Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30.

УДК 517.977.56

# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

К.С.Мусабеков

## § 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления неадиабатическим трубчатым реактором, используемым в химической технологии. Математическая модель реактора задается системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2 v_1(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} - c v_1 f(v_2), \\ &\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} = b\cdot\frac{\partial^2 v_2(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(t,x)}{\partial x} + k v_1 f(v_2) + g\cdot(v_3(t) - v_2(t,x)), \\ &\frac{d v_3(t)}{dt} = d\cdot\left(\int_0^1 v_2(t,x)\,dx - v_3(t)\right) + u(t)\cdot(E - v_3(t)) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

с граничными

$$\left.\begin{aligned} &a\cdot\frac{\partial v_1(t,0)}{\partial x} - v_1(t,0) = -1, \qquad \frac{\partial v_1(t,1)}{\partial x} = 0, \\ &b\cdot\frac{\partial v_2(t,0)}{\partial x} - v_2(t,0) = -1, \qquad \frac{\partial v_2(t,1)}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и начальными условиями:

$$v_1(0,x) = v_{10}(x),\ v_2(0,x) = v_{20}(x),\ v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = exp(\Gamma - \Gamma/v_2(t,x))$; $a, b, c, \Gamma, k, g, d, E, v_{30}$ – константы, положительные параметры системы; $u(t)$ – управляющая функция (управление); $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$, $v_3(t)$ – функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(t,1)\,dt, \tag{4}$$

т.е. суммарного за время $T$ количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1)-(3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$ и функцию $v_2(t,x)$ :

$$0 \le u(t) \le u_0 = const, \tag{5}$$

$$v_2(t,x) \le \bar{v}_2 = const. \tag{6}$$

Пусть $Q = \{(t,x) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le 1\}$. Введем обозначения функциональных пространств, используемых в данной работе:

$C[0,T]$ - банахово пространство непрерывных функций, заданных на $[0,T]$ с нормой $\|v\|_C = \max\limits_{0 \le t \le T} |v(t)|$;

$W[0,T]$ - банахово пространство абсолютно непрерывных функций, заданных на $[0,T]$ с нормой

$$\|v\|_W = \max_{0 \le t \le T} |v(t)| + \int_0^T \left|\frac{dv}{dt}\right| dt;$$

$C^{0,\alpha}(Q)$ - банахово пространство функций, заданных в области $Q$, непрерывных по Гёльдеру с показателями $\alpha$ и $\alpha/2$ по переменным $x$ и $t$ соответственно, с нормой

$$\|v\|_{0,\alpha} = |v|_{0,0} + H_\alpha(v),$$

где $0 < \alpha \le 1, |v|_{0,0} = \sup\limits_Q |v(t,x)|, H_\alpha(v) = \sup\limits_{P,R \in Q, P \ne R} \dfrac{|v(P) - v(R)|}{[d(P,R)]^\alpha}$,

$$d(P,R) = |t-\tau|^{\frac{1}{2}} + |x-y|, P(t,x), R(\tau,y) \in Q.$$

$C^{2,\alpha}(Q)$ - банахово пространство функций, заданных в области $Q$, обладающих непрерывными по Гёльдеру с показателем $\alpha$ производными до второго порядка по $x$ и первого порядка по $t$. Норму в этом пространстве определяем равенством

$$|v|_{2,\alpha} = \sum_{i=0}^{2} |\mathcal{D}_x^i v|_{0,\alpha} + |\mathcal{D}_t v|_{0,\alpha};$$

$W_2^1(0,T)$ - банахово пространство функций $v(t) \in L_2(0,T)$, заданных на $(0,T)$, имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные первого порядка. Норму в этом пространстве определяем равенством

$$\|v\|^2_{W_2^1} = \int_0^T [|v|^2 + |\mathcal{D}_t v|^2] dt;$$

$W_2^{1,2}(Q)$ - банахово пространство функций $v(t,x)\in L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные $\mathcal{D}_t v, \mathcal{D}_x v, \mathcal{D}_x^2 v\in L_2(Q)$ . Норму в нем определяем равенством

$$\|v\|_{1,2;2}^2=\iint\limits_Q\left[|\mathcal{D}_x^2 v|^2+|\mathcal{D}_t v|^2+|v|^2\right]dx\,dt;$$

$U_\partial=\{u(t):0\le u(t)\le u_0=const,\ u(t)$ - измеримая функция, $0\le t\le T\}$.

