Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.519.1.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ СМЕЖНОСТИ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ

В.П.Ясакова

Как известно [1], квадратная матрица $[a_{ij}]$, $i,j=1,2,\dots,n$, называется матрицей смежности графа G с n вершинами, если каждый элемент матрицы a_{ij} равен 1, если существует дуга, ведущая из вершины x_i в вершину x_j, или 0, если не существует такой дуги.

Решать многие практические задачи на сетях бывает более удобно, когда матрица смежности приведена к треугольному виду. С точки зрения нумерации вершин, это соответствует тому, что у дуги $u(x,y)$ номер начала $\nu(x)$ меньше номера конца $\nu(y)$.

В настоящей заметке предлагается алгоритм решения следующей задачи: требуется для графа $G(X,U)$ выбрать функцию $\nu: X \to N$, где $N=\{0,1,2,\dots,|X|\}$, такую, что $\nu(x)<\nu(y)$, если $y\in\Gamma x$. Известно также [2], что эта задача имеет решение, если в сети нет контуров.

В настоящей заметке используется терминология теории графов [1].

Будем считать вначале, что вершины занумерованы в произвольном порядке. Очевидно, что $\nu(x)=i$.

Алгоритм А2.

Шаг 0. /Нумерация входов сети/

Выделим подмножество

$$\tilde{X}^0=\{x_1^0, x_2^0,\dots,x_\ell^0\}\subset X$$

входов сети, т.е. тех вершин, для которых $\Gamma^{-1}x_i^0=\phi$, $i=1,2,\dots,\ell$. Для каждого элемента x_i^0 этого множества положим

$$\nu(x_i^0)=i\ ,\quad \text{где } i=0,1,2,\dots,\ell-1.$$

Пусть вершина x_p^{k-1}, $p\geqslant 0$, $k\geqslant 1$ уже занумерована.

Шаг К. Рассмотрим множество Γx_p^{k-1}. Выделяем подмножество $\tilde{X}^k\subset\Gamma x_p^{k-1}$, для каждого элемента x_i^k которого выполнено условие

$$\Gamma^{-1}x_i^k\setminus\Big(\bigcup_{j<k}\tilde{X}^j\Big)=\phi\,. \qquad /1/$$

Если $\tilde{X}^k=\{x_{i_1}^k,\dots,x_{i_{\ell_k}}^k\}\neq\phi$, то полагаем

$$\nu(x_{i_1}^k)=\nu(x_p^{k-1})+1,\dots,\nu(x_{i_{\ell_k}}^k)=\nu(x_p^{k-1})+\ell_k\,.$$

Повторяем процесс до тех пор, пока не будут перенумерованы все вершины.

Докажем, что предложенный алгоритм действительно дает решение поставленной задачи. Доказательство основано на следующих предложениях.

П р е д л о ж е н и е 1.

$$\widetilde{X}^k \cap \widetilde{X}^\ell = \emptyset, \qquad \text{если } k \neq \ell.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из условия /I/.

П р е д л о ж е н и е 2. $\nu(X)$ определена для всех $X \in X$

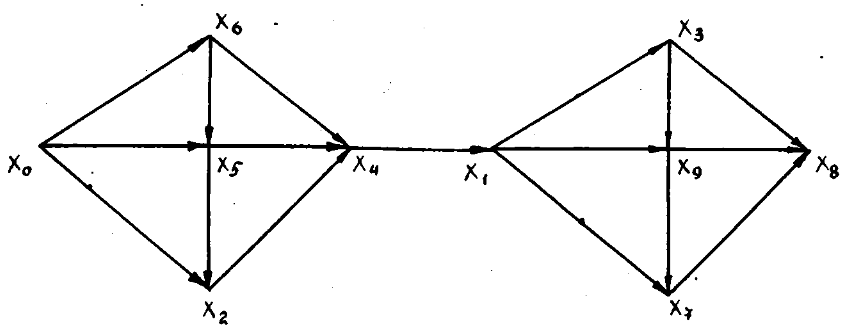
Из связности графа и предложения I. вытекает, что

$$X = \bigcup_k \widetilde{X}^k.$$

Отсюда и из того, что функция $\nu(X)$ определена для всех $X \in \widetilde{X}^k$ $(0 < k \leqslant n)$ следует справедливость предложения 2.

