Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.51:621.391.

КОНЕЧНЫЙ АВТОМАТ КАК УПРАВЛЯЕМАЯ СИСТЕМА

Ю.Г.Марков

Поведение автомата, помещенного в некоторую среду, определяется, как известно, свойствами этой среды и внутренними свойствами /структурой/ самого автомата. Можно пытаться строить автоматы, приспосабливающиеся к среде в смысле того или иного выбранного критерия. На этой почве возник уже довольно широкий круг задач, который имеет явную тенденцию к дальнейшему быстрому росту. В задачах такого рода конечный автомат рассматривается как объект, допускающий целенаправленную перестройку своей внутренней организации в процессе обучения и самоусовершенствования.

Можно, однако, выдвинуть и другой подход, представляющий определенный интерес с точки зрения приложений к некоторым задачам из области исследования операций и экономической кибернетики. А именно автомат можно рассматривать как объект с заданной организацией, помещенный в "искусственную" /управляющую/ среду с определенным образом подобранными свойствами. Здесь автомат становится управляемой системой, а среда - управляющим фактором.

Данный подход подсказывает постановку задач, близких по смыслу к типичным задачам математического программирования. В данной статье будут рассмотрены некоторые простейшие задачи такого типа.

Напомним вначале одно из определений конечного автомата [1].

Конечным автоматом называют пятерку $T=(S,A,B,H,N)$,

где

$S=\{s_i \mid i\in I_s\}$ - множество состояний автомата,

$A=\{a_j \mid j\in I_a\}$ - входной алфавит,

$B=\{b_k \mid k\in I_b\}$ - выходной алфавит,

$H=\{H_a \mid a\in A\}$ - множество отображений из S в S,

$N=\{N_a \mid a\in A\}$ - множество отображений из S в B,

I_s, I_a, I_b - конечные множества.

Конечный автомат называется конечным полуавтоматом, если B и N пустые множества $(B=\varnothing, N=\varnothing)$. В дальнейшем слово "конечный" будем для краткости опускать.

Пусть $T=(S,A,H)$ - полуавтомат. Обозначим через A^* свободный моноид /т.е. свободную полугруппу с единицей/, порожденный алфавитом A и пустым словом e. Каждому слову $x=a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_m}$ из A^* соответствует отображение $H_x=H_{a_{j_1},a_{j_2}\ldots a_{j_m}}=H_{a_{j_1}}H_{a_{j_2}}\ldots H_{a_{j_m}}$, определенное на S со значениями в S.

Заметим, что множество $H^*=\{H_x \mid x\in A^*\}$ также образует моноид, где роль единицы играет тождественное отображение H_e. Условимся через $s_i H_x$ обозначать состояние, в которое переходит T под действием входного слова $x \in A^*$ из состояния $s_i \in S$.

Вообще значение какой-либо функции f от некоторого аргумента x часто будем в дальнейшем обозначать как xf .

Длиной слова $x = a_1 a_2 \dots a_n \in A^*$ назовем, как обычно, число $\ell = \ell(x)$ входящих в x букв из алфавита A .

Если e -пустое слово, то $\ell(ex) = \ell(xe) = \ell(x)$. Слово x длины ℓ будем иногда обозначать через x_ℓ . Через A_ℓ^* обозначим подмножество слов из A^* длины ℓ .

Определение I. A^ℓ -матрицей автомата /полуавтомата/ T назовем матрицу, элементами которой являются множества слов:

$$a_{ij}^{(\ell)} = \{x \in A_\ell^* \mid s_i H_x = s_j\},\ i, j \in I_s . \qquad /1/$$

Определение 2. T -произведением матриц $A^{\ell_1} = (a_{ik}^{(\ell_1)})$ и $A^{\ell_2} = (a_{kj}^{(\ell_2)})$, $(i, k, j \in I_s)$ назовем матрицу $A^{\ell_1 + \ell_2} = A^{\ell_1} A^{\ell_2}$,элементами которой являются множества слов:

$$a_{ij}^{(\ell_1+\ell_2)} = \bigcup_{k \in I_s} a_{ik}^{(\ell_1)} a_{kj}^{(\ell_2)}, \qquad /2/$$

где

$$a_{ik}^{(\ell_1)} a_{kj}^{(\ell_2)} = \left\{xy \mid x \in a_{ik}^{(\ell_1)},\ y \in a_{kj}^{(\ell_2)}\right\}. \qquad /3/$$

Причем $a_{ik}^{(\ell_1)} a_{kj}^{(\ell_2)} = \Phi$, если и только если $a_{ik}^{(\ell_1)} = \Phi$ или $a_{kj}^{(\ell_2)} = \Phi$. Очевидно, что T - умножение коммутативно, т.е.

$$A^{\ell_1} A^{\ell_2} = A^{\ell_2} A^{\ell_1}. \qquad /4/$$

Предложение I. Пусть $T = (S, A, H)$ -полуавтомат, $s_i, s_j \in S$ и $\alpha = (A^\ell)$ - последовательность A^ℓ -матриц полуавтомата $(\ell = 1, 2, \dots)$.

