

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛОМАТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ СВЯЗНЫХ МУЛЬТИ-ГРАФОВ

М.В.Гендлер, К.Ю.Прокопчук /Москва/

Изучение реальных разветвленных электрических, магнитных, гидравлических, пневматических, транспортных и других систем [1 - 4] часто сводится к анализу трех основных типов закономерностей, имеющих место в этих системах.

Это, во-первых, зависимости между величинами в каждой из ветвей системы в отдельности /типа закона Ома/, во-вторых, зависимости между узловыми величинами /типа I-го закона Кирхгофа/ и зависимости между контурными величинами /типа II-го закона Кирхгофа/.

Составление уравнений, связывающих искомые величины и параметры системы на основании I-й группы законов, не вызывает принципиальных затруднений. Определение же зависимостей между узловыми величинами и между контурными величинами связано с алгоритмическими трудностями.

Для решения первой задачи требуется построение и некоторое преобразование матрицы инцидентий мультиграфа [5], являющегося геометрическим образом рассматриваемой системы. Алгоритм решения этой задачи приведен в работе [6].

Для решения второй задачи требуется построение и некоторое преобразование цикломатической матрицы [5] упомянутого мультиграфа.

В данной работе предлагается конструктивный метод получения и соответствующего преобразования вышеуказанной матрицы для любых систем без учета взаимодействия между ее ветвями /типа взаимной индукции между ветвями электрической цепи/. Приведен пример, иллюстрирующий применение изложенного метода.

1. Геометрический образ системы.

Как известно [1 - 4], геометрическим образом любой системы, имеющей m ветвей и n узлов / m и n - целые, положительные/, является неориентированный связный мультиграф $G=(X,U)$, быть может, с петлями и висячими вершинами [5]. Здесь X - множество, состоящее из n вершин G , U - множество, состоящее из m ребер G .

Далее будем считать, что вершины и ребра мультиграфа G занумерованы натуральными числами от 1 до n и от 1 до m соответственно.

Например, геометрическим образом разветвленного магнитного элемента /флюксора/, изображенного на рис.1, является мультиграф, приведенный на рис.2 [7]. Для него $m = 6$; $n = 4$;

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}; U = \{u_1, u_2, \dots, u_6\}.$$

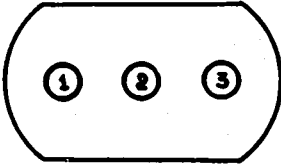


Рис. 1

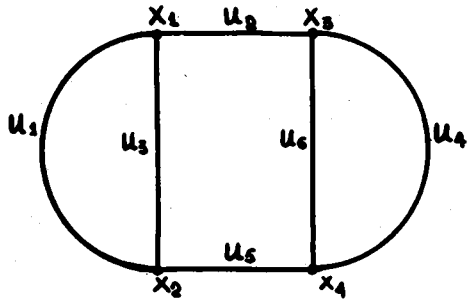


Рис. 2

В [5] показано, как осуществить отображение произвольного множества циклов любого мультиграфа, имеющего q ребер ($q \geq 0$, целое/, в действительное q - мерное векторное пространство R^q [8]. При этом образы в R^q циклов мультиграфа называются вектор-циклами. Совокупность циклов мультиграфа называется независимой, если соответствующие им вектор-циклы линейно независимы.

Заметим, что число независимых циклов ν связного мультиграфа G есть $m - n + 1$ [5]. При этом множество, состоящее из ν независимых циклов, называется базой независимых циклов.

Для мультиграфа, приведенного на рис.2, $\nu = 3$.

Введем в рассмотрение вектор-столбец $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}.$$

Здесь φ_j ($1 \leq j \leq m$) - напряжение j -й ветви в электрической или магнитной системах, разность давлений на концах j -й ветви в гидравлической или пневматической системах и т.п.