В [1] для системы (1)-(3) была доказана теорема существования и единственности решения $v_1(t,x),\ v_2(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q)$ , $v_3(t)\in$ $\in W[0,T]$ при произвольной функции $u(t)\in U_\partial$ , а для задачи (1)-(6) доказана теорема существования оптимального управления.

В [2] функционал (4) и условие (6) заменены функционалом, полученным из (4) добавлением штрафа за нарушение температурного ограничения (6), и для полученной задачи осуществлен вывод необходимого условия оптимальности.

В этой работе будет получено необходимое условие оптимальности (принцип максимума Л.С.Понтрягина) задачи (1)-(6). Вывод необходимого условия оптимальности проведем, следуя схеме Дубовицкого-Милютина [3].

## § 2. Локальный принцип максимума

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi_1(t,x)}{\partial t}=-a\cdot\frac{\partial^2\psi_1(t,x)}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_1(t,x)}{\partial x}+(c\cdot\psi_1-\kappa\cdot\psi_2)\cdot f(v_2),\\
&\frac{\partial\psi_2(t,x)}{\partial t}=-b\cdot\frac{\partial^2\psi_2(t,x)}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_2(t,x)}{\partial x}+\\
&\qquad+(c\psi_1-\kappa\psi_2)\cdot v_1\cdot\frac{\partial f(v_2)}{\partial v_2}+g\cdot\psi_2-d\cdot\psi_3(t)+\psi_4(t,x),\\
&\frac{d\psi_3(t)}{dt}=-g\cdot\int_0^1\psi_2(t,x)\,dx+(d+u)\psi_3
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

с граничными

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi_1(t,0)}{\partial x}=0, && a\cdot\frac{\partial\psi_1(t,1)}{\partial x}+\psi_1(t,1)=-\lambda,\\
&\frac{\partial\psi_2(t,0)}{\partial x}=0, && b\cdot\frac{\partial\psi_2(t,1)}{\partial x}+\psi_2(t,1)=0
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

и начальными условиями:

$$\psi_1(T,x)=0,\ \psi_2(T,x)=0,\ \psi_3(T)=0\ ,\qquad(9)$$

где $\lambda = const > 0$.

Обозначим: $V_1 = W_2^{1,2}(Q) \times W_2^{1,2}(Q) \times W_2^1(0,T)$,

$V_2 = L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2(0,T)$, $V_3 = W_2^{1,2}(Q) \times W_2^{1,2}(Q) \times W_2^1(0,T) \times L_\infty(0,T)$.

Л е м м а 1. Для любого $\psi_4(t,x) \in L_2(Q)$, $v_1(t,x)$, $v_2(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$, $v_3(t) \in W_2^1(0,T)$, $u(t) \in U_\partial$, соответствующее решение задачи (7)-(9) существует, единственно и принадлежит $V_1$.

Справедливость утверждений леммы 1 следует из [2].

Т е о р е м а. (Локальный принцип максимума.) Пусть процесс $v_1^0(t,x)$, $v_2^0(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$, $v_3^0(t) \in W_2^1(0,T)$, $u^0(t) \in U_\partial$ (при $(t,x) \in Q$) является оптимальным в задаче (1)-(6) и пусть $v_{20}(x) < \bar{v}_2$, $\mathcal{M} = \{(t,x) : v_2^0(t,x) = \bar{v}_2\}$. Тогда существуют число $\lambda \geq 0$ и ненулевые функции

$$\psi_1^0(t,x),\ \psi_2^0(t,x) \in W_2^{1,2}(Q),\ \psi_3^0(t) \in W_2^1(0,T),\ \psi_4^0(t,x) \in L_2(Q)$$

такие, что $\lambda, \psi_1^0(t,x), \psi_2^0(t,x), \psi_3^0(t), \psi_4^0(t,x)$ не равны нулю одновременно и удовлетворяют следующим условиям:

1°) функции $\psi_1^0(t,x), \psi_2^0(t,x), \psi_3^0(t)$ являются решением системы (7)-(9) при данных $\psi_4^0, v_1^0, v_2^0, u^0$;

2°) функция $\psi_4^0(t,x)$ такова, что

$$\psi_4^0(t,x) = 0, \text{ если } (t,x) \in Q \setminus \mathcal{M};$$

3°) почти при всех $t$ из $(0,T)$ и всех $u \in [0, u_0]$ выполняется неравенство $\psi_3^0(t) \cdot (E - v_3^0(t)) \cdot (u^0(t) - u) \geq 0$.

