Управляемые системы, ИМ СО РАН, 1993 г., вып. 31

УДК 519.854.2

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РАСПИСАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОТОЧНОГО ТИПА

С.В.Севастьянов

§ 1. Формулировка результата

Система поточного типа определяется нами в соответствии с [1].

Имеется n требований, каждое из которых, $j=1,\dots,n$, состоит из m последовательных операций $\{O_1^j,\dots,O_m^j\}$, выполняемых в этом порядке. Имеется также m типов приборов по ℓ_ν идентичных приборов ν-го типа, причем операция O_ν^j, $j=1,\dots,n$; $\nu=1,\dots,m$, может быть выполнена любым из приборов ν-го типа. Известна длительность t_ν^j каждой операции O_ν^j. Как обычно, мы предполагаем непрерывность каждой операции, а также готовность всех приборов и наличие всех требований в нулевой момент времени. Требуется найти расписание S (т.е. указать моменты $\{s_\nu^j\}$ начала всех операций $\{O_\nu^j\}$) выполнения требований к наиболее раннему сроку:

$$T(S)=\max_{\nu,j}(s_\nu^j+t_\nu^j)\to\min_{\{s_\nu^j\}}.$$

Обозначим

$$H_\nu=\sum_{j=1}^{n}t_\nu^j/\ell_\nu;\ H=\max_\nu H_\nu;\ h=\max_{\nu,j}t_\nu^j;\ M=\sum_{\nu=1}^{m}\ell_\nu.$$

Очевидно, величина H является нижней оценкой длины любого допустимого (и, в частности, оптимального) расписания:

$$H\le T(S_{opt}).$$

В [2] для сформулированной задачи в случае

$$\ell_\nu\equiv\ell,\ \forall\nu=1,\dots,m \tag{1}$$

был построен алгоритм, находящий за $O(n^2m^2)$ операций приближенное расписание S с оценкой

$$T(S)\le H+(m^2+0.06)h. \tag{2}$$

(Из результатов [3] следует, что величина 0.06 в этой формуле может быть заменена на 0.00023, а при $m\le 250$ - на ноль.) Затем в [4] мы анонсировали возможность построения с трудоемкостью $O(n^2M^2)$ расписания S, длина которого не превосходит

$$T(S) \le H + ((M-1)^2 + m)h . \qquad (3)$$

При этом предполагалось использовать алгоритм, отличный от описанного в [2], поскольку последний существенно использует свойство (1). Однако значительная разница между оценками (2) и (3), имеющая место даже при незначительных нарушениях условия (1), наводила на мысль, что по порядку близкая к (2) оценка должна иметь место и в общем случае для произвольных значений величин $\{\ell_\nu\}$. Доказываемая ниже теорема подтверждает это предположение. Более того, новый алгоритм для произвольных $\{\ell_\nu\}$ гарантирует лучшую, по сравнению с (2), оценку погрешности. Эта оценка улучшается при возрастании значений ℓ_ν, становясь, например, при $\ell_\nu \equiv m$ линейной от m, о чем указывается в замечании.

Т е о р е м а. Для описанной выше системы поточного типа с трудоемкостью $O(n^2m^2)$ может быть построено расписание S с оценкой

$$T(S) \le H + (m^2 - 1)h . \qquad (4)$$

§ 2. Алгоритм

Расписание S строится алгоритмом, состоящим из трех шагов.

Шаг 1. Определим векторы

$$\{d_j = (d_j(1), \ldots, d_j(m)),\ j = 1, \ldots, n\},$$

где $d_j(\nu) = t_\nu^j/\ell_\nu,\ \forall j, \nu,$

$$\{b_j = (b_j(1), \ldots, b_j(m-1)),\ j = 1, \ldots, n\},$$

где $b_j(\nu) = d_j(\nu) - d_j(m),\ \forall j, \nu,$

$$D = \sum_{j=1}^{n} d_j,\quad B = \sum_{j=1}^{n} B_j .$$

Пусть $\hat{B} = \operatorname{conv}\{b_1, \ldots, b_n\}$. Поскольку для любого вектора b_j и любых двух координат ν_1, ν_2 выполнено $b_j(\nu_1) - b_j(\nu_2) = d_j(\nu_1) - d_j(\nu_2) = h/\ell_{\nu_1}$ (в том числе при $\nu_2 = m$, полагая $b_j(m) = 0$), то аналогичное неравенство имеет место для любого вектора $c \in \hat{B}$:

$$c(\nu_1) - c(\nu_2) \le h/\ell_{\nu_1},\ \forall \nu_1, \nu_2 = 1, \ldots, m,\ \forall c \in \hat{B}, (c(m) = 0) . \qquad (5)$$

Используя теорему 1.1 из [3], с трудоемкостью $O(n^2m^2)$ операций найдем такую перестановку $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, что

$$b_\pi^k - \frac{k-(m-1)}{n} B \in (m-1)\hat{B}, \quad \forall k = 1,\dots,n, \tag{6}$$

где

$$b_\pi^k \doteq \sum_{j=1}^{k} b_{\pi_j}.$$

Для упрощения выкладок будем считать, что требования занумерованы согласно перестановке π, т.е. $\pi = (1,2,\dots,n)$. Индекс π для выражений b_π^k будем опускать.