Пусть $\bar{c} = (c^1, c^2, \dots, c^m)$ - вектор-цикл, соответствующий некоторому циклу μ мультиграфа G . Тогда 2-й закон Кирхгофа можно записать в виде равенства нулю скалярного произведения векторов \bar{c} и $\bar{\varphi}$, то есть

$$(\bar{c}, \bar{\varphi}) = 0.$$

Рассматривая совокупность $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_\nu\}$ вектор-циклов, соответствующих некоторой базе независимых циклов мультиграфа G , получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} c_1^1 \varphi_1 + c_1^2 \varphi_2 + \dots + c_1^m \varphi_m &= 0 \\ c_2^1 \varphi_1 + c_2^2 \varphi_2 + \dots + c_2^m \varphi_m &= 0 \\ \vdots & \\ c_\nu^1 \varphi_1 + c_\nu^2 \varphi_2 + \dots + c_\nu^m \varphi_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad //1/$$

Матрица $C = (c_s^j)$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq \nu$, называется цикломатической

матрицей мультиграфа G [5]. Обозначим через \tilde{C} матрицу, полученную транспонированием C . Тогда система [1] может быть записана в виде:

$$\tilde{C}\bar{\varphi} = \bar{D}. \quad /2/$$

2. Алгоритм построения и разбиения матрицы \tilde{C} .

Разобьем матрицу \tilde{C} на 2 подматрицы - A и B , из которых подматрица A должна быть неособенной квадратной матрицей ν -го порядка [8]. Разбивая одновременно вектор $\bar{\varphi}$ на 2 компоненты - $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$, получаем из /2/:

$$\tilde{C}\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2) = \bar{D}. \quad /3/$$

Здесь

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}, \quad \bar{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} \varphi_{i_1} \\ \varphi_{i_2} \\ \vdots \\ \varphi_{i_\nu} \end{bmatrix}, \quad \bar{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} \varphi_{i_{\nu+1}} \\ \varphi_{i_{\nu+2}} \\ \vdots \\ \varphi_{i_m} \end{bmatrix}.$$

После перемножения в /3/ имеем:

$$A\bar{\varphi}_1 + B\bar{\varphi}_2 = \bar{D},$$

откуда, ввиду того, что A - неособенная квадратная матрица, находим:

$$\bar{\varphi}_1 = -A^{-1}B\bar{\varphi}_2. \quad /4/$$

Основные алгоритмические трудности при решении задачи таким способом состоят: 1/ в построении матрицы \tilde{C} ; 2/ в вычислении матрицы $A^{-1}B$.

Для решения этих задач предлагается следующий метод.

1. Если $n = 1$, то ребра G могут быть только петлями. Придав произвольную ориентацию ребрам G , видим, что в этом случае \tilde{C} представляет собой квадратную матрицу m -го порядка, поскольку число независимых циклов мультиграфа G совпадает с числом его ребер. \tilde{C} будет невырожденной, так как каждая ее строка и столбец содержат по одному ненулевому элементу: +1 или -1; то есть матрицы \tilde{C} и A совпадают. Очевидно, это наименее интересный случай.

Пусть $n > 1$. Тогда для мультиграфа G "частичное дерево" $H = (X, U_0)$ [5], имеющее по определению то же, что и мультиграф G , множество вершин X и множество ребер $U_0, U_0 \subseteq U$, состоящее из $n-1$ ребер U , может быть построено, например, следующим образом. В качестве первого элемента U_0 берем ребро из U , имеющее наименьший номер, например, i_1 , и не являющееся петлей; второго - ребро из $U \setminus \{u_{i_1}\}$, имеющее наименьший номер, например, i_2 , $1 \leq i_2 \leq m$, $i_2 \neq i_1$, и такое, что мультиграф, имеющий в качестве множества ребер множество $\{u_{i_1}, u_{i_2}\}$, не содержит циклов; третьего - ребро из $U \setminus \{u_{i_1}, u_{i_2}\}$, имеющее наименьший номер, например, i_3 , $1 \leq i_3 \leq m$, $i_3 \neq i_1, i_3 \neq i_2$, и такое, что мультиграф, имеющий в ка-

честве множества ребер множество $\{u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}\}$, не содержит циклов и т.д. Через $n-1$ шагов получим множество $U_g = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{n-1}}\}$ [5]. Ясно, что все ребра, инцидентные висячим вершинам, войдут в U_g .

