Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1970 г. выпуск 4-5.
УДК.512.25/26+519.3:330.115+519.1.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА МНОЖЕСТВАХ С НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ

М.В.Гендлер, Ю.Ю.Прокопчук, Т.П.Лапшина /Москва/

При рассмотрении ряда задач прикладной математики и кибернетики часто приходится изучать метрики, отличные от евклидовой. В данной работе поставлена одна из задач такого рода, приведена ее графовая интерпретация и показано, что решение этой задачи может быть получено при помощи известных теоретико-графовых методов. В статье также сформулировано несколько прикладных задач, решение которых достаточно просто сводится к решению рассмотренной. В заключение приведен пример, иллюстрирующий применение предложенного метода.

I. Постановка задачи.

Начнем с рассмотрения упомянутых выше прикладных задач, что позволит нам сначала содержательно, а затем формально поставить проблему, решением которой мы будем заниматься.

Пусть на некотором озере находится конечное число островов. Каждый из них имеет определенные размеры и характеризуется своей береговой линией. При этом побережье озера также считается "внешним" островом. Необходимо для произвольной пары островов построить совокупность мостов /в частности, один мост/, которая обладает следующими двумя свойствами: I/ мосты этой совокупности дают возможность перейти с одного из островов на другой; 2/ суммарная длина мостов этой совокупности не превосходит суммарной длины мостов любой другой совокупности, обладающей свойством I .

Другая прикладная задача формулируется следующим образом: определить все эффективные сечения плоского разветвленного магнитного сердечника произвольной конфигурации [I] .

При таком изложении изучаемой проблемы становится более ясным ее математическое содержание: среди элементов некоторого множества "линейных конфигураций" требуется определить такой, числовая характеристика которого была бы в определенном смысле оптимальной по сравнению с числовыми характеристиками других конфигураций этого же множества.

Переходим к формальной постановке задачи.

Метрическим пространством называется пара (A,ρ) , где A -множество, элементы которого называются точками метрического пространства, а ρ - действительная функция с областью определения $A\times A$, удовлетворяющая следующим соотношениям [2] :

$$\rho(a,a)=0, \qquad /1/$$

$$\rho(a,b)=\rho(b,a), \qquad /2/$$

$$\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c), \qquad /3/$$

где $a,b,c \in A$.

Например, плоскость R^2 вместе с функцией $\rho_{эв}$:

$$\rho_{эв}(u,v) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad /4/$$

где $u,v \in R^2$, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - координаты точек u и v соответственно в некоторой системе координат в R^2, образует метрическое пространство $(R^2, \rho_{эв})$ [3].

Пусть на R^2 задана $(1+n)$ - связная область O /$n>0$,целое/ [3]. Это означает, в частности, что ее границей является множество Γ, состоящее из I $+n$ замкнутых кривых $\gamma_k, 1 \leq k \leq n+1$, то есть $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}\}$ Будем считать эти кривые спрямляемыми, без кратных точек [4].

Множество Γ осуществляет разбиение плоскости R^2 на 2 $+n$ областей: I $+n$ ограниченных и одну неограниченную. Если кривая γ_i, $\gamma_i \in \Gamma$, $1 \leq i \leq n+1$, такова, что область O_i, ограниченная ею,содержит любую область O_j, ограниченную кривой $\gamma_j, \gamma_j \in \Gamma \setminus \{\gamma_i\}$,то будем называть ее внешней границей O. Очевидно, существует единственная кривая из Γ, обладающая таким свойством. Любую кривую из Γ, отличную от внешней границы, будем называть внутренней границей O, а область, ограниченную ею-отверстием O.

Будем,по определению, считать отверстием внешнюю область внешней границы. Таким образом, число отверстий O равно n + I, из них n внутренних и одно внешнее.

