Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.519.1.

О СВЯЗИ РАДИУСА ОРГРАФА С ЧИСЛОМ ЕГО ДУГ

Ш.М.Исмаилов /Баку/

В работе рассматривается обыкновенный орграф $G(X,U)$ с бесконечным радиусом. Находится оценка для количества дуг, которая обеспечивает конечность радиуса. Для этой цели сначала доказываются некоторые леммы о квадратичных формах специального вида.

Пусть $\rho(x,y)$ означает число дуг кратчайшего пути, ведущего из x в y, и $r(G)=\min\limits_{x}\max\limits_{y}\rho(x,y)$ есть радиус орграфа.

Если вершина y недостижима из x, то говорят, что длина пути из x в y равна бесконечности. Из определения радиуса ясно, что если для всякой $x\in X$ существует $y\in X$ такая, что y недостижима из x, то радиус орграфа бесконечен.

Л е м м а I. Квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 ,$$

где

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n ;$$

$x_i \geqslant 1$ -целые числа и $n > k$, достигает максимума при условии: только одно слагаемое $x_i = n-k+1$, а все остальные равны I.

Из этой леммы получаем.

С л е д с т в и е I. Квадратичная форма

$$\sum_{\substack{i=1\\ j\geqslant i+1}}^{k} x_i x_j ,$$

где $x_i \geqslant 1$ - целые числа и

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n,\ n > k ,$$

достигает минимума при условии, сформулированном в лемме I.

Из следствия I получаем

С л е д с т в и е 2. Квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{\substack{i=1\\ j\geqslant i+1}}^{k} x_i x_j ,$$

где $x_i \geq 1$ целые числа,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

и $n > k$, достигает максимума при условии, сформулированном в лемме I.

Л е м м а 2. Квадратичная форма

$$F \equiv \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{\substack{i=1\\ j\geq i+1}}^{k} x_i x_j - \sum_{\substack{p=1\\ q\geq p+1}}^{r+1} x_p x_q , \qquad /I/$$

где $r < k-1$, $x_i \geq 1$ - целые числа и $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = n$, достигает максимума тогда и только тогда, когда только одно из слагаемых $x_i = n-k+1$, где $i \geq r+2$, а все остальные равны I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что /I/ достигает максимума при $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \ldots, x_k^0$,

где $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^0 = n$

и $x_i^0 \geq 1$ -целые числа, то есть

$$F^0 \equiv \max F = \sum_{i=1}^{k} x_i^{0^2} + \sum_{\substack{i=1\\ j\geq i+1}}^{k} x_i^0 x_j^0 - \sum_{\substack{p=1,\\ q\geq p+1}}^{r+1} x_p^0 x_q^0 . \qquad /2/$$

легко заметить, что в /2/ $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{r+1}^0$ равны единице. Подставляя в /2/ значения $x_p^0 = 1$, где $p = 1, 2, \ldots, r+1$, получаем:

$$F^{0,1} \equiv (\max F)\Big|_{\substack{x_p^0 = 1\\ p=\overline{1,(r+1)}}} = \sum_{i=r+2}^{k} x_i^{0^2} + \sum_{\substack{i=r+2\\ j\geq i+1}}^{k} x_i^0 x_j^0 + n + rn - r^2 - r,$$

где $\sum\limits_{i=r+2}^{k} x_i^0 = n - r - 1$ и $x_i^0 \geq 1$ - целые числа.

Учитывая следствие 2 и то, что n и r -фиксированные числа, завершаем доказательство необходимости /достаточность тривиально доказывается от противного/.

Пусть $G(X,k,r)$ - орграф, не имеющий кратных дуг, где $|X| = n$ - количество вершин, k -число бикомпонент /определение см. ниже/, r - радиус.

О п р е д е л е н и е. Орграф $G(X,U)$ бисвязен /сильносвязный/, если любые $x, y \in X$ взаимно достижимы /т.е. существует путь из x в y, и наоборот/. Максимальный подграф $G'(X',U')$ орграфа $G(X,U)$, где $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$; называется бикомпонентой, если он бисвязен. Бикомпонента называется антитупиковой.если в нее не заходит извне ни одна дуга.

Л е м м а 3. Радиус орграфа бесконечен тогда и только тогда, когда количество a_t антитупиковых бикомпонент $\geqslant 2$.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть связные орграфы /для несвязных орграфов лемма тривиальна/.

Пусть $a_t \geqslant 2$. Из определения антитупиковых бикомпонент можно получить соотношение $r = \infty$.

