Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.512.25/.26.+519.3:330.115.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЗАМЕНЫ ОБОРУДОВАНИЯ

Н.С.Давидсон

В работе [I] рассматривается задача о замене оборудования, которая решается методом полного перебора. В настоящей работе предлагается другой подход к решению этой задачи, основанный на схеме динамического программирования.

Пусть на интервале времени $0 \leq t \leq T$ r_{i-1} - момент начала разработки i -го вида оборудования. Пусть нам заданы функции:

$N(r_{i-1},t)$ - потребное количество оборудования i -го вида в момент t ;

$c(r_{i-1})$ - стоимость разработки;

$a(r_{i-1})$ - стоимость производства единичного образца;

$b(r_{i-1})$ - стоимость эксплуатации единицы оборудования в единицу времени.

Кроме того, известны:

τ - срок разработки;

δ - срок службы единицы оборудования.

Будем считать, что заданные функции можно аппроксимировать формулами:

$$N(r_i,t) = e^{\alpha t} e^{-\beta(r_i+\tau)}, \qquad /1/$$

где α - коэффициент потребности, показывающий интенсивность возрастания потребности в технике;

β - коэффициент, связанный с техническим прогрессом;

$$c(r_i) = Ce^{k(r_i+\tau)};$$
$$a(r_i) = Ae^{k(r_i+\tau)}; \qquad /2/$$
$$b(r_i) = Be^{k(r_i+\tau)},$$

где k - коэффициент стоимости, показывающий интенсивность возрастания стоимости.

Требуется определить моменты начала разработок $\{r_i\}$ и их число μ , минимизирующие суммарные затраты

$$S(T) = \sum_{i=0}^{\mu} s_i$$

при условии, что удовлетворяются потребности в оборудовании в любой момент рассматриваемого интервала.

Каждое из слагаемых s_i включает в себя стоимость разработки, стоимость производства и стоимость эксплуатации $(i+1)$ -го вида оборудования:

$$s_{i-1} = c(r_{i-1}) + a(r_{i-1})[y_i(T)]^{\nu} + b(r_{i-1})\int_{r_{i-1}+\tau}^{T}[y_i(t) - \varphi_i(t)]\,dt,$$

где

$y_i(t)$ - количество образцов i -го вида оборудования, произведенных к моменту времени t ;

$\varphi_i(t)$ - количество образцов i -го вида оборудования, снятых с с производства к моменту времени t /"выброшенных" к моменту t /;

ν - показатель зависимости стоимости от объема производства.

В настоящей работе для простоты полагаем $\nu=1$.

I°. Пусть на отрезке $(0,T)$ необходимо произвести только одну замену оборудования при условии, что к началу рассматриваемого интервала времени разработка первого вида оборудования закончена, т.е. $r_0=-\tau$. Допустим, что разработка второго вида оборудования должна начаться в момент $t=r_1$. Прежде всего требуется определить оптимальную политику замены оборудования.

Под политикой замены будем понимать совокупность функций $\{y_1, y_2, \varphi_1, \varphi_2\}$ на отрезке времени от момента $r_1+\tau$ начала производства второго вида оборудования до момента, когда снимается с эксплуатации /"выбрасывается"/ последний образец оборудования первого вида.

Если на отрезке $r_{i-1}+\tau \le t \le r_i+\tau$ имеется только один вид оборудования, то для удовлетворения потребностей должно выполняться:

$$y_i(t)-\varphi_i(t)=N(r_{i-1},t).$$

Если имеется несколько видов оборудования, необходимо выполнение тождества

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(t)-\varphi_i(t)}{N(r_{i-1},t)}\equiv 1.$$

В частности, для двух видов:

$$\frac{y_1(t)-\varphi_1(t)}{N(-\tau,t)}+\frac{y_2(t)-\varphi_2(t)}{N(r_1,t)}\equiv 1. \qquad /3/$$