Хорошо известно понятие расстояния между двумя множествами B и C, находящимися в метрическом пространстве (A,ρ) и заданными своими элементами [3]. Если $B=\{w\}, C=\{z\}, B \subseteq A, C \subseteq A$, то

$$\rho(B,C) = \inf_{w \in B,\, z \in C} \rho(w,z).$$

Очевидно, для любого подмножества B множества A верно:

$$\rho(B,B) = 0.$$

Если O_p и O_q - отверстия O, имеющие в качестве границ кривые γ_p и γ_q, $\gamma_p, \gamma_q \in \Gamma$, то легко видеть, что

$$\rho_{эв}(O_p, O_q) = \inf_{u \in \gamma_p,\, v \in \gamma_q} \rho(u,v) \qquad /5/$$

Рассмотрим множество $D = \{O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}\}$. Маршрутом над D назовем любую последовательность элементов из D :

$$M = \ldots O_{i_0}, O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, \quad 1 \leq i_0, i_1, i_2 \leq n+1 .$$

Маршрут называется конечным, если число его членов конечно, и бесконечным - в противном случае.

Первый и последний члены маршрута, если они существуют, называются крайними. Обозначим через M_{pq} маршрут, имеющий в качестве крайних членов O_p и O_q, а через R_{pq} - множество таких маршрутов. Очевидно,

$$R_{pq} = R_{qp}. \qquad /6/$$

Любой маршрут M однозначно определяет слово [5] :

$$P[M] = \ldots i_0 i_1 i_2 \ldots,$$

состоящее из индексов членов этого маршрута.

Каждой паре (O_p, O_q), $1 \le p,q \le n+1$, элементов D поставим в соответствие число $\rho_{эв}(O_p, O_q)$ и назовем длиной маршрута M число $\ell[M]$:

$$\ell[M] = \sum_{i_j, i_{j+1} \in P[M]} \rho_{эв}(O_{i_j}, O_{i_{j+1}}), \qquad /7/$$

если маршрут M -конечный, и символ ∞ - в противном случае. При этом, по определению, считаем, что $\ell[M]=0$, когда крайние члены маршрута M /если они существуют/ совпадают, то есть:

$$\ell[M_{pp}] = 0, \quad 1 \le p \le n+1. \qquad /8/$$

В /7/ суммирование ведется по всем двухбуквенным подсловам, состоящим из пар соседних в слове $P[M]$ букв [5] .

Рассмотрим действительную функцию $\bar\rho$, определенную на множестве $D \times D$:

$$\bar\rho(O_p, O_q) = \inf_{M_{pq} \in R_{pq}} \ell[M_{pq}], \quad 1 \le p,q \le n+1. \qquad /9/$$

Существование $\bar\rho$ следует из ограниченности снизу /например, нулем/ множества, состоящего из неотрицательных чисел, являющихся длинами конечных цепей, и символа ∞ .

Введенная соотношением /9/ функция удовлетворяет аксиомам /1/ - /3/. В самом деле, согласно /8/,

$$\bar\rho(O_p, O_q) = \inf_{M_{pp} \in R_{pp}} \ell[M_{pp}] = 0.$$

Далее, используя /6/, получаем:

$$\bar\rho(O_p, O_q) = \inf_{M_{pq} \in R_{pq}} \ell[M_{pq}] = \inf_{M_{qp} \in R_{qp}} \ell[M_{qp}] = \bar\rho(O_q, O_p).$$

Наконец, справедливость аксиомы /3/ следует из того, что нижняя грань части упорядоченного множества не меньше нижней грани всего множества [6] . Пусть R_{prq} - подмножество R_{pq}, каждый элемент которого содержит O_r, $1 \le r \le n+1$. Тогда

$$\bar\rho(O_p, O_q) = \inf_{M_{pq} \in R_{pq}} \ell[M_{pq}] \le \inf_{M_{prq} \in R_{prq}} \ell[M_{prq}] =$$

$$= \inf_{M_{pr} \in R_{pr}} \ell[M_{pr}] + \inf_{M_{rq} \in R_{rq}} \ell[M_{rq}] = \bar\rho(O_p, O_r) + \bar\rho(O_r, O_q).$$

Таким образом, пара $(D, \bar\rho)$ является метрическим пространством. Предположим, что нам известно, как вычислить расстояние $\rho_{эв}(O_p, O_q)$ между любыми двумя отверстиями O_p и O_q в метрическом пространстве $(R^2, \rho_{эв})$. Задача формулируется следующим образом.

Дать алгоритм, позволяющий определить значение функции $\bar\rho$ для любых O_p, $O_q \in D$ в метрическом пространстве $(D, \bar\rho)$.