Непустое множество $a_{ij}^{(\ell_0)}$ является множеством слов минимальной длины, переводящих T из состояния s_i в состояние s_j , если $a_{ij}^{(\ell)} = \Phi$ для всех $\ell < \ell_0$.

Справедливость этого предложения непосредственно следует из определения I, согласно которому $a_{ij}^{(\ell)}$ есть множество входных слов длины ℓ , переводящих T из состояния s_i в состояние s_j . Для ℓ_0 , очевидно, имеем:

$$\ell_0 = \min_{a_{ij}^{(\ell)} \neq \Phi} \ell . \qquad /5/$$

Задача построения множества $a_{ij}^{(\ell_0)}$ решается путем последовательного вычисления матриц

$$A^1, A^2 = A^1 A^1,\ A^3 = A^2 A^1, \dots$$

в соответствии с определением T -произведения.

Матрицу A^1 получаем на основе задания полуавтомата,используя отображения H_a , $a \in A$. Пусть $T = (S, A, B, H, N)$ - автомат с начальным состоянием s_i и пусть $b \in B$. Каждому состоянию $s_j \in U$, где U определяется как

$$U=\{s_j \in S \mid \exists a\ (s_j N_a = b)\},$$

поставим в соответствие длину $\ell_0(s_j)$ слова из множества $a_{ij}^{(\ell)}$. Через s_{j_0} обозначим состояние такое, что:

$$\ell_0(s_{j_0}) = \min_{s_j \in U} \ell_0(s_j). \qquad /6/$$

Следствие I. Слова $x \in A^*$ минимальной длины для которых справедливо $s_i N_x = b$, образуют множество

$$a_{ij_0}^{(\nu)} a_{\nu+1} = \{ y a_{\nu+1} \mid y \in a_{ij_0}^{(\nu)} \}, \qquad /7/$$

где $\nu = \ell_0(s_{j_0})$.

Следствие очевидно, если принять во внимание, что для входного слова $x = a_1 a_2 \ldots a_{\nu+1}$ отображение N_x определяется как:

$$N_x = \dot{H}_{a_1 a_2 \ldots a_\nu} N_{a_{\nu+1}} = H_{a_1} H_{a_2} \ldots H_{a_\nu} N_{a_{\nu+1}}. \qquad /8/$$

Итак, мы имеем возможность получить желаемый выходной сигнал $b \in B$ за минимальное время функционирования автомата.

Можно представить себе более общий случай, имеющий смысл для различных приложений. Пусть $\varphi : B^* \to R$ -некоторое отображение из B^* в R, где B^* - свободная полугруппа, порожденная алфавитом B, R -некоторое числовое множество /например, множество действительных чисел/, которое мы будем называть множеством выходных характеристик автомата.

Если на вход автомата подается слово $x \in A^*$, то на выходе автомата мы получаем некоторое слово $y \in B^*$ с характеристикой $\varphi(y)$.

Задача состоит в том, чтобы обеспечить наперед заданную выходную характеристику автомата за минимальное время.

Очень часто, особенно в экономических задачах, интересуются суммарным выходом системы. Допустим, например, что каждой букве $b \in B$ на выходе системы соответствует некоторый доход $\varphi(b) > 0$. И мы хотим, чтобы за минимальное время функционирования системы суммарный доход достиг некоторой планируемой величины φ_0.

Продолжение функции φ на множество B^* естественно определить следующим образом. Если $y = b_1 b_2 \ldots b_\ell \in B^*$, то:

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{\ell} \varphi(b_k). \qquad /9/$$

Определение 3. Пусть T -автомат. B^ℓ -матрицей автомата T назовем матрицу с элементами:

$$b_{ij}^{(\ell)} = \bigcup_{x \in a_{ij}^{(\ell)}} \sum_{k=1}^{\ell} \varphi(s_i N_{x_k}), \qquad /10/$$

где $x_\ell = x_k a_{k+1} \ldots a_\ell$, $a_{ij}^{(\ell)}$ -элементы A^ℓ -матрицы.

Определение 4. T -суммой матриц $B^{\ell_1} = (b_{ik}^{(\ell_1)})$ и $B^{\ell_2} = (b_{kj}^{(\ell_2)})$, $(i,k,j \in I_s)$ назовем матрицу $B^{\ell_1+\ell_2} = B^{\ell_1} \oplus B^{\ell_2}$, элементами которой являются множества:

$$b_{ij}^{(\ell_1+\ell_2)} = \bigcup_{k \in I_s} (b_{ik}^{(\ell_1)} \oplus b_{kj}^{(\ell_2)}), \qquad /11/$$

где

$$b_{ik}^{(\ell_1)} \oplus b_{kj}^{(\ell_2)} = \{x+y \mid x \in b_{ik}^{(\ell_1)}, y \in b_{kj}^{(\ell_2)}\}. \qquad /12/$$

Причем $b_{ik}^{(\ell_1)} \oplus b_{kj}^{(\ell_2)} = \phi$, если и только если $b_{ik}^{(\ell_1)} = \phi$ или $b_{kj}^{(\ell_2)} = \phi$.