Для рассматриваемого примера "частичное дерево" $H = (X, U_g)$ изображено на рис. 3. Для него $U_g = \{u_1, u_2, u_4\}$.

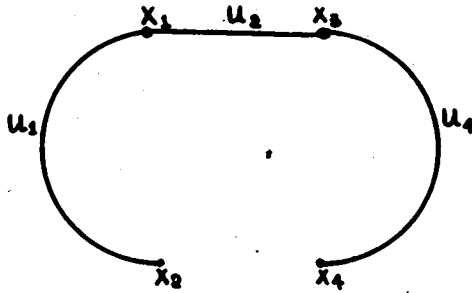


Рис. 3.

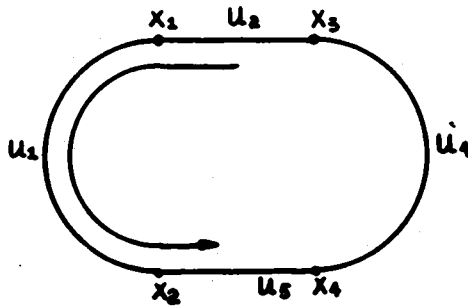


Рис. 4.

Рассмотрим множество ребер $U \setminus U_g = \{u_{i_n}, u_{i_{n+1}}, \dots, u_{i_m}\}$. Легко видеть, что все петли G входят в это множество.

Для нашего примера $U \setminus U_g = \{u_3, u_5, u_6\}$.

Добавление любого ребра из $U \setminus U_g$ к дереву $H = (X, U_g)$ приводит к появлению ровно одного элементарного цикла [5] в полученном таким образом мультиграфе, причем каждому добавляемому ребру соответствует свой цикл. Циклы $\mu_{i_n}, \mu_{i_{n+1}}, \dots, \mu_{i_m}$, получаемые таким способом, независимы, так как каждый из них содержит ребро, не принадлежащее остальным. Число этих циклов равно $m - n + 1 = \gamma$, то есть они образуют систему независимых циклов.

Для приведенного примера при направлениях обхода циклов, указанных на рисунках 4 - 6, такими циклами будут (u_1, u_5, u_4, u_2) , (u_1, u_3) и (u_4, u_6) .

Далее для построения матрицы \tilde{C} придадим ребрам G произвольную ориентацию:

Ребра мультиграфа, изображенного на рис. 2, могут быть ориен-

тированы, например, как указано на рис. 7.

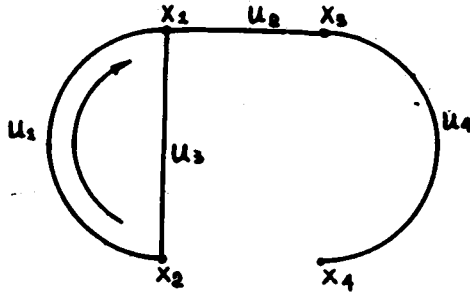


Рис. 5.

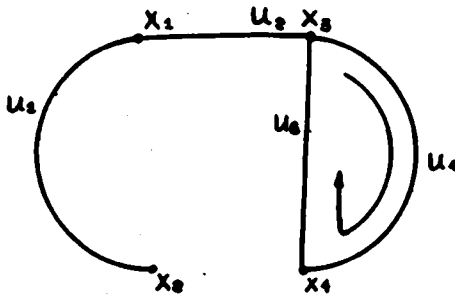


Рис. 6.