В случае, когда длина интервала $(r_1+\tau, T)$ меньше δ , это соотношение имеет вид:

$$\frac{y_1(t)-\varphi_1(t)}{N(-\tau,t)}+\frac{y_2(t)}{N(r_1,t)}\equiv 1,$$

т.к. $\varphi_2(t)$ на этом отрезке равно нулю. Отсюда

$$y_2(t)=N(r_1,t)\left[1-\frac{y_1(t)-\varphi_1(t)}{N(-\tau,t)}\right],\quad r_1+\tau+0\le t\le T. \qquad /3'/$$

Согласно /I/ и /2/, суммарные затраты на первый и второй виды оборудования выражаются соответственно формулами:

$$s_0=Ay_1(T)+B\int_0^T[y_1(t)-\varphi_1(t)]dt; \qquad /4/$$

$$s_1=Ce^{k(r_1+\tau)}+Ae^{k(r_1+\tau)}y_2(T)+Be^{k(r_1+\tau)}\int_{r_1+\tau}^{T}[y_2(t)-\varphi_2(t)]dt. \qquad /5/$$

Выражения /4/ и /5/ с учетом /3/ принимают вид:

$$s_0 = Ay_1(r_1+\tau-0) + A[y_1(T)-y_1(r_1+\tau+0)] + B\int_0^{r_1+\tau-0}[y_1(t)-\varphi_1(t)]dt +$$
$$+ B\int_{r_1+\tau-0}^{T}[y_1(t)-\varphi_1(t)]dt = Ay_1(r_1+\tau-0) + \underline{A[y_1(T)-y_1(r_1+\tau+0)]} +$$
$$+ B\int_0^{r_1+\tau-0}N(-\tau,t)dt + \underline{\underline{B}}\int_{r_1+\tau+0}^{T}\underline{\underline{[y_1(t)-\varphi_1(t)]dt}}. \qquad /6/$$

$$s_1 = Ce^{k(r_1+\tau)} + Ae^{k(r_1+\tau)}y_2(T) + Be^{k(r_1+\tau)}\int_{r_1+\tau+0}^{T}y_2(t)dt =$$
$$= Ce^{k(r_1+\tau)} + Ae^{k(r_1+\tau)}[N(r_1,T) - e^{-\beta(r_1+\tau)}(y_1(T)-\varphi_1(T))] +$$
$$+ Be^{k(r_1+\tau)}\int_{r_1+\tau+0}^{T}[N(r_1,t) - e^{-\beta(r_1+\tau)}(y_1(t)-\varphi_1(t))]dt =$$
$$= Ce^{k(r_1+\tau)} + Ae^{k(r_1+\tau)}N(r_1,T) - \underline{Ae^{(k-\beta)(r_1+\tau)}[y_1(T)-\varphi_1(T)]} +$$
$$+ Be^{k(r_1+\tau)}\int_{r_1+\tau+0}^{T}N(r_1,t)dt - \underline{\underline{Be^{(k-\beta)(r_1+\tau)}}}\int_{r_1+\tau+0}^{T}\underline{\underline{[y_1(t)-\varphi_1(t)]dt.}} \qquad /7/$$

Подчеркнутые выражения до выбора политики замены неизвестны. Таким образом, выбором функций $y_1(t)$ и $\varphi_1(t)$ на отрезке времени $(r_1+\tau, T)$ надо минимизировать величину

$$\Big\{ A[y_1(T)-y_1(r_1+\tau+0)] - Ae^{(k-\beta)(r_1+\tau)}[y_1(T)-\varphi_1(T)] +$$
$$+ B(1-e^{(k-\beta)(r_1+\tau)})\int_{r_1+\tau+0}^{T}[y_1(t)-\varphi_1(t)]dt\Big\}. \qquad /8/$$

Рассмотрим сначала случай, когда производственные возможности не ограничены. Тогда требуется минимизировать /8/ при условиях:

$$\left.\begin{aligned} &y_1'(t)\geq 0; \quad \varphi_1'(t)\geq 0; \\ &y_1(t-\delta)\leq\varphi_1(t)\leq y_1(t). \end{aligned}\right\} \qquad /9/$$

