Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.512.25/.26+519.3:330.115.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОТОКА ПРИ НАЛИЧИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ.

В.А.Евстигнеев

Известно, что при решении транспортной задачи на сети часто возникает необходимость построения максимального потока $\varphi(u)$, минимизирующего некоторый функционал $E(\varphi)$ при наличии дополнительного ограничения. В настоящей заметке описывается один возможный подход к решению задач такого вида. В заметке используется терминология теории графов [6].

Пусть $G(X,U)$ - сеть с входом x_0 и выходом z; $c(u), b(u), d(u)$ суть некоторые константы, поставленные в соответствие дуге u.

Требуется найти максимальный поток $\varphi(u)$, минимизирующий функционал

$$E(\varphi)=\sum_{u\in U}\varphi(u)b(u) \qquad /1/$$

при условиях:

$$а/\ 0\leq\varphi(u)\leq c(u), \qquad /2/$$

$$б/\ \sum_{u\in U}\varphi(u)d(u)\leq D_0, \qquad /3/$$

где D_0 - константа, заданная a priori.

Пусть $M=\{\mu^k_{0z}\}$ - совокупность всех элементарных путей из x_0 в z. Очевидно, что

$$D_0\geq\min_M\sum_{u\in\mu^k_{0z}}d(u)=D_1. \qquad /4/$$

При этом, если $D_0<D_1$, задача неразрешима; если $D_0=D_1$, задача сводится к отысканию кратчайшего пути в сети G с $d(u)$, взятыми в качестве длин дуг.

С другой стороны,

$$D_0\leq\sum_{u\in U}\varphi_0(u)d(u)=D_2, \qquad /5/$$

где φ_0 - поток, минимизирующий /1/ и удовлетворяющий условию /2/. При $D_0>D_2$ ограничение не играет никакой роли.

Поскольку проверка условий /4/, /5/ достаточно трудоемка, было бы желательно, чтобы алгоритм учитывал эти условия автоматически. Предлагаемый алгоритм состоит из двух фаз: 1-я фаза заканчивается построением максимального потока $\bar{\varphi}$, удовлетворяющего условию /3/, во 2-ой фазе поток $\bar{\varphi}$ преобразуется в оптимальный поток φ_0.

Алгоритм.

I-я фаза.

Шаг I.I. Строим путь μ, для которого

$$d=\sum_{u\in\mu} d(u)=\min_{M}\sum_{u\in\mu^{\kappa}_{oz}} d(u). \qquad /6/$$

Шаг I.2. Определяем поток φ по пути μ, исходя из условия

$$\varphi=\min\left\{\min_{u\in\mu} c(u), \left[\frac{D_0}{d}\right]\right\}, \qquad /7/$$

где $[X]$ обозначает целую часть X.

Если $\varphi<1$, то переходим к шагу 4. Если

$$\min_{u\in\mu} c(u) > \left[\frac{D_0}{d}\right],$$

то решением задачи будет путь μ с потоком

$$\varphi=\left[\frac{D_0}{d}\right].$$

В противном случае переходим к шагу I.3.

Шаг I.3. Полагаем

$$c'(u)=\begin{cases} c(u),\ u\notin\mu\ ; & \\ c(u)-\varphi, u\in\mu, u & \text{- прямая дуга пути } \mu; \\ \varphi, u\in\mu, u & \text{- обратная дуга пути } \mu; \end{cases} \qquad /8/$$

$$d'(u)=\begin{cases} -d(u), u\in\mu, u & \text{- обратная дуга пути } \mu; \\ d(u) & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad /9/$$

$$D_0'=D_0-\varphi\cdot d. \qquad /10/$$

Сеть с пропускными способностями $c'(u)$ и "стоимостями" $d'(u)$ обозначим через G'.

Повторяем шаги I.I - I.3, взяв вместо сети G сеть G' и вместо D_0 - величину $D_0'=D_0-\varphi d$.

2-я фаза.