П р е д л о ж е н и е 3. Функция $\nu(X)$ определена однозначно с точностью до порядка нумерации вершин в множестве $\widetilde{X}^k$, $k = 0, 1, \ldots$.

Пример.



$\widetilde{X}^0 = \{X_0\}$; $\widetilde{X}^1 = \{X_6\}$; $\widetilde{X}^2 = \{X_5\}$; $\widetilde{X}^3 = \{X_2\}$; $\widetilde{X}^4 = \{X_4\}$; $\widetilde{X}^5 = \{X_1\}$; $\widetilde{X}^6 = \{X_3\}$; $\widetilde{X}^7 = \{X_9\}$; $\widetilde{X}^8 = \{X_7\}$; $\widetilde{X}^9 = \{X_8\}$.

<u>Описание программы</u>

Исходными данными, вводимыми программой, являются: $n = |X| - 1$, где $|X|$ - число вершин в сети. $A = [a_{ij}]$ - матрица смежности размерностью $(n+1) \times (n+1)$.

В результате печатается массив $t_i = j$, где $i = 0, 1, \ldots, n$, j -номер вершины сети, для которой $\nu(X_j) = i$, и $[d_{ij}]$ - уже преобразованная матрица смежности.

<u>Программа</u>

<u>начало</u>

  <u>целый</u> $i, j, k, s, n, \alpha, \beta, p', p1$;

  ввод (n);

<u>начало</u>

  <u>целый массив</u> $t, \ell\,[0:n]$; <u>массив</u> $A, d\,[0:n, 0:n]$;

  <u>процедура</u> $B(i)$;

  <u>начало</u> <u>целый</u> m;

   $\alpha := 0$; $j := 1$;

   <u>для</u> $m := 0, \ldots, n$ <u>цикл</u>

   <u>если</u> $d[i, m] > 0$ <u>то</u> $\{\ell[j] := m;\ \alpha := j;$

$j:=j+1;\ d[i,m]:=0\}$

<u>конец;</u>

<u>процедура</u> Π;

<u>начало</u> <u>целый</u> m;

$j:=1;\ M:\ \ i:=\ell[j];$

<u>для</u> $m:=0,\dots,n$ <u>цикл</u>

<u>если</u> $d[m,i]>0$ <u>то</u> $\{j:=j+1;$ <u>если</u> $j\leq\alpha$ <u>то</u> <u>на</u> M

<u>иначе</u> <u>на</u> $\mathcal{L}\}$ <u>иначе</u> $\{$ <u>если</u> $m=n$ <u>то</u> $\{\beta:=s;$

$t[s]:=\ell[j];\ s:=s+1;\ j:=j+1;$ <u>если</u> $j\leq\alpha$ <u>то</u> <u>на</u> $M\}\};$

$\mathcal{L}$: <u>конец;</u>

ввод (d);

$A[,]:=d[,];\ s:=1;\ i:=0;\ B(i);\ \Pi;\ p:=1;$

$M1: p1:=\beta;$ <u>для</u> $k:=p,\dots,p1$ <u>цикл</u>

$\{B(t[k]));$ <u>если</u> $\alpha=0$ <u>то</u> <u>на</u> $M2;\Pi;M2:\};$

<u>если</u> $p1<n$ <u>то</u> $\{p:=\beta-p1+1;$ <u>на</u> $M1\};\ t[0]:=0;$

<u>для</u> $k:=0,\dots,n$ <u>цикл</u>

<u>для</u> $s:=1,\dots,n$ <u>цикл</u>

$d[k,s]:=A[t[k],t[s]];$ вывод (t,d)

<u>конец</u>

<u>конец</u> ж

Поступила в редакцию 4.3.1970 г.

Л и т е р а т у р а.

1. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М, 1962.

2. И. Фидрих, О перенумерации графов, Acta Mathematica. Acad. Sci. Hung., t.16, N1-2, 1965.