Допустим, что $y_1(t)'$ и $y_1(T)$ уже выбраны. Тогда для минимизации /8/ требуется найти

$$\min_{\varphi_1(t),\varphi_1(T)}\Big\{Ae^{(k-\beta)(r_1+\tau)}\varphi_1(T) - B(1-e^{(k-\beta)(r_1+\tau)})\int_{r_1+\tau+0}^{T}\varphi_1(t)dt\Big\}. \qquad /10/$$

Так как

$$y_1(t-\delta)\leq\varphi_1(t)\leq y_1(t) \quad \text{и} \quad \varphi_1'(t)\geq 0,$$

то

$$\varphi_1(T)\geq\lim_{t\to T-0}\varphi_1(t),$$

т.е. для того, чтобы выражение /10/ было минимальным, необходимо, чтобы функция $\varphi_1(t)$ была непрерывной в точке $t=T$ слева и равной своему максимальному значению. Тогда в силу /9/, имеем

$$\varphi_1(t)=y_1(t) \quad \text{для } t\in(r_1+\tau, T].$$

Подставим в минимизируемое выражение /8/ значение $\varphi_1(t)=y_1(t)$. Теперь требуется выбрать $y_1(t)$ и $y_1(T)$ так, чтобы минимальным было выражение

$$A[y_1(T)-y_1(r_1+\tau+0)]. \qquad /11/$$

Так как $y_1'(t)\geq 0$, т.е. $y_1(t)$ - функция возрастающая, то $y_1(T)\geq y_1(r_1+\tau+0)$. Следовательно, для минимизации выражения /11/ значение функции $y_1(t)$ на отрезке $(r_1+\tau, T]$ надо положить равным $y_1(r_1+\tau)$. Таким образом, при неограниченных возможностях производства оптимальной является такая политика замены, при которой в момент $t=r_1+\tau$ производится мгновенная смена оборудования, т.е. при $t=r_1+\tau$ все "старое" оборудование выбрасывается и полностью заменяется на "новое". Начиная с этого момента, производится только "новое оборудование".

Аналогично можно доказать, что для случая, когда $T-(r_1+\tau)>\delta$, оптимальной является такая политика замены, при которой в момент $t=r_1+\tau$ производится мгновенная замена "старого" оборудования на "новое" и в дальнейшем снимаются с эксплуатации только отслужившие срок образцы "нового" вида.

Рассмотрим теперь случай, когда возможности производства ограничены, т.е. существуют величины X_i такие, что

$$y_i'(t)\leq X_i. \qquad /12/$$

Здесь нельзя, как в предыдущем случае, скачком нарастить количество образцов второго вида оборудования до необходимого значения $y_2(t)=N(r_1,t)$. Поэтому на некотором отрезке времени $(r_1+\tau, \theta)$ в силу /12/ будет выполняться

$$y_2(t)=\int_{r_1+\tau}^{t} X_2\,dt = X_2[t-(r_1+\tau)];$$

$$y_2(\theta)=X_2[\theta-(r_1+\tau)]=N(r_1,\theta)=e^{\alpha\theta}\cdot e^{-\beta(r_1+\tau)}. \qquad /13/$$

В момент $t=\theta$ должно выполняться равенство

$$\frac{y_1(\theta)-\varphi_1(\theta)}{N(-\tau,\theta)}+\frac{y_2(\theta)}{N(r_1,\theta)}=1.$$

Поскольку в этот момент имеет место /13/, заключаем, что

$$\varphi_1(\theta)=y_1(\theta),$$

т.е. к моменту $t=\theta$ все "старое" оборудование должно быть снято. Очевидно, что на отрезке $(r_1+\tau,\theta)$ $y_1(t)=y_1(r_1+\tau)$, а $\varphi_1(t)$ определяется из соотношения

$$\frac{y_1(r_1+\tau)-\varphi_1(t)}{N(-\tau,t)}+\frac{y_2(t)}{N(r_1,t)}=1.$$

Начиная с момента $t=\theta$, производится только "новое" оборудование.