Очевидно, что T -сложение коммутативно:

$$B^{\ell_1} \oplus B^{\ell_2} = B^{\ell_2} \oplus B^{\ell_1}. \qquad /13/$$

Максимальное значение рассматриваемой выходной характеристики $\varphi(y)$ /суммарного дохода/, которое мы получаем за время ℓ при переходе из состояния s_i в состояние s_j, определяется величиной

$$r_{ij}(\ell) = \max_{r \in b_{ij}^{(\ell)}} r. \qquad /14/$$

Если состояние s_i задано как начальное, то максимальный суммарный доход, который можно получить за время ℓ, будет

$$r_i(\ell) = \max_{j \in I_s} r_{ij}(\ell). \qquad /15/$$

Спрашивается, какое слово из A^* следует подать на вход автомата, чтобы получить на выходе суммарный доход $r_i(\ell)$. Иными словами, перед нами стоит задача нахождения оптимального управляющего слова /оптимального управления/.

Заметим прежде всего, что каждому слову $x_\ell \in a_{ij}^{(\ell)}$ отвечает единственное значение выходной характеристики, вычисляемое по формуле:

$$f(x_\ell) = \sum_{k=1}^{\ell} \varphi(s_i N_{x_k}), \qquad /16/$$

где $x_\ell = x_k a_{k+1} \ldots a_\ell$, $s_i N_{x_k} = b_k$.

В частности

$$f(\tilde{x}_\ell) = r_i(\ell). \qquad /17/$$

Слова $\tilde{x}_\ell \in A_\ell^*$, для которых выполняется равенство /17/, являются искомыми оптимальными управлениями.

Если $\varphi_0 > 0$ -некотрое число и мы хотим получить характеристику $\varphi(y) \geqslant \varphi_0$, то, вычисляя шаг за шагом элементы матриц B^1, $B^2 = B^1 \oplus B^1$ и т.д., мы получим в конце концов такое τ, что

$$r_i(\tau) \geqslant \varphi_0 > r_i(\tau - 1). \qquad /18/$$

Легко видеть, что τ есть минимальное время, в течение которого мы можем получить суммарный доход, не меньший, чем φ_0.

Таким образом, мы имеем следующее

Предложение 2. Пусть T -автомат с начальным состоянием $s_i \in S$, выходная характеристика которого определяется в соответствии с /9/. Тогда: а/ максимальная выходная характеристика /максимальный суммарный доход/, который можно получить за конечное время ℓ, определяется выражением /15/, а оптимальное управление $\tilde{x}_\ell \in A_\ell^*$ определяется равенством /17/; б/ минимальное время τ функционирования автомата T, в течение которого суммарный доход становится не меньше наперед заданной величины $\varphi_0 > 0$, определяется неравенствами /18/, а соответствующее оптимальное управление

$|\tilde{X}_\tau \in A^*_\tau$ -равенством /I7/, где следует подставить τ вместо ℓ .

Оптимальное управление в случае б/ совпадает с оптимальным управлением в случае а/, если мы положим $\varphi_0 = r_i(\ell)$. При этом τ совпадает с ℓ $(\tau = \ell)$. И, наоборот, если в случае а/ мы положим $\ell = \tau$, то найденное при этом оптимальное управление позволяет получить доход, не меньший, чем φ_0 , т.е. найденное оптимальное управление совпадает с оптимальным управлением для случая б/.

Предложение 2 легко обобщить на случай, когда задается некоторое подмножество $S_0 \subseteq S$ начальных состояний. В этом случае производится дополнительная максимизация выражения /I5/:

$$r(\ell) = \max_{s_i \in S_0} r_i(\ell). \qquad /19/$$

Соответственно этому во всех формулировках предложения 2 вместо $r_i(\ell)$ будет фигурировать $r(\ell)$.

Задача нахождения оптимальных управлений решается путем последовательного вычисления матриц A^ℓ и $B^\ell (\ell = 1, 2, \ldots)$ до тех пор, пока мы не пройдем заданного числа шагов /случай /а/ / или пока в соответствующих строчках B^ℓ -матрицы /номер строки совпадает с индексом начального состояния/ не появятся элементы, превышающие заданную величину φ_0 /случай /б/ /.

После этого мы обращаемся к A^ℓ -матрице и находим входные слова, соответствующие выбираемым элементам из B^ℓ -матрицы в смысле формулы /I6/. Эти слова и будут искомым оптимальным управлением.

Поступила в редакцию I5.I.I970 г.

Литература

I. A. Ginzburg. Algebraic Theory of Automata. Acad. Press, New- York-London, I968.