Для вывода принципа максимума по схеме Дубовицкого-Милютина необходимо каждое ограничение задачи (1)-(6) исследовать отдельно, независимо от остальных ограничений.

Доказательство теоремы начнем с системы (1)-(3).

## § 3. Касательное подпространство

Обозначим через $Q_1$ множество функций $v_1(t,x)$, $v_2(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$, $v_3(t) \in W_2^1(0,T)$, $u(t) \in L_\infty(0,T)$, удовлетворяющих системе (1)-(3). Найдем касательное подпространство [3 - 4] $\Omega_1 = \{w_1, w_2, w_3, \tilde{u}\}$ к множеству $Q_1$ в точке $(v_1^0, v_2^0, v_3^0, u^0)$.

Введем оператор

$$F(v,u)=\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t}-a\cdot\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+cv_1 f(v_2), \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t}-b\cdot\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial v_2}{\partial x}-Kv_1 f(v_2)-g\cdot(v_3-v_2), \\ \dfrac{dv_3}{dt}-d\cdot(\int_0^1 v_2(t,x)\,dx-v_3)-u\cdot(E-v_3), \\ a\cdot\dfrac{\partial v_1(t,0)}{\partial x}-v_1(t,0)=-1, \quad \dfrac{\partial v_1(t,1)}{\partial x}=0, \\ b\cdot\dfrac{\partial v_2(t,0)}{\partial x}-v_2(t,0)=-1, \quad \dfrac{\partial v_2(t,1)}{\partial x}=0, \\ v_1(0,x)=v_{10}(x),\ v_2(0,x)=v_{20}(x),\ v_3(0)=v_{30}, \end{cases}$$

где $v^T=(v_1(t,x),v_2(t,x),v_3(t))$. Оператор $F(v,u)$ есть отображение из пространства $V_3$ в пространство $V_2$, и $Q_1=\{(v_1,v_2,v_3,u)\in V_3 \mid F(v,u)=0\}$.

Л е м м а 1. Справедливы следующие два утверждения:

1°) для оператора $F(v,u)$ производная Фреше $F'(v^0,u^0)$ имеет вид:

$$F'(v^0,u^0)(w,\tilde{u})=\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t}-a\cdot\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+cf(v_2^0)w_1+cv_1^0\dfrac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\cdot w_2, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t}-b\cdot\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial w_2}{\partial x}-Kf(v_2^0)w_1- \\ -\left(Kv_1^0\dfrac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}-g\right)w_2-g\cdot w_3, \\ \dfrac{dw_3}{dt}-d\cdot(\int_0^1 w_2(t,x)\,dx-w_3)+u^0 w_3-(E-v_3^0)\cdot\tilde{u}, \\ a\cdot\dfrac{\partial w_1(t,0)}{\partial x}-w_1(t,0)=0, \quad \dfrac{\partial w_1(t,1)}{\partial x}=0, \\ b\cdot\dfrac{\partial w_2(t,0)}{\partial x}-w_2(t,0)=0, \quad \dfrac{\partial w_2(t,1)}{\partial x}=0, \\ w_1(0,x)=0,\ w_2(0,x)=0,\ w_3(0)=0, \end{cases}$$

$w^T=(w_1,w_2,w_3)$, оператор $F'(v,u)$ определен на $\mathcal{D}(F'(v,u))=$ $=V_3\cap\{$граничные и начальные условия$\}$;

2°) оператор $F'(v,u)$ непрерывен в окрестности точки $(v^0,u^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о первой части леммы проводится, как в работе [2], справедливость второй части следует из [1].

В силу [2] имеем, что для $\forall\varphi(t,x)\in V_2$, (где $\varphi^T(t,x)=(\varphi_1(t,x),\varphi_2(t,x),\varphi_3(t))$, уравнение $F'(v^0,u^0)(w,\tilde{u})=\varphi$ имеет решение $(w,\tilde{u})\in V_3$. Следовательно, $F'(v,u)$ отображает $V_3$ на все $V_2$.

Таким образом, для оператора $F(v,u)$ выполняются все условия теоремы Люстерника [4], поэтому касательное подпространство $\Omega_1$ состоит из тех $(w_1, w_2, w_3, \tilde{u})$, которые удовлетворяют уравнению

$$F'(v,u)(w,\tilde{u}) = 0. \tag{10}$$

Тогда в силу [3], функционал $f_1(w,u)$, принадлежащий сопряженному конусу, равен нулю, т.е.

$$f_1(w,\tilde{u}) = 0 \tag{11}$$

для всех $(w,\tilde{u}) \in \Omega_1$.