Пусть, наоборот, $r = \infty$. Очевидно, по крайней мере одна антитупиковая бикомпонента $\mathcal{Y}$ в орграфе существует /в противном случае $r < \infty$ /.

Ясно, $\rho(x, y) = \infty$, где y - произвольная вершина бикомпоненты $\mathcal{Y}$ и $x \notin \mathcal{Y}$.

Так как $r = \infty$, то существует по крайней мере одна вершина $x^* \in X$ такая, что $\rho(y, x^*) = \infty$. Тогда $a_t \geqslant 2$.

Пусть орграф $G(n, k, r)$ критический в том смысле, что добавление дуги либо уменьшает количество бикомпонент, либо приводит к появлению кратчайших дуг, либо делает r конечным.

Упорядочим бикомпоненты $G(n, k, r)$ следующим образом. По лемме 3 количество антитупиковых бикомпонент орграфа $a_t \geqslant 2$. Все эти бикомпоненты пронумеруем произвольным образом:

$$G_1, G_2, \ldots, G_{a_t}.$$

Далее, пусть G_{a_t+1} - та бикомпонента, которая достижима только из антитупиковых бикомпонент. Она единственная, так как в противном случае орграф $G(n, k, r)$ некритический /в данном смысле/.

Пусть, далее, G_{a_t+2} - та бикомпонента, которая является достижимой только из $G_1, G_2, \ldots, G_{a_t}, G_{a_t+1}$; она также единственна. Продолжая процесс, обозначим через G_k бикомпоненту, достижимую из всех бикомпонент орграфа $G(n, k, r)$.

Теорема. Орграф $G(n, k, r=\infty)$ обладает максимальным /в классе орграфов с $r = \infty$ / количеством дуг тогда и только тогда, когда одна из его неантитупиковых бикомпонент имеет $n-k+1$ вершин, а все остальные бикомпоненты одновершинные. При этом искомое максимальное число $N_{a_t}(n, k)$ равно

$$n(n-k) + \frac{(k-a_t)(k+a_t-1)}{2}.$$

Доказательство. Очевидно, эту теорему достаточно доказать для класса критических орграфов. В любом критическом /в указанном смысле/ орграфе можно пронумеровать его бикомпоненты вышеописанным способом.

Пусть $G(n, k, r)$ - произвольный критический орграф, и его i-я бикомпонента имеет $n_i \geqslant 1$ вершин. Количество дуг такого орграфа равно:

$$N^*_{a_t}(n, k) = \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1) + \sum_{j=a_t+1}^{k} n_j\left(\sum_{p=j+1}^{k} n_p + \sum_{q=1}^{a_t} n_q\right). \qquad /3/$$

Равенство /3/ приводится к виду:

$$N^*_{a_t}(n,k)=\sum_{i=1}^{k} n_i^2+\sum_{\substack{i=1\\ j\geq i+1}}^{k} n_i n_j-\sum_{\substack{p=1\\ q\geq p+1}}^{a_t} n_p n_q - n, \qquad /3'/$$

где $n_i \geq 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$, $a_t \leq k-1$.

Применяя лемму 2, завершаем доказательство:

$$N_{a_t}(n,k)=\max N^*_{a_t}(n,k)=n(n-k)+\frac{(k-a_t)(k+a_t-1)}{2}.$$

С л е д с т в и е 3. Если число дуг связного критического орграфа больше, чем

$$N_2(n,k)=n(n-k)+\frac{(k-2)(k+1)}{2}, \qquad /4/$$

то r - радиус орграфа конечен.

Действительно, при $a_t > 2$ всегда

$$N_2(n,k) > N_{a_t}(n,k).$$

С л е д с т в и е 4. Если для связного критического орграфа с $n>3$ вершинами и M дугами $/M \geq n-1$ в силу связности/ удовлетворяется условие*/

$$n \leq \left[\frac{3+\sqrt{4M-3}}{2}\right] \qquad /5/$$

то радиус орграфа конечен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как видно из /4/, $N_2(n,k)$ достигает максимума /при фиксированном n /, когда $k=3$. По лемме 3 соотношение $k<3$ невыполнимо.

Пусть $n=\left[\frac{3+\sqrt{4M-3}}{2}\right]$, тогда $M \geq n(n-3)+3$; из следствия 3 при $k=3$ вытекает, что $r<\infty$.

Поступила в редакцию 5.I.1970 г.

Л и т е р а т у р а

1. К.Берж, Теория графов и ее применения, "ИЛ", 1962.
2. О.Оре, Теория графов, изд-во "Наука", 1968.

*/ $[x]$ -означает целую часть x /по недостатку/.