II. Элементарные маршруты

Маршрут называется элементарным, если в нем нет одинаковых членов, и неэлементарным - в противном случае. Конечность элементарных маршрутов следует из конечности множества D .

Если O_p и O_q - члены маршрута M , то подмаршрут M_{pq} называется участком M .

Пусть M_{pq} -маршрут, а $M_{i_1 i_1}, M_{i_2 i_2}, \ldots, M_{i_s i_s}$ - его участки, имеющие одинаковые крайние члены $(1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_s \leq n+1)$. Заменим в M_{pq} эти участки элементами D : $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots; O_{i_s}$ соответственно. Легко видеть, что длина $\ell[M'_{pq}]$ полученного такой операцией элементарного маршрута M'_{pq} из маршрута M_{pq} не больше $\ell[M_{pq}]$.

Другими словами, для любого маршрута M_{pq} существует элементарный маршрут M'_{pq} , такой, что:

$$\ell[M'_{pq}] \leq \ell[M_{pq}]. \qquad /10/$$

Пусть R'_{pq} - подмножество элементарных маршрутов множества R_{pq} . Тогда из /10/ следует [6] :

$$\inf_{M'_{pq} \in R_{pq}} \ell[M'_{pq}] \leq \inf_{M_{pq} \in R_{pq}} \ell[M_{pq}].$$

или, что то же,

$$\inf_{M'_{pq} \in R'_{pq}} \ell[M'] \leq \inf_{M_{pq} \in R_{pq}} \ell[M_{pq}]. \qquad /11/$$

С другой стороны, так как $R'_{pq} < R_{pq}$, имеем [6] :

$$\inf_{M_{pq} \in R_{pq}} \ell[M_{pq}] \leq \inf_{M'_{pq} \in R'_{pq}} \ell[M'_{pq}]. \qquad /12/$$

Принимая во внимание /9/, /11/ и /12/, получаем:

$$\bar{\rho}(O_p, O_q) = \inf_{M_{pq} \in R_{pq}} \ell[M_{pq}] = \inf_{M'_{pq} \in R'_{pq}} \ell[M'_{pq}]. \qquad /13/$$

Таким образом, для определения $\bar{\rho}(O_p, O_q)$ достаточно ограничиться рассмотрением только элементарных маршрутов. Заметим, далее, что множество R'_{pq} - конечное /в Ш. будут приведены верхняя и нижняя оценки числа элементов этого множества/. Поэтому, используя /13/, имеем:

$$\bar{\rho}(O_p, O_q) = \inf_{M'_{pq} \in R'_{pq}} \ell[M'_{pq}] = \min_{M'_{pq} \in R'_{pq}} \ell[M'_{pq}]. \qquad /14/$$

Маршрут M^0_{pq} , длина которого не больше длины любого другого маршрута $M_{pq} \in R_{pq}$, называется минимальным. Ясно, что такой маршрут элементарен. При этом в R'_{pq} может быть несколько элементарных маршрутов.

Постановка задачи, приведенная в I, может быть переформулирована так.

Дать алгоритм, позволяющий для любых двух элементов $O_p, O_q \in D$ определить длину минимального маршрута $M^0_{pq}, M^0_{pq} \in R'_{pq}$.

Ш. Алгоритм решения задачи

Если для каждой пары точек $(u, v) \in R^2$ известно значение действительной функции $\rho_{эв}(u, v)$, введенной в /4/, то расстояние между любыми двумя отверстиями с любой наперед заданной точностью определяется по формуле /5/.

Поясним это на следующем примере.

Пусть O_p и O_q - односвязные области евклидовой плоскости /например, отверстия O /, имеющие в качестве границ спрямляемые кривые γ_p и γ_q соответственно. Тогда $\rho_{эв}(O_p, O_q)$ можно вычислить по следующему алгоритму /см.рис.I/.