Тогда строками матрицы \tilde{C} будут образы независимых элементарных циклов в R^m , то есть элементами \tilde{C} будут только 0, +1, -1. Матрица \tilde{C} будет иметь γ строк и m столбцов, ее ранг равен γ .

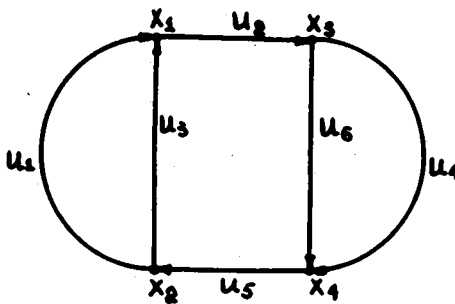


Рис. 7.

Для рассматриваемого примера при выборе ориентации ребер u_3 , u_5 и u_6 , указанной на рис. 7, и направлениях обхода циклов, указанных на рис. 4 - 6, матрица \tilde{C} имеет следующий вид:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Для решения второй части задачи прежде всего необходимо вы-

делить из \tilde{C} квадратную невырожденную подматрицу A ν -го порядка. Покажем, что если A составить из векторов-столбцов \tilde{C} , соответствующих ребрам из множества $U \setminus U_g$, то она будет обладать указанными свойствами.

Действительно, таких ребер ν , то есть матрица A - квадратная. Каждая строка и столбец A содержат только по одному ненулевому элементу: $+1$ или -1 . Это верно для каждой строки A , так как если какое-нибудь ребро из множества $U \setminus U_g$ входит в один из независимых элементарных циклов, построенных по вышеприведенному алгоритму, то никакое другое ребро из этого множества не входит в этот цикл. Справедливость нашего утверждения для столбцов является следствием того, что каждое ребро из $U \setminus U_g$ входит только в один из рассмотренных циклов. Отсюда $|\det A| = 1$, то есть матрица A - невырожденная.

В нашем примере матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если каждый независимый цикл, полученный добавлением ребра u_{jk} , $n \leq k \leq m$, к дереву $H = (X, U_g)$ обходить в направлении, совпадающем с выбранной ориентацией ребра u_{jk} , то элементами матрицы \tilde{C} будут только 0 и $+1$. Далее, меняя местами столбцы матрицы A /и соответственно этому индексы векторов $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ /, можно добиться того, чтобы полученная таким образом матрица A стала единичной. Для этого достаточно произвести следующую перенумерацию ребер и циклов. Номера с 1-го по ν -й присвоить ребрам из $U \setminus U_g$, с $\nu+1$ -го по m -й - ребрам из U_g . Затем циклу, который получается добавлением к дереву 1-го ребра /в новой нумерации/, присвоить номер 1, 2-го - номер 2 и т.д. до присвоения ν -го номера.

Тогда, используя /4/, имеем:

$$\bar{\varphi}_{1*} = -A_*^{-1} B_* \bar{\varphi}_{2*} = -E B_* \bar{\varphi}_{2*} = -B_* \bar{\varphi}_{2*}, \quad /5/$$

где $\bar{\varphi}_{1*}$ и $\bar{\varphi}_{2*}$ - вектор-столбцы, получающиеся из $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ соответственно с упомянутой перестановкой компонент, B_* - матрица, получающаяся из B соответствующей перестановкой столбцов, E - единичная матрица.

Определив матрицу B_* , можно вернуться к исходной нумерации ребер.

Таким образом, получено ν линейно независимых связей между искомыми величинами.

Вернемся к нашему примеру. Перенумеруем ребра мультиграфа $G = (X, U)$ как указано на рис. 8. Тогда $U_g = \{u_4^*, u_5^*, u_6^*\}$. Циклу (u_1^*, u_4^*) присвоим номер 1, (u_2^*, u_4^*) - номер 2, $(u_3^*, u_4^*, u_5^*, u_6^*)$ - номер 3.