Пусть $\bar{\varphi}$ - поток, построенный в I-й фазе, для которого

$$\sum_{u\in U}\bar{\varphi}(u)d(u)=\bar{D}\le D_0.$$

Шаг 2.I. Выделяем все циклы K в сети G с потоком $\bar{\varphi}$, удовлетворяющие условиям /допустимые циклы/:

а/ $\bar{\varphi}(u)<c(u)$ - для прямых дуг цикла;

б/ $\bar{\varphi}(u)>0$ - для обратных дуг цикла;

в/ $\sum_{u\in K} b(u)<0$, где $b(u)>0$ для прямых и $b(u)<0$ для обратных дуг цикла.

Шаг 2.2. Упорядочиваем множество $\{K_i\}$ допустимых циклов по возрастанию величины $\sum b(u)$. Имеем:

$$K_1, K_2, \ldots, K_r.$$

Шаг 2.3. Беря циклы K_i в указанном порядке, определяем величину сдвига θ_i потока на каждом цикле. Алгоритм заканчивается, как только

$$\sum_{i=1}^{S}\theta_i \sum_{u\in K_i} d(u) \leq D_0-\bar{D} < \sum_{i=1}^{S-1}\theta_i \sum_{u\in K_i} d(u)+(\theta_S+1)\sum_{u\in K_S} d(u).$$

Замечание. Очевидно, что в случае, когда θ_S есть наибольший возможный сдвиг в цикле K_S, то в левой части неравенства вместо $(\theta_S+1)\sum_{u\in K_S} d(u)$ следует брать $\theta_S\sum_{u\in K_S} d(u)+\sum_{u\in K_{S+1}} d(u)$, что неравенство только усиливает.

Докажем, что предложенный алгоритм действительно дает решение поставленной задачи.

В самом деле, пусть g_1 - подсеть G и $\bar{\varphi}$ - максимальный поток по ней такой, что

$$\sum_{u\in g_1}\bar{\varphi}(u)d(u)=\sum_{u\in g}\varphi_0(u)d(u),$$

или, перейдя к эквивалентным параллельным сетям [7], такой, что

$$\sum_{\mu_i\in g}\varphi_{0i}\, d_i=\sum_{\mu_j\in g_1}\bar{\varphi}_j\, d_j. \qquad /12/$$

Из описания алгоритма следует, что

$$d_i \leq d_j$$

для любых $\mu_i\in g$ и $\mu_j\in g_1$, так что из /12/ немедленно получаем, обозначив $\underline{d}=\max_{\mu_i} d_i$, $\bar{d}=\min_{\mu_j} d_j$,

$$\sum_{\mu_i\in g}\varphi_{0i}\, d_i \leq \underline{d}\sum_{\mu_i\in g}\varphi_{0i} < \bar{d}\sum_{\mu_j\in g_1}\bar{\varphi}_j \leq \sum_{\mu_j\in g_1} d_j\bar{\varphi}_j,$$

т.е. $\sum_{\mu_i\in g}\varphi_{0i} > \sum_{\mu_j\in g_1}\bar{\varphi}_j$. Последнее означает, что в сети G не существует потока $\bar{\varphi}$ с той же "стоимостью" $\sum\bar{\varphi}(u)d(u)$, что и φ_0, величина $\bar{\Phi}$ которого была бы больше величины Φ_0 потока φ_0.

Пусть $\bar{\Phi}=\Phi_0$ и для потоков φ_0 и $\bar{\varphi}$ выполнено условие /12/. Предположим, что

$$\sum_{u\in g}\varphi_0(u)b(u) > \sum_{u\in g_1}\bar{\varphi}(u)b(u).$$

Последнее невозможно, так как в противном случае в сети G нашелся бы цикл K [2], сдвиг потока на котором уменьшал бы функционал $E(\varphi_0)$, не изменяя функционала $\sum\varphi_0(u)\,d(u)$.

Реализация I-й фазы алгоритма не вызывает особых трудностей, поскольку здесь может быть использован любой алгоритм построения оптимального потока типа алгоритма Форда-Фалкерсона [4] /В данном случае использован алгоритм X_y[3]/.

