W(t-\delta)+\int_{t-\delta}^{t}e^{rA}P\,dr\right]\overset{*}{-}\int_{t-\delta}^{t}e^{rB}\Lambda\,dr, \qquad /19/$$

где $0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant\delta\leqslant t$.

П р е д п о л о ж е н и е 2. На отрезке $[\chi,t]$, где $\chi=max\{t-\varepsilon^0,0\}$, а ε^0 – некоторая положительная константа, догоняющий помнит функцию $W(s)$.

Будем считать, что $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon^0$.

Л е м м а. В предположениях 1,2 догоняющий из начального состояния x_0, W_0 при любом поведении убегающего может гарантировать включение

$$x(T+\delta)-w(T)\in M, \qquad /20/$$

где $\delta=min(\varepsilon,T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве управления для догоняющего на отрезке $[0,\delta]$ возьмем функцию $u(t)\equiv\theta$. В момент δ догоняющий будет находиться в положении x_0, убегающий – в положении $W(\delta)$. В силу предположения 2. догоняющий знает векторы $W_0, W(\delta)$. Если $T=0$, то из равенств $\delta=0, W(0)=M$ легко следует справедливость включения /20/. Пусть $T>0$.

Рассмотрим объект $\mu(t)=W(t-\delta)$. Очевидно, что $\mu(\delta)=W_0$ и что догоняющий в момент $t=\delta$ знает поведение объекта $\mu(t)$ при $\delta\leqslant t\leqslant 2\delta$. Положим $t=\tau+\delta$ и $\hat{x}(\tau)=x(\tau+\delta), \hat{\mu}(\tau)=\mu(\tau+\delta)$. Очевидно, что $\hat{x}(0)=x_0$, $\hat{\mu}(0)=W_0$ и что $\hat{x}(\tau),\hat{\mu}(\tau)$ при $\tau>0$ удовлетворяют уравнениям /1/, /12/ соответственно. Из соотношения

/18/ следует включение

$$e^{TA}\hat{x}(0)-e^{TB}\hat{\mu}(0)\in W(T). \qquad /21/$$

Покажем, что

$$e^{TA}\hat{x}(0)-e^{(T-\delta)B}\hat{\mu}(\delta)\in W(T-\delta)+\int\limits_{T-\delta}^{T}e^{rA}P\,dr. \qquad /22/$$

Пусть управлением объекта $\hat{\mu}(\tau)$ на отрезке $[0,\delta]$ будет функция $\lambda(\tau)$. Тогда из включений /21/, /19/ имеем

$$e^{TA}\hat{x}(0)-e^{TB}\hat{\mu}(0)+\int\limits_{T-\delta}^{T}e^{rB}\lambda(T-r)dr\in W(T-\delta)+\int\limits_{T-\delta}^{T}e^{rA}P\,dr,$$

откуда с помощью формулы Коши вытекает включение /22/. Из включения /22/ следует, что догоняющий, зная $\hat{x}(\delta),\hat{\mu}(\delta)$, может построить такое допустимое управление $u(\tau)\,(0\le\tau\le\delta)$, что

$$e^{TA}x_0-\int\limits_{T-\delta}^{T}e^{rA}u(T-r)dr-e^{(T-\delta)B}\hat{\mu}(\delta)\in W(T-\delta),$$

откуда следует включение

$$e^{(T-\delta)A}\hat{x}(\delta)-e^{(T-\delta)B}\hat{\mu}(\delta)\in W(T-\delta), \qquad /23/$$

где $\hat{x}(\delta)$ - положение точки $\hat{x}(\tau)$ в момент $\tau=\delta$.

Обратим внимание на то, что включение /23/ аналогично включению /21/. Делая подобные шаги дальше, догоняющий добивается в момент T включения $\hat{x}(T)-\hat{w}(T)\in M$, откуда вытекает включение /20/. Лемма доказана.

§ 4. Достаточные условия для возможности ℓ-поимки в исходной задаче преследования

Будем считать выполненным

П р е д п о л о ж е н и е 3. В задаче преследования /1/,/2/,/3/ догоняющий помнит функцию $z(s)$ на отрезке $[\chi,t]$ где $\chi=\max\{t-2\varepsilon^{\circ},0\}$, а ε° - некоторая положительная константа.