§ 4. Запрещенные вариации

Следующим шагом процесса вывода необходимого условия оптимальности является анализ функционала

$$\mathcal{J}_1(w) = \int_0^T v_1(t,1)\,dt, \tag{12}$$

где $v^T(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), v_3(t))$.

Л е м м а 2. Для функционала (12) производная Фреше имеет вид

$$\mathcal{J}'_{1v}(v)\,w = \int_0^T w_1(t,1)\,dt.$$

В терминах [3] множество запрещенных вариаций совпадает с множеством тех вариаций $(w,\tilde{u})$, которые удовлетворяют неравенству

$$\int_0^T w_1(t,1)\,dt < 0.$$

Множество запрещенных вариаций непусто и представляет собой выпуклый открытый конус в пространстве $V_3$. Обозначим этот конус через $\Omega_0$. Таким образом,

$$\Omega_0 = \left\{(w,\tilde{u}) : \int_0^T w_1(t,1)\,dt < 0\right\}.$$

Тогда общим видом линейного функционала $f_0(w,\tilde{u}) \in \Omega_0^*$ будет $f_0(w,\tilde{u}) = f_0^1(w) + f_0^2(\tilde{u}) = f_0^1(w)$, и

$$f_0^1(w) = -\lambda \cdot \int_0^T w_1(t,1)\,dt, \quad \lambda \geq 0, \tag{13}$$

а $f_0^2(\tilde{u}) = 0$ .

§ 5 Анализ ограничений на управление

Множество $U_\partial$ функций управления $u(t)$ является замкнутым выпуклым в $L_\infty(0,T)$ и в силу [1] оно имеет непустую внутренность. Обозначим $V_4 = W_2^{1,2} \times W_2^{1,2} \times W_2^1 \times U_\partial$. Тогда $V_4$ является замкнутым выпуклым множеством в $V_3$, имеющим непустую внутренность. Пусть $\Omega_2$ есть конус возможных направлений в точке $(v, u)$ для $V_4$. Тогда если $f_2 \in \Omega_2^*$, то $f_2 = (0, f_2^1)$, где $f_2^1 \in L_\infty^*$ и является опорным к $U_\partial$ в точке $u^0$. Таким образом,

$$f_2(w, \tilde{u}) = f_2^1(\tilde{u}) . \tag{14}$$

§ 6. Анализ фазового ограничения

Следующим моментом в процессе вывода принципа максимума является анализ ограничения (6) на фазовую координату $v_2(t,x)$.

Если для оптимального процесса $(v_1^0, v_2^0, v_3^0, u^0)$ в задаче (1)-(6) окажется, что $v_2^0(t,x) < \bar{v}_2$ при всех $(t,x) \in Q$, то конус $\Omega_3$ вариаций, допустимых по этому ограничению, совпадает со всем пространством $V_3$. Тогда сопряженный конус $\Omega_3^*$ состоит из единственного нулевого элемента, который может быть записан в виде $f_3(w, \tilde{u}) = 0$, $f_3 \in \Omega_3^*$ .

Допустим, что $v_2^0(t,x) = \bar{v}_2$ на некотором множестве $\mathcal{M} \subset Q$, т.е. $\mathcal{M} = \{(t,x) \in Q : v_2^0(t,x) = \bar{v}_2\}$. При этом множество $\mathcal{M}$, как непрерывный прообраз замкнутого множества $\{\bar{v}_2\}$, при непрерывном отображении $v_2^0(t,x)$ является замкнутым множеством. Следовательно, множество $\mathcal{M}$ измеримо.

Обозначим $\Phi(v_2) = \max\limits_{(t,x)\in Q} [v_2(t,x) - \bar{v}_2]$. Очевидно, неравенство (6) эквивалентно неравенству

$$\Phi(v_2) \leq 0 . \tag{15}$$

Нетрудно показать, что функционал $\Phi(v_2)$, $v_2(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$ имеет производную $\Phi'(v_2^0, w_2)$ в точке $v_2^0$ по любому направлению $w_2(t,x)$ и

$$\Phi'(v_2^0, w_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Phi(v_2^0 + \varepsilon \cdot w_2) - \Phi(v_2^0)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\max\limits_{(t,x)\in Q} [v_2^0 + \varepsilon \cdot w_2 - \bar{v}_2]}{\varepsilon} = \max_{(t,x)\in \mathcal{M}} w_2(t,x).$$