Уравнение /13/ имеет решение не при любых X_2. Можно показать, что решение существует при

$$X_2\geq \alpha\, e^{1+(\alpha-\beta)(r_1+\tau)}. \qquad /14/$$

Кроме того, должно быть выполнено условие

$$\theta-(r_1+\tau)<\delta, \qquad /15/$$

т.к. в противном случае кривые $N=y_2(t)-\varphi_2(t)$ и $N=e^{\alpha t}e^{-\beta(r_1+\tau)}$ не пересекаются ни при каких конечных t.

Если не выполнено хотя бы одно из условий /14/ и /15/, то оптимальной политикой на отрезке $(r_1+\tau, T)$ будет следующая:

$$\varphi_2(t)=y_2(t-\delta),$$
$$y_2(t)=X_2[t-(r_1+\tau)].$$

При этом величина $y_1(t)-\varphi_1(t)$ определяется из соотношения /3/.

Если выполнены условия /14/ и /15/ и $\theta<T$, то на отрезке (θ,T) должно выполняться равенство

$$y_2(t)-\varphi_2(t)=N(r_1,t).$$

После того, как выбрана оптимальная политика замены, можно выписать формулы для суммарных затрат. В зависимости от длины интервала $(0,T)$ выражение для $S_1(T)$ задается различными формулами. Таким образом, задача отыскания оптимального момента замены оборудования сведена к отысканию минимума суммарных затрат $S_1(T)$.

2°. Перейдем к случаю, когда за период времени $(0,T)$ необходимо произвести две замены оборудования. Считаем, что возможности производства второго и третьего видов оборудования ограничены соответственно величинами X_2 и X_3. Суммарные затраты на первый, второй и третий виды оборудования выражаются формулами:

$$s_0(r_0,r_1)=Ay_1(r_1+\tau)+B\int_0^{\theta_1}[y_1(t)-\varphi_1(t)]dt;$$

$$s_1(r_1,r_2)=Ce^{k(r_1+\tau)}+Ae^{k(r_1+\tau)}y_2(r_2+\tau)+Be^{k(r_1+\tau)}\int_{r_1+\tau}^{\theta_2}[y_2(t)-\varphi_2(t)]dt;$$

$$s_2(r_2,T)=Ce^{k(r_2+\tau)}+Ae^{k(r_2+\tau)}y_3(T)+Be^{k(r_2+\tau)}\int_{r_2+\tau}^{T}[y_3(t)-\varphi_3(t)]dt.$$

Необходимо найти минимум суммарных затрат

$$S_2^*(T)=\min_{r_1,r_2}[s_0(r_0,r_1)+s_1(r_1,r_2)+s_2(r_2,T)]=$$
$$=\min_{r_1(r_2)<r_2<T}[S_1^*(r_2+\tau)+s_2(r_2,T)].$$

Зависимость $S_1^*(r_2+\tau)$ для $0<r_2+\tau<T$ уже известна. Формулы для вычисления $s_2(r_2,T)$ в зависимости от длины интервала (r_2,T) при выбранной оптимальной политике замены выписываются довольно просто.

Аналогично:

$$S_3^*(T)=\min_{r_2<r_3<T}[S_2^*(r_3+\tau)+s_3(r_3,T)];$$

$$S_N^*(T)=\min_{r_{N-1}<r_N<T}[S_{N-1}^*(r_N+\tau)+s_N(r_N,T)].$$

Вычисляя последовательно эти функции для заданного периода времени

T и сравнивая их между собой, мы найдем функцию $S^*_{\mu}(T)$, минимальную среди $\{S^*_k(T)\}$. Индекс μ указывает на оптимальное число замен оборудования за период T , а оптимальные моменты начала разработок находятся из зависимостей:

$$r^*_{\mu}(T),\ r^*_{\mu-1}(r^*_{\mu}),\ \ldots,\ r^*_2(r^*_3),\ r^*_1(r^*_2),\ r_0=-\tau.$$

На рис. I представлена зависимость оптимальных суммарных затрат при отсутствии замен, при одной, двух и т.д. заменах / кривые $S^*_0(T), S^*_1(T), \ldots, S^*_{\mu}(T)$ /.

Заметим, что при $0<T<T_1$ замена оборудования нецелесообразна. При $T_1<T\leq T_2$ целесообразна лишь одна замена, при $T_2<T\leq T_3$ – две замены и т. д.