Условно можно считать, что движение убегающей точки $z(t)$ началось из положения $z(-\varepsilon^{\circ})=e^{-\varepsilon^{\circ}B}z_0$ и происходит на отрезке $[-\varepsilon^{\circ},0]$ в соответствии с равенством

$$z(s)=e^{sB}z_0. \qquad /24/$$

Фиксируем для последующих рассуждений некоторое положительное $\varepsilon<\varepsilon^{\circ}$. Применим к доопределенной функции $z(s)$ на отрезке $[t-\varepsilon,t]$, где $t\geq 0$, оператор F_t, введенный в § 2. Нетрудно видеть, что

$$F_{t=0}z(\cdot)=z_0. \qquad /25/$$

С помощью § 2 нетрудно показать, что $W(t)=F_t Z(\cdot)$ при $t \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению /12/.

Будем считать выполненным

Предположение 4. Существуют такие константы $\varepsilon=\varepsilon_1>0$ $(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon^0)$, $\nu=\nu_0>0$, $T\geqslant 0$, что альтернированный интеграл Л.С. Понтрягина $W(T)$ /см. /17// непуст и для точки $x_0, W_0=Z_0$ имеет место включение /18/.

Дальнейшие рассуждения будем проводить при $0\leqslant \nu \leqslant \nu_0$. Из формулы /13/ и из включения $\theta \in C$ следует, что включение /18/ сохраняется при $\nu<\nu_0$, $\varepsilon=\varepsilon_1$. Применяя результаты § 3, можно утверждать, что догоняющий в задаче преследования /1/, /2/, /3/ из начального состояния $x_0, W_0=Z_0$ при любом поведении убегающего может гарантировать включение /20/, где $\delta=\delta_1=min(\varepsilon_1, T)$.

Обозначим через γ максимум отклонения /по модулю/ вектора $x(T+\delta_1)$ от вектора $x(T)$. Из неравенства /15/ и включения /20/ следует, что догоняющий, применяя разработанный способ преследования, может гарантировать из начального состояния x_0, z_0 ℓ - поимку, где $\ell=\gamma+K_1\varepsilon_1+K_2\nu$.

Заметим, что выбор величины ε находится в руках догоняющего и что он может выбрать ε так, чтобы уменьшалась величина ℓ. Изучим случай, когда ν мало. На плоскости параметров ε, ν рассмотрим множество

$$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \quad 0<\nu\leqslant\nu_0, \quad \frac{\nu}{\varepsilon}\leqslant\frac{\nu_0}{\varepsilon_1}. \qquad /26/$$

Обозначим через Λ_1 множество Λ /см. /13// при $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\nu=\nu_0$. Из включения $\theta\in C$ следует, что при ε и ν, удовлетворяющих неравенствам /26/, имеет место соотношение: $\Lambda\subset\Lambda_1$. Отсюда следует, что для точки $x_0, W_0=Z_0$ включение /18/ сохраняется при ε, ν, удовлетворяющих неравенствам /26/. Положим

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\nu_0}\nu. \qquad /27/$$

Грубо оценим величину $|x(T+\delta)-x(T)|$, где $\delta=min(\varepsilon, T)$, а ε дается формулой /27/. Применяя формулу Коши, имеем

$$x(T+\delta)=e^{\delta A}x(T)-\int_T^{T+\delta} e^{(T+\delta-r)A}u(r)dr.$$

Отсюда и из /27/ следует, что

$$|x(T+\delta)-x(T)|\leqslant K_3\nu.$$

Отсюда, из неравенства /15/, включения /20/ и формулы /27/ для ℓ следует оценка: $\ell\leqslant K_4\nu$, которая интересна для малых ν.

§ 5. Пример

Догоняющий управляется уравнением:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -u, \qquad /28/$$

где x_1, x_2 – p -мерные векторы $(p \geq 1)$, u – управляющий p -мерный вектор, принадлежащий сфере $|u| \leq \rho$, где $\rho > 0$.

Убегающий управляется уравнением

$$\dot{y}_1 = -v, \quad \dot{y}_2 = \theta_1,$$

где y_1, y_2 – p -мерные векторы $(p \geq 1)$, v – управляющий p -мерный вектор, принадлежащий сфере $|v| \leq 1$, θ_1 – совокупность векторов $(\eta; \xi)$, где η – произвольный p -мерный вектор, удовлетворяющий неравенству $|\eta| \leq 1$, ξ – произвольный p -мерный вектор. Догоняющему в каждый момент известен не сам вектор $y(t) = (y_1(t); y_2(t))$, а вектор $z(t) = y(t) + \omega(t)$, где

$$\omega(t) = \nu \begin{pmatrix} \zeta \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

здесь ν -положительный скаляр, ζ – произвольный p -мерный вектор, удовлетворяющий неравенству $|\zeta| \leq 1$.