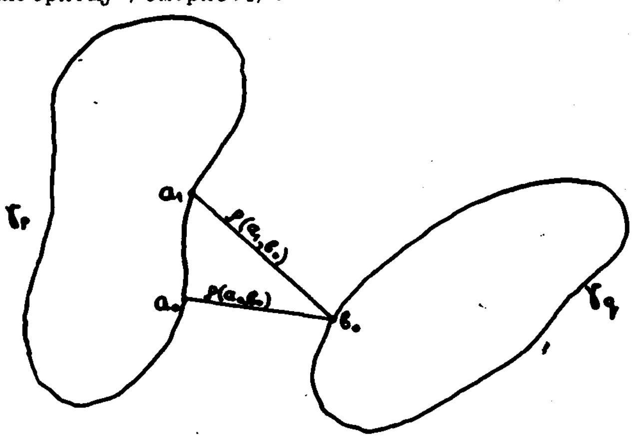

Рис. I

I/ Фиксируем на каждой из границ γ_p и γ_q по точке: $a_0(x_1, y_1) \in \gamma_p$, $b_0(x_2, y_2) \in \gamma_q$. Далее вычисляем $\rho_{эв}(a_0, b_0)$ по формуле /4/ и запоминаем его.

2/ Смещаясь вдоль γ_p в направлении, например, против часовой стрелки, как указано на рис. I, попадаем в точку $a_1 \in \gamma_p$ и вычисляем $\rho_{эв}(a_1, b_0)$.

3/ Проверяем выполнение следующего условия: если

$$\rho_{эв}(a_1, b_0) < \rho_{эв}(a_0, b_0)$$

верно, то $\rho_{эв}(a_1, b_0)$ запоминаем для дальнейших вычислений, $\rho_{эв}(a_0, b_0)$ забываем. В противном случае сохраняем $\rho_{эв}(a_0, b_0)$, а $\rho_{эв}(a_1, b_0)$ выбрасываем из рассмотрения.

4/ Повторяем п.п. 2/ и 3/, пока не обойдем γ_p . Число циклов, каждый из которых состоит из выполнения пп. 2/ и 3/, зависит от требуемой точности вычисления $\rho_{эв}(O_p, O_q)$. В результате выполнения пп. 2/ - 4/ будет определено $\rho_{эв}(O_p, b_0)$.

5/ Смещаясь вдоль границы γ_q в некотором направлении, попадаем в точку $b_1 \in \gamma_q$ /см.рис.I/. Вычисляем $\rho_{эв}(a_0, b_1)$ и запоминаем его.

6/ Далее выполняем пп. 2/ - 4/, но теперь вычисления проводятся для точки b_1 .

7/ В результате выполнения п.6 получаем $\rho_{эв}(O_p, b_1)$. Проверяем выполнение следующего условия: если

$$\rho_{эв}(O_p, b_0) < \rho_{эв}(O_p, b_1)$$

верно, то $\rho_{эв}(O_p, b_0)$ запоминаем для последующих вычислений,

$\rho_{эв}(O_p, b_1)$ забываем. В противном случае сохраняем $\rho_{эв}(O_p, b_1)$, а $\rho_{эв}(O_p, b_0)$ выбрасываем из дальнейшего рассмотрения.

8/ Повторяем пп. 5/ - 7/, пока не обойдем границу γ_q.

9/ В результате выполнения пп. I/ - 8/ получим число, которое будет отличаться от $\rho_{эв}(O_p, O_q)$ на величину, меньшую заданной.

З а м е ч а н и я

а/ Конечность алгоритма следует из спрямляемости γ_p и γ_q.

б/ Запоминая вместе с минимальным $\rho_{эв}(a, b), a \in \gamma_p, b \in \gamma_q$ в п. 7 алгоритма координаты точек a и b, получаем в п. 8 координаты концов отрезка длины $\rho_{эв}(O_p, O_q)$.

в/ Если область O_p выпуклая [4], то нет необходимости полностью обходить границу γ_p "из точки b_j", $b_j \in \gamma_q$ / j - номер цикла, состоящего из выполнения пп. 5/ - 7/ алгоритма/. При выполнении условия:

$$\rho_{эв}(a_{i+1}, b_j) < \rho_{эв}(a_i, b_j) \quad и \quad \rho_{эв}(a_{i+1}, b_j) \le \rho_{эв}(a_{i+2}, b_j)$$

обход границы γ_p "из точки b_j" можно прекратить, в качестве $\rho_{эв}(O_p, b_j)$ фиксировать число $\rho_{эв}(a_{i+1}, b_j)$ и переходить к точке b_{j+1} /здесь i - номер цикла, состоящего из выполнения пп.2/-4/ алгоритма /рис. 2/.