Следовательно, в силу [3] конус $\Omega_3$ направлений убывания функционала $\Phi(v_2)$ в точке $v_2^0$ определяется как

$$\Omega_3 = \{w_2 \in W_2^{1,2}(Q): w_2(t,x) < 0, (t,x) \in \mathcal{M}\}.$$

Для $f_3^1 \in \Omega_3^*$ в силу теоремы Рисса об общем виде неотрицательного линейного функционала в гильбертовом пространстве существует такая функция $\psi_4(t,x) \in W_2^{1,2}(\mathcal{M})$, что

$$f_3^1(w) = -(\psi_4, w_2)_{W_2^{1,2}(\mathcal{M})} \geq 0. \tag{16}$$

По определению пространства $W_2^{1,2}$, из включения $\psi_4 \in W_2^{1,2}(\mathcal{M})$ имеем $\psi_4, \frac{\partial \psi_4}{\partial t}, \frac{\partial^2 \psi_4}{\partial x^2} \in L_2(\mathcal{M})$, и скалярное произведение в $W_2^{1,2}(\mathcal{M})$ имеет вид:

$$(\psi_4, w_2)_{W_2^{1,2}} = (\psi_4, w_2)_{L_2} + \left(\frac{\partial \psi_4}{\partial t}, \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)_{L_2} + \left(\frac{\partial^2 \psi_4}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)_{L_2}. \tag{17}$$

Как было отмечено выше, на функцию $w_2(t,x)$ накладываются ограничения, а на ее производные $\frac{\partial w_2}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}$ нет. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial \psi_4}{\partial t}, \frac{\partial w_2}{\partial t}\right)_{L_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi_4}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)_{L_2} = 0. \tag{18}$$

Теперь формула (16) принимает вид:

$$f_3^1(w) = -(\psi_4, w_2)_{L_2(\mathcal{M})}. \tag{19}$$

В области $Q \setminus \mathcal{M}$ ограничений на вариацию $w_2(t,x)$ не накладывается, поэтому функцию $\psi_4(t,x)$ продолжим нулем в этой области, т.е. положим $\psi_4(t,x) \equiv 0$ при $(t,x) \in Q \setminus \mathcal{M}$. Таким образом,

$$f_3^1(w) = -(\psi_4, w_2)_{L_2(\mathcal{M})} = -\iint_{\mathcal{M}} \psi_4(t,x) w_2(t,x)\, dx\, dt =$$

$$= -\iint_Q \psi_4(t,x)\, w_2(t,x)\, dx\, dt,$$

где

$$\iint_{Q\setminus \mathcal{M}} \psi_4(t,x)\, w_2(t,x)\, dx\, dt = 0.$$

Если $f_3 = (f_3^1, 0)$, $f_3 \in \Omega_3^*$, то имеем

$$f_3(w, \tilde{u}) = f_3^1(w) = -\iint\limits_Q \psi_4(t,x)\, w_2(t,x)\, dx\, dt\,. \qquad (20)$$

§ 7. Уравнение Эйлера-Лагранжа

Теперь, когда все ограничения задачи (1)-(6) проанализированы и для каждого ограничения построен сопряженный конус, переходим к установлению взаимосвязи между построенными функционалами $f_0, f_1, f_2, f_3$. По предположению, функции $v_1^0, v_2^0, v_3^0, u^0$ являются оптимальными в задаче (1)-(6). Поэтому в силу [3] существуют линейные функционалы $f_0$, $f_1$, $f_2$, $f_3$, не все равные нулю и такие, что для всех $(w, \tilde{u}) \in V_3$ выполняется уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$f_0(w,\tilde{u}) + f_1(w,\tilde{u}) + f_2(w,\tilde{u}) + f_3(w,\tilde{u}) = 0\,, \qquad (21)$$

где $f_0(w,\tilde{u})$ и $f_3(w,\tilde{u})$ определяются соответственно формулами (13) и (20), $f_1(w,\tilde{u}) = 0$ на векторах $(w,\tilde{u})$, удовлетворяющих (10), $f_2(w,\tilde{u}) = f_2^1(u)$. Следовательно, уравнение (21) принимает вид

$$f_2^1(\tilde{u}) = \lambda \cdot \int_0^T w_1(t,1)\,dt + \iint\limits_Q \psi_4