Согласно развитой теории сначала нужно вычислить множество Q_1, состоящее из векторов /11/. В рассматриваемом случае это сделать нетрудно, множество Q_1 состоит из $2p$ -мерных векторов вида $(\varkappa; \theta_1)$, где $\varkappa$ – произвольный p -мерный вектор, удовлетворяющий неравенству $|\varkappa| \leq 1$. Нетрудно показать, что в рассматриваемом примере множество Λ /см./13// состоит из векторов $(\xi; \theta_1)$, где ξ -произвольный p -мерный вектор, удовлетворяющий неравенству $|\xi| \leq \left(1 + \frac{2\nu}{\varepsilon}\right)$. Можно показать, что при $\rho \geq \frac{\left(1 + \frac{2\nu_0}{\varepsilon_1}\right)^2}{2}$ альтернированный интеграл Л.С.Понтрягина $W(t)$ непуст при всех $t \geq 0$ и что для каждой точки $x_0, z_0 = w_0$ существует такое $T = T(x_0, z_0)$, при котором выполняется включение /18/. В качестве числа $T(x_0, z_0)$ можно взять наименьший неотрицательный корень уравнения

$$|x_1^0 - z_1^0 + t x_2^0| = 1 + \frac{\rho t^2}{2} - \left(1 + \frac{2\nu_0}{\varepsilon_1}\right) t. \qquad /29/$$

Рассмотрим для примера начальное состояние x_0, z_0, удовлетворяющее условиям:

$$|x_1^0| = 2, \quad |x_2^0| = 0, \quad |z_1^0| = 0. \qquad /30/$$

Как нетрудно видеть, наименьшим положительным корнем уравнения /29/ будет число

$$T = \frac{1 + \frac{2\nu_0}{\varepsilon_1}}{\rho} + \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{2\nu_0}{\varepsilon_1}\right)^2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho}} \qquad /31/$$

Нам нужно оценить функции $f_1(t), f_2(t)$ /см./7//. Простые вычисления показывают, что $|f_1(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $|f_2(t)| \leq \nu$. Учитывая цилиндрический характер множества M, для наших целей будет достаточно вместо $|x(T+\delta_1)|-x(T)|$ оценить $|x_1(T+\delta_1)-x_1(T)|$, где величина T дается формулой /31/. Нетрудно видеть, что

$$x_1(T+\delta_1)=x_1(T)+\delta_1 x_2(T)-\int_T^{T+\delta_1}(T+\delta_1-r)u(r)dr.$$

Отсюда следует, что

$$|x_1(T+\delta_1)-x_1(T)|\le\varepsilon_1|x_2(T)|+\frac{\varepsilon_1^2\rho}{2}. \qquad /32/$$

Из уравнения /28/ и равенств /30/ следует, что

$$x_2(T)=\int_0^T u(s)ds.$$

Откуда получаем неравенство

$$|x_2(T)|\le T\rho. \qquad /33/$$

Из неравенств /32/, /33/ вытекает оценка

$$|x_1(T+\delta_1)-x_1(T)|\le\varepsilon_1\rho\left(T+\frac{\varepsilon_1}{2}\right).$$

Итак, при

$$\rho\ge\frac{\left(1+\frac{2\nu_0}{\varepsilon_1}\right)^2}{2}$$

согласно развитой теории при начальных условиях /30/ можно гарантировать ℓ -поимку, где $\ell=\frac{\varepsilon_1}{2}+\nu+\varepsilon_1\rho\left(T+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$, $0\le\nu\le\nu_0$, величина T дается формулой /31/. Считая ν малым и полагая $\varepsilon=\frac{\varepsilon_1}{\nu_0}\nu$, можно показать, что

$$\ell=\left(\frac{\varepsilon_1}{2\nu_0}+1+\frac{\varepsilon_1}{\nu_0}\rho\left(T+\frac{\varepsilon_1}{2\nu_0}\nu\right)\right)\nu.$$

Поступила в редакцию 30.3.1970 г.

Литература

1. Л.С.Понтрягин, О линейных дифференциальных играх II, ДАН СССР, т.175, № 4, 1967.

2. М.С.Никольский, Нестационарные линейные дифференциальные игры, Вестник МГУ, сер.матем. и мех., № 3, 1969.