<u>Шаг 2</u>. Для каждого $\nu = 1,\dots,m$ операции $O_\nu^1,\dots,O_\nu^n$ распределим в этом порядке по ℓ_ν приборам ν-го типа, используя простое правило: очередную из этого списка операцию O_ν^j длительности t_ν^j распределяем на наименее загруженный прибор ν-го типа. Храня информацию о текущей загруженности приборов ν-го типа в виде двоичного ℓ_ν-вершинного дерева, веса вершин которого убывают по любой цепочке, идущей из корня, мы сможем реализовать шаг 2 с трудоемкостью

$$O(n \sum_{\nu=1}^{m} \log_2 \ell_\nu) \le O(nm \log M) \le O(nm \log(nm)),$$

что не превосходит трудоемкости шага 1.

Определим векторы $\{a_j = (a_j(1),\dots,a_j(M)),\ j = 1,\dots,n\}$, характеризующие загруженность каждого из M приборов требованием j, т.е. $a_j(i) = t_\nu^j$, если в результате шага 2 операция O_ν^j распределена на прибор i (ν-го типа), и $a_j(i) = 0$, - если никакая операция требования j не выполняется прибором i.

Положим

$$a^k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \quad k = 1,\dots,n; \quad A = a^n.$$

Тогда $\forall k = 1,\dots,n$, $\forall \nu = 1,\dots,m$, и для любого прибора i ν-го типа справедливы неравенства

$$d^k(\nu) - \frac{\ell_\nu - 1}{\ell_\nu} h \le a^k(i) \le d^k(\nu) + \frac{\ell_\nu - 1}{\ell_\nu} h. \tag{7}$$

Они легко вытекают из того свойства, что после распределения операций $\{O_\nu^1,\dots,O_\nu^k\}$ (суммарной длительности $d^k(\nu)\ell_\nu$) по приборам ν-го типа разница в загруженности любых двух из этих приборов не превосходит h.

<u>Шаг 3</u>. Заставим каждый прибор выполнять распределенные на него операции согласно перестановке $\pi = (1,2,\dots,n)$. Это позволит нам построить сеть P, задающую технологию выполнения всего множества операций. Каждую

операцию O_ν^j представим в P вершиной веса t_ν^j, причем операции прибора i составят i-й горизонтальный ряд вершин. Эти вершины соединим между собой цепочкой дуг, задающих порядок выполнения операций i-м прибором (всего, очевидно, в сети P будет $mn - M$ "горизонтальных" дуг). Порядок выполнения операций каждого из n требований зададим "вертикальными" дугами вида $(O_\nu^j, O_{\nu+1}^j)$, т.е. каждая "вертикальная" дуга переводит нас из горизонтального ряда ν-го типа в ряд $(\nu+1)$-го типа. Всего в P имеем $(m-1)n$ таких дуг. Веса всех дуг нулевые.

Таким образом, сеть P содержит $O(mn)$ дуг.

Для исходного множества операций находим расписание $S = \{s_\nu^j\}$, в котором каждый момент s_ν^j вычисляется как наиболее ранний момент начала операции O_ν^j в сети P. Трудоемкость этой процедуры, линейная от числа дуг, не превосходит $O(mn)$.

Алгоритм описан полностью.

Сложив оценки трудоемкостей шагов алгоритма, убеждаемся в справедливости общей оценки трудоемкости, декларируемой в теореме. Для завершения доказательства теоремы остается доказать оценку (4) для построенного на третьем шаге алгоритма расписания S.

Заметим, что полученное расписание может не удовлетворять свойству "плотности" (когда не допускается простоя прибора, если есть требование, которое он может обслужить; имеем в виду, что операция, распределенная на шаге 2 на какой-то прибор, могла бы быть выполнена каким-то другим прибором этого типа).