Далее обходим 1-й цикл в направлении, совпадающем с ориентацией ребра u_1^* , 2-й - u_2^* , 3-й - u_3^* ; тогда матрицы \tilde{C}_* , A_* и B_* и векторы $\bar{\varphi}_{1*}$ и $\bar{\varphi}_{2*}$ принимают такой вид:

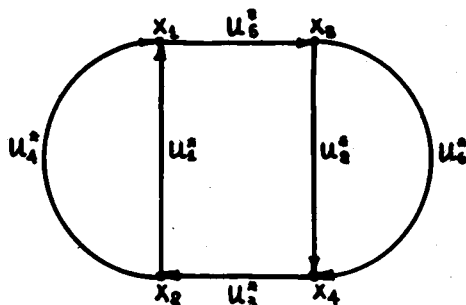


Рис. 8

$$\tilde{C}_* = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & I & I & I \end{pmatrix}, A_* = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, B_* = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ I & I & I \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi}_{1*} = \begin{pmatrix} \varphi_{1*} \\ \varphi_{2*} \\ \varphi_{3*} \end{pmatrix}, \bar{\varphi}_{2*} = \begin{pmatrix} \varphi_{4*} \\ \varphi_{5*} \\ \varphi_{6*} \end{pmatrix},$$

и уравнение [5] для нашего примера выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1*} \\ \varphi_{2*} \\ \varphi_{3*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ I & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{4*} \\ \varphi_{5*} \\ \varphi_{6*} \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к старой нумерации компонент векторов $\bar{\varphi}_{1*}$ и $\bar{\varphi}_{2*}$, получаем /сравнить рис. 3 и 8/:

$$\begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ I & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}.$$

Ш. Цикломатическая матрица полного графа

Рассмотрим тот частный случай, когда $G=(X,U)$ является полным неориентированным графом без петель [5]. Пример такого графа приведен на рис. 9. Если n - число вершин G , то число ребер есть $m = \frac{n(n-1)}{2}$, и цикломатическое число $\nu = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Это означает, что матрица \tilde{C} имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ столбцов и $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ строк.

Для графа, изображенного на рис. 9, $n = 6$; $m = 15$; $\nu = 10$.

Далее считаем, что вершины G занумерованы натуральными числами от 1 до n .

В качестве элементов множества ребер U_g "частичного дерева" $H=(X,U_g)$ графа G фиксируем все $n-1$ ребер, инцидентных 1-й

вершине.

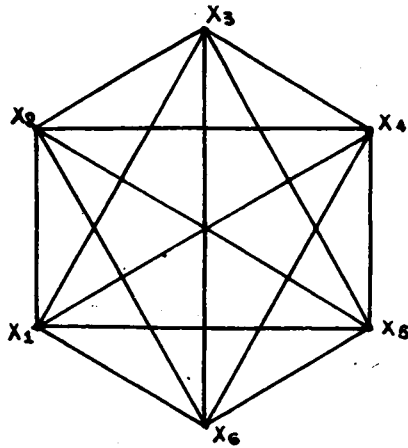


Рис. 9.

Каждой паре вершин (X_i, X_k) , $i \neq k$, полного графа G соответствует некоторое ребро $u_j \in U$. При этом нумерация ребер произведена натуральными числами от 1 до m следующим образом. Ребрам дерева присвоены такие номера: ребру, инцидентному вершинам X_1 и X_n - номер m , X_1 и X_{n-1} - номер $m-1$, ..., X_1 и X_{n-m+2} , то есть $v+1$. Для любых двух ребер $u_{j_1}, u_{j_2} \in U \setminus U_d$, соединяющих соответственно пары вершин (X_{i_1}, X_{k_1}) и (X_{i_2}, X_{k_2}) , считаем $j_1 < j_2$, если $(i_1 < i_2)$ или $(i_1 = i_2$ и $k_1 < k_2)$. Отсюда $U_d = \{u_{v+1}, u_{v+2}, \dots, u_m\}$, $U \setminus U_d = \{u_1, u_2, \dots, u_v\}$.