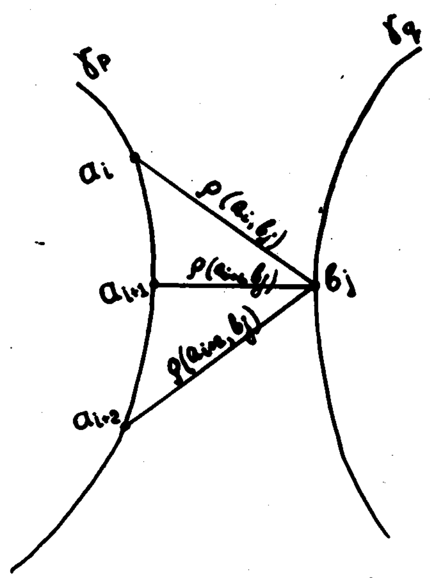

Рис. 2.

Аналогично обстоит дело, если O_q - выпуклая область.

Рассмотрим сначала тот частный случай, когда область имеет 4 отверстия: 3 внутренних /O_1, O_2 и O_3 / и одно внешнее / O_4 /. Тогда, согласно /I4/:

$$\bar\rho(O_1, O_2) = \min_{M'_{12} \in R'_{12}} l[M'_{12}] = \min\{l[O_1, O_2], l[O_1, O_3, O_2], l[O_1, O_4, O_2], l[O_1, O_3, O_4, O_2], l[O_1, O_4, O_3, O_2]\} =$$

$$= \min\{\rho_{эв}(O_1, O_2), \rho_{эв}(O_1, O_3) + \rho_{эв}(O_3, O_2), \rho_{эв}(O_1, O_4) + \rho_{эв}(O_4, O_2), \rho_{эв}(O_1, O_3) + \rho_{эв}(O_3, O_4) + \rho_{эв}(O_4, O_2), \rho_{эв}(O_1, O_4) + \rho_{эв}(O_4, O_3) + \rho_{эв}(O_3, O_2)\}$$

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ - множество натуральных чисел от I до $n+1$ включительно. В общем случае, когда O имеет $1+n$ отверстий, в качестве $\bar\rho(O_p, O_q), 1 \le p, q \le n+1$ необходимо выбрать минимальное из следующих чисел:

0/ $\rho_{эв}(O_p, O_q)$;

I/ $\rho_{эв}(O_p, O_i) + \rho_{эв}(O_i, O_q),\ i \in I \setminus \{p, q\}$:

$2/\rho_{эв}(O_p,O_i)+\rho_{эв}(O_i,O_j)+\rho(O_j,O_q),\ i,j\in I\setminus\{p,q\}$;

....

n - $1/\rho_{эв}(O_p,O_i)+\rho_{эв}(O_i,O_j)+\ldots+\rho_{эв}(O_k,O_q)$,

где i, j, . . . , k - попарно различные элементы из множества $I\setminus\{p,q\}$.

Количество чисел в 0 -й строке 1, то есть A^0_{n-1}, в 1-й $-(n-1)$ т.е. A^1_{n-1}, . . ., в $(n-1)$-й-A^{n-1}_{n-1}. Здесь A^t_s - число размещений из S элементов по t $(t\leqslant S)$ [6]. Всего в n строках находится

$$N(n)=\sum_{i=0}^{n-1}A^i_{n-1}$$

чисел. Оценим эту сумму снизу.

$$N(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-i)!}=(n-1)!\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\ldots+\frac{1}{1!}+\frac{1}{0!}\right)=(e-\varepsilon_n)(n-1)!>(n-1)!.$$

Здесь $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Ясно, что

$$N(n)<e(n-1)!.$$

Отсюда следует, что для определения только одного значения $\bar\rho(O_p,O_q),\ p,q\in I,\ p\neq q$, функции $\bar\rho$ необходимо получить и сравнить более чем $(n-1)!$ чисел. Если принять во внимание, что $(n-1)!$ является всего лишь оценкой снизу функции $N(n)$, то станет ясно, что для достаточно больших n решение задачи "перебором вариантов" такого рода практически неосуществимо.