Оптимальное количество замен μ определяется из условия, что $S^*_{\mu+1}(T)\geq S^*_{\mu}(T)$.

На рис. 2 представлены зависимости $S^*_0(T)$, $S^*_1(T)$ и $S^*_2(T)$. При этом предполагалось, что возможности производства не ограничены. Оптимальные моменты начала разработок $r^*_1, r^*_2, \ldots$ зависят от длины интервала $(0,T)$. Для рассмотренного примера на рис. 3 представлена зависимость $r^*_1(T)$. Аналогично могут быть построены зависимости $r^*_1(r^*_2), r^*_2(r^*_3), \ldots, r^*_{\mu-1}(r^*_{\mu}), r^*_{\mu}(T)$.

В заключение отметим, что предложенный подход к решению задачи замены оборудования позволяет ответить на вопрос об оптимальном числе замен не только для заданного интервала, но и для произвольного интервала меньшей длины.

Кроме того, если необходимо расширить первоначальный интервал $(0,T)$ до некоторого $(0,T')$, где $T'>T$, то все результаты, полученные для интервала $(0,T)$, могут быть использованы для нового интервала, что позволяет значительно сократить объем вычислительных работ.

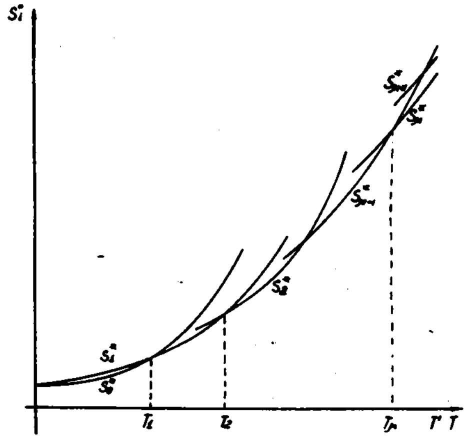

Рис. I

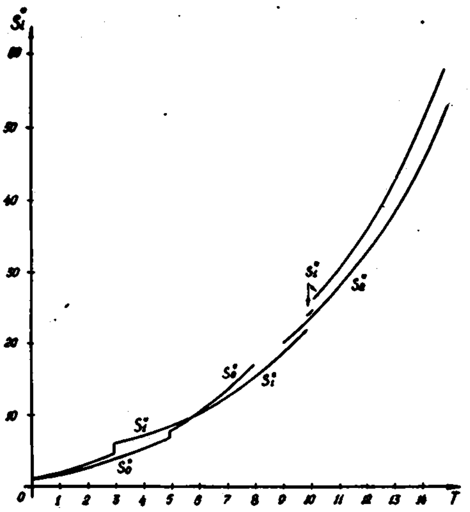

Рис. 2

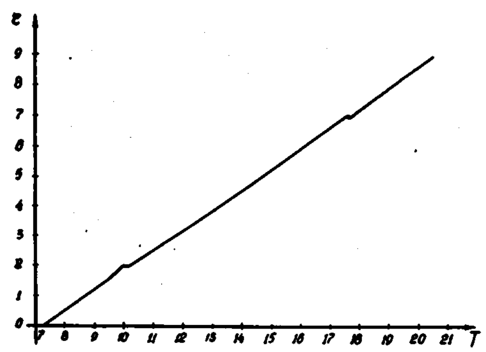

Рис. 3

Поступила в редакцию I4.II.I969 г.

Литература

I. Ю.В.Чуев, Г.П.Спехова, Обобщенная задача о замене оборудования, Экономика и мат.методы, I969, т.У,вып.I.

2. Р.Беллман. Динамическое программирование. ИИЛ. М., I960.

3. Р.Беллман, С.Дрейфус, Прикладные задачи динамического программирования. М.,"Наука", I965.

4. А.Кофман, Методы и модели исследования операций,М.,"Мир",I966.

5. С.Карлин, Математические методы в теории игр,программировании и экономике,М., "Мир", I964.

6. Д.Дж.Уайлд, Методы поиска экстремума, М., "Наука", I967.