Для рассматриваемого примера нумерация ребер указана на рис.

10. Здесь $U_d = \{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{15}\}$, $U \setminus U_d = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$.

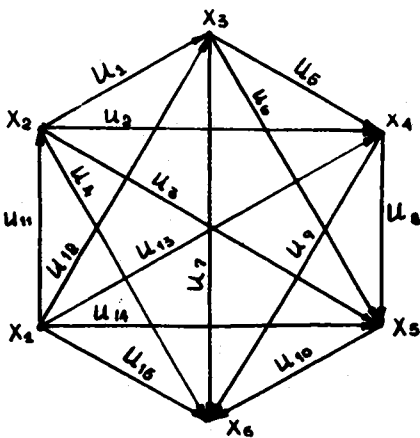


Рис. 10.

Далее каждому ребру $u_j \in U$, соединяющему вершины X_i и X_k , придадим следующую ориентацию. Считаем, что вершины X_i и X_k являются соответственно началом и концом этого ребра, если $i < k$, $i \leq i, k \leq n, i \neq k$ /рис. 10/.

Проведем упорядочивание циклов. Номер 1 присвоим циклу, который получается добавлением ребра u_1 к дереву $H = (X, U_d)$, номер 2 - ребра u_2, \dots , номер v - ребра u_v . Направление обхода S -го цикла, $1 \leq S \leq v$, считаем совпадающим с ориентацией

циклом S -го ребра.

Ясно, что при выбранных способах нумерации и ориентации ребер и циклов и построении "частичного дерева" $H = (X, U_d)$ первые v вектор-столбцов матрицы \tilde{C} образуют единичную подматрицу A , а

вектор-столбцы, соответствующие ребрам из U_g , образуют подматрицу B . Легко видеть далее, что B имеет некоторый "блочный" вид [8].

В самом деле, при помощи $n-3$ горизонтальных линий разобьем B на $n-2$ прямоугольных частей - "блоков".

$$B = \begin{array}{|c|} \hline B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline \vdots \\ \hline B_{n-2} \\ \hline \end{array}$$

Тогда становится наглядным строение каждого блока B_i , $1 \leq i \leq n-2$: он имеет $n-1-i$ строк, его i -й столбец состоит из единиц, на пересечении k -й строки и $(k+i)$ -го столбца стоит -1 , $1 \leq k \leq n-1-i$, а все остальные элементы равны 0.

Для графа, изображенного на рис. 10, матрицы \tilde{C} и B имеют вид:

$$\tilde{C} = \begin{array}{|cccccccc|cccc} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}, B = \begin{array}{|cccc|cccc|cccc} \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Итак, в работе предложен алгоритм построения и соответствующего преобразования цикломатической матрицы произвольного связного мультиграфа. Этот алгоритм может быть использован при анализе закономерностей, характеризующих разветвленные реальные системы различной природы. Приведен пример, иллюстрирующий применение предложенного метода.

Поступила в редакцию 12.11.1969г.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Г.Максимович. Линейные электрические цепи и их преобразование. Госэнергоиздат, М., 1961.
2. М.А.Розенблат. Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники. "Наука", 1966.
3. Е.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе. Теоретическая гидромеханика, Физматгиз, М., -1963.
4. А.Г.Холзунов. Основы расчета пневматических приводов. Машгиз, М.-Л., 1959.
5. К.Берх. Теория графов и ее применение. ИЛ, М., 1962.
6. М.В.Гендлер. Об одном каноническом виде уравнений Кирхгофа

I-го рода. Автоматика и телемеханика /в печати/.

7. М.Б.Гендлер, М.А.Розенблат. Устойчивые магнитные состояния разветвленных сердечников, применяемых для построения цифровых схем. Автоматика и телемеханика, № 9, 1966.

8. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц, "Наука", 1967.