Изложим конструктивный подход к решению задачи.

Рассмотрим полный неориентированный граф $G=(X,U)$ без петель [7], для которого $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\}$ - множество вершин, а $U=\{u_{12},u_{13},\ldots,u_{n\,n+1}\}$ - множество ребер. Индексы каждого ребра указывают, какие вершины оно соединяет.

Цепью E в графе G называется такая последовательность ребер, конечная или нет,

$$E=\ldots,u_{kl},u_{lm},u_{mr},\ldots,$$

что каждые 2 соседних ребра этой последовательности, u_{kl} и u_{lm}, имеют общую вершину x_l, $1\leqslant l\leqslant n+1$.

Цепь, соединяющую вершины x_p и x_q, будем обозначать через E_{pq}, $1\leqslant p,q\leqslant n+1$, а через F_{pq} - множество таких цепей.

Поставим в соответствие каждому $O_i\in D$ элемент $x_i\in X$, $1\leqslant i\leqslant n+1$. Тогда каждому маршруту над D соответствует цепь G.

Припишем каждому ребру u_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$ число $\rho_{эв}(O_i,O_j)$, и назовем длиной цепи E_{pq} число $L[E_{pq}]$, равное сумме длин ее ребер, если цепь конечная, и символ ∞ - в противном случае. По определению считаем, что $L[E_{pp}]=0$.

Легко видеть, что результаты, полученные в 1 для маршрутов над D, полностью верны для цепей G. Аналогом элементарных маршрутов над D являются элементарные цепи G, т.е. такие цепи, при обходе которых ни одна из вершин G не встречается более одного раза. Ясно, как установить взаимно однозначное соответствие между множествами элементарных маршрутов над D и элементарных цепей G.

Если $F'_{pq} = \{E'_{pq}\}$ - множество элементарных цепей, соединяющих x_p и x_q, $x_p, x_q \in X$, то аналогично тому, как это было сделано в I.для маршрутов над D, с помощью функции $\bar{\bar{\rho}}$:

$$\bar{\bar{\rho}}(x_p, x_q) = \inf_{E_{pq} \in F_{pq}} L[E_{pq}], \quad 1 \le p, q \le n+1,$$

которая, как нетрудно проверить, удовлетворяет аксиомам /I/ - /3/, во множество X вводится метрика, и показывается далее, что

$$\bar{\bar{\rho}}(x_p, x_q) = \min_{E'_{pq} \in F'_{pq}} L[E'_{pq}].$$

Алгоритм определения длины $L[E^o_{pq}]$ минимальной цепи E^o_{pq}, т.е. такой цепи, длина которой не больше длины любой другой цепи E_{pq} из множества F_{pq}, известен [7]. Применяя его, можно найти $L[E^o_{pq}]$ для любых $x_p, x_q \in X$.

Покажем, что значения функций $\bar{\rho}$ и $\bar{\bar{\rho}}$ на парах $(O_p, O_q), O_p, O_q \in D$, и $(x_p, x_q), x_p, x_q \in X$ соответственно совпадают.

Заметим сразу же, что для цепи $u_{pm}, u_{mn}, \ldots, u_{oq}$ и маршрута $O_r, O_s, \ldots, O_t$ из равенства слов $pm\ldots q$ и $rs\ldots t$ следует совпадение их длин.

Пусть $E^o_{pq} = u_{pk}, u_{kl}, \ldots, u_{mq}$ - минимальная цепь. Тогда маршрут $M^o_{pq} = O_p, O_k, \ldots, O_m, O_q$ - минимальный. Предположим, что это не так. Т. е. существует маршрут $\bar{M}_{pq} = O_p, O_s, \ldots, O_t, O_q$, такой, что: $\ell[\bar{M}_{pq}] < \ell[M^o_{pq}]$. Значит, длина $L[\bar{E}_{pq}]$ цепи $\bar{E}_{pq} = u_{ps}, \ldots, u_{tq}$, равная $\ell[\bar{M}_{pq}]$, будет меньше $L[E^o_{pq}]$, т.е. цепь E^o_{pq} не будет минимальной. что противоречит условию.