Что касается 2-й фазы, то здесь может быть использован любой алгоритм, аналогичный методам последовательного улучшения плана решения транспортной задачи /распределительный [1,4], потенциалов [1], графоаналитический [2] и т.д./.

Легко видеть, что эффективность алгоритма достаточно высока при решении таких задач, в которых либо величина получаемого потока близка к величине минимального разреза, либо число циклов в сети невелико.

Частным случаем поставленной задачи является задача отыскания кратчайшего пути, удовлетворяющего одному линейному ограничению. Для решения ее могут быть использованы алгоритмы отыскания k -го кратчайшего пути [5].

Применяя полученные результаты к сетевой транспортной задаче по времени, можно сформулировать следующие утверждения. Пусть $t(u)$ - время пробега единицы груза по дуге u.

Т е о р е м а. Пусть g -подсеть, определяемая потоком φ_0, минимизирующим функционал $\sum_{u\in g} \varphi_0(u)\, t(u)$ и удовлетворяющим условиям /2/, /3/. Тогда для любой подсети $g_1 \subset G$ с потоком $\bar\varphi$, для которого стоимость перевозки груза P равна стоимости перевозки того же груза по сети g, имеем

$$T(P,g_1) \geqslant T(P,g).$$

где $T(P,g)$ - время перевозки груза P по подсети g.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности полагаем $g_1 \neq g$. Теорема утверждает, что соотношения $\left(t_l = \sum_{u\in\mu_l} t(u)\right)$

$$\sum_{\mu_i\in g} (T+1-t_i)d_i\varphi_i = \sum_{\mu_j\in g_1} (T+1-t_j)d_j\bar\varphi_j, \qquad /13а/$$

$$\sum_{\mu_i\in g} (T+1-t_i)\varphi_i \leqslant \sum_{\mu_j\in g_1} (T+1-t_j)\bar\varphi_j, \qquad /13б/$$

$$d_i \leqslant d_j \quad \text{для любых } \mu_i \in g, \mu_j \in g_1 \qquad /13в/$$

удовлетворяются одновременно. Однако легко видеть, что для $\bar\varphi_j$, удовлетворяющих /13б/, и d_i, d_j удовлетворяющих /13в/, равенство /13а/ выполнено быть не может.

С л е д с т в и е 1. Если путь $\bar\mu$ таков, что

$$V(\bar\mu,T) = \max_{\mu\in G} V(\mu,T)$$

$$d(\mu)\cdot\varphi(\mu) \leqslant D_0$$

и подсеть g_1, определенная выше, состоит из одного пути, то

$$g_1 = \bar\mu$$

С л е д с т в и е 2. Если подсеть g состоит более чем из одного пути, то в общем случае

$$\bar\mu \notin g.$$

Данное утверждение следует из того, что замена в /13б/ знака $\leqslant$

на противоположный делает систему /13/ разрешимой, т.е. найдутся такие $\overline{\varphi}_i$, удовлетворяющие /13б/, что равенство /13а/ будет выполнено для d_i, d_j, удовлетворяющих /13в/.

Поступила в редакцию 23.2.1970 г.

Литература

1. Е.Г.Гольштейн, Д.В.Юдин, Задачи линейного программирования транспортного типа, Изд-во "Наука", М., 1969.

2. Хоанг Туй, Графы и транспортные задачи, Сиб.мат.журнал,т.IУ, № 2, 1963.

3. T.C.Hu, Minimum-cost flows in convex-cost net-works. "Naval Res. Log. Quart", 13, N1, 1966.

4. Л.Форд, Д.Фалкерсон, Потоки на сетях, Изд-во "Мир", М.,1966.

5. M.Pollack, Solutious of the kth Best Route Through a Network-A Review, J. of Math. Analysis and Appl, 3, 1961, pp. 547-559.

6. К.Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.

7. В.А.Евстигнеев, Транспортная задача по времени I, Дискретный анализ, Новосибирск, вып.13, 1968.