§ 3. Доказательство оценки (4)

Очевидно, длина $T(S)$ полученного расписания равна длине критического пути в сети P. Всякий такой путь состоит из $m-1$ "вертикальных" дуг, соответствующих каким-то требованиям $K_1, K_2, \dots, K_{m-1}$, $(1 \le K_1 \le K_2 \le \dots \le K_{m-1} \le n)$, и из m "горизонтальных" цепей, соответствующих приборам $i_1, i_2, \dots, i_m$ (причем i_ν является прибором ν-го типа). Таким образом, длина критического пути выражается формулой:

$$T(S) = \max_{\{K_\nu\}\{i_\nu\}} \left(\sum_{j=1}^{K_1} a_j(i_1) + \sum_{j=K_1}^{K_2} a_j(i_2) + \dots + \sum_{j=K_{m-1}}^{n} a_j(i_m) \right). \tag{8}$$

Далее предполагаем, что $\{K_\nu\}$, $\{i_\nu\}$ – как раз те значения, на которых в формуле (8) достигается максимум. Тогда, используя оценки (7), получаем:

$$T(S) = \sum_{j=1}^{K_1} a_j(i_1) + \sum_{j=K_1+1}^{K_2} a_j(i_2) + \dots + \sum_{j=K_{m-1}+1}^{n} a_j(i_m) + \sum_{i=1}^{m-1} a_{K_\nu}(i_{\nu+1}) \le$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{m-1}\left(a^{K_\nu}(i_\nu) - a^{K_\nu}(i_{\nu+1})\right) + A(i_m) + (m-1)h \leq$$

$$\leq (m-1)h + A(i_m) + \sum_{\nu=1}^{m-1}\left(d^{K_\nu}(\nu) - d^{K_\nu}(\nu+1) + \frac{\ell_\nu - 1}{\ell_\nu}h + \frac{\ell_{\nu+1}-1}{\ell_{\nu+1}}h\right) =$$

$$= (m-1)h + A(i_m) + 2h(m-1) - h\left(2\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\ell_\nu} - \frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_m}\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m-1}\left(b^{K_\nu}(\nu) - b^{K_\nu}(\nu+1)\right). \qquad (9)$$

Обозначив $\lambda_\nu = \frac{K_\nu-(m-1)}{n}$, $c_\nu = b^{K_\nu} - \lambda_\nu$, из (6) и (5) имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(b^{K_\nu}(\nu) - b^{K_\nu}(\nu+1)\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m-1}\lambda_\nu\left(B(\nu) - B(\nu+1)\right) + \sum_{\nu=1}^{m-1}\left(c_\nu(\nu) - c_\nu(\nu+1)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{m-1}\lambda_\nu\left(D(\nu) - D(\nu+1)\right) + (m-1)h\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\ell_\nu} =$$

$$= (m-1)h\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\ell_\nu} - D(m) - \frac{m-1}{n}\left(D(1) - D(m)\right) +$$

$$+ \left[\left(1 - \frac{K_{m-1}}{n}\right)D(m) + \frac{K_{m-1}-K_{m-2}}{n}D(m-1) + \ldots + \frac{K_1}{n}D(1)\right]. \qquad (10)$$

Замечая, что внутри квадратных скобок все коэффициенты при величинах $D(\nu)$ неотрицательны и их сумма равна 1, имеем там выпуклую комбинацию значений $\{D(1), \ldots, D(m)\}$, которая не превосходит $\max_\nu D(\nu) = H$. Таким образом, из (9), (10) и (7) (при $K = n$, $\nu = m$) получаем:

$$T(S) \leq (m-1)h + 2h(m-1) - h\left(2\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\ell_\nu} - \frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_m}\right) + A(i_m) - D(m) +$$

$$+(m-1)h\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\ell_\nu}+\frac{m-1}{n}\cdot(D(m)-D(1))+H\leq H+\frac{\ell_{m-1}}{\ell_m}h+$$

$$+(3m-3)h+\frac{m-1}{n}D(m)+(m-3)h\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\ell_\nu}+h\left(\frac{1}{\ell_1}-\frac{1}{\ell_m}\right)\leq$$

$$\leq H+(3m-2)h+\frac{h}{\ell_1}+(m-3)h\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\ell_\nu}\quad. \qquad (11)$$

Величина в правой части (11) достигает своего максимума при $\ell_\nu \equiv 1$, откуда и получаем оценку (4).

Теорема доказана.

Замечаем, что величина в правой части (11) уменьшается с ростом величин $\{\ell_\nu\}$. В частности, имеет место

Замечание. При $\ell_\nu \equiv m$ наш алгоритм дает расписание с оценкой

$$T(S)\leq H+\left(4m-5+\frac{1}{m}\right)h,$$

на порядок лучшей оценок точности известных алгоритмов для задачи *flow shop* (т.е. системы поточного типа без альтернативности приборов).

Поступила в ред.-изд. отдел
26 ноября 1990 г.

Литература

1. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. – М.: Наука. – 1989. – 328 с.

2. Севастьянов С.В. Некоторые обобщения задачи Джонсона // Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). – 1981. – Вып. 21. – С. 45–61.

3. Севастьянов С.В. Геометрия в теории расписаний // Модели и методы оптимизации / Труды ИМ, т. 10. – Новосибирск: Наука. – 1988. – С. 226–261.

4. Севастьянов С.В. Алгоритм с оценкой для задачи с маршрутами деталей произвольного вида и альтернативными исполнителями // Кибернетика. – 1986, № 6. – С. 74–79.