Следовательно, M^o_{pq} -минимальный маршрут.

Таким образом, алгоритм для решения поставленной в I. задачи следующий.

I/ Определяются все числа $\rho_{эв}(O_p, O_q), O_p, O_q \in D$.

2/ Строится полный граф $G = (X, U)$, и в нем для каждой пары вершин $x_p, x_q \in X$ определяется длина минимальной цепи, соединяющей эти вершины.

3/ В качестве значений функции $\bar{\rho}$ на парах $(O_p, O_q), O_p, O_q \in D$ берутся числа, равные длинам минимальных цепей, соединяющих вершины x_p и x_q, $x_p, x_q \in X$.

На этом решение поставленной в I. задачи считается законченным.

IУ. Пример

В качестве иллюстрации применения предложенного метода определим все эффективные сечения [I] плоского магнитного элемента /флюкоора/, изображенного на рис. 3. Он имеет 5 отверстий: 4 внутренних - O_1, O_2, O_3, O_4 и одно внешнее - O_5. Будем считать, что значения функции $\rho_{\mathscr{H}}(O_p, O_q)$, $1 \leq p < q \leq 5$, уже вычислены.

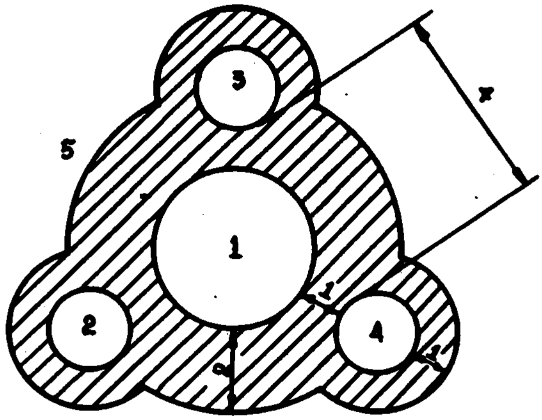

Рис. 3.

Полный граф, соответствующий геометрии рассматриваемого элемента, нагружен, как указано на рис. 4.

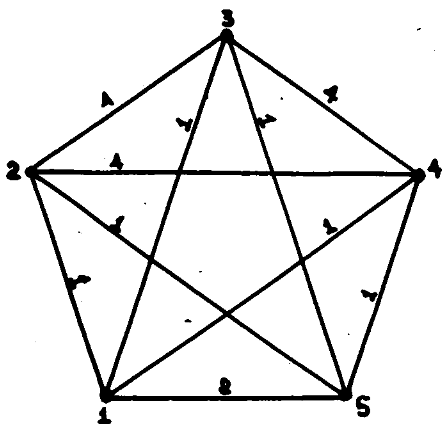

Рис. 4

Используя алгоритм определения минимальной цепи [7] , вычисляем значения $\bar{\rho}(O_p, O_q)$, $1 \leq p < q \leq 5$. Результаты всех подсчетов сведем в таблицу.

Т а б л и ц а

(i,j)	/I,2/	/I,3/	/I,4/	/I,5/	/2,3/	/2,4/	/2,5/	/3,4/	/3,5/	/4,5/
$\rho(O_i,O_j)$	I	I	I	2	4	4	I	4	I	I
$\bar{\rho}(O_i,O_j)$	I	I	I	2	2	2	I	2	I	I

Заметим в заключение, что изложенный метод может быть применен для решения аналогичных задач в метрических пространствах более общего вида.

Поступила в редакцию I2.II.I969г.

Л и т е р а т у р а

I.М.Б.Гендлер,М.А.Розенблат. Устойчивые магнитные состояния разветвленных сердечников, применяемых для построения цифровых схем, Автоматика и телемеханика, № 9, 1966.

2.Р.Фор,А.Кофман, М.Дени-Папен. Современная математика, "Мир", 1967.

3.П.С.Александров. Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.

4.Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, "Наука", Том I. 1969.

5.А.А.Марков. Теория алгоритмов, Тр. Матем. ин-та им.В.А.Стеклова, XLII, 1954.

6.Н.Бурбаки. Теория множеств, "Мир", 1965.

7.К.Берж. Теория графов и ее применения, Изд-во ин. лит-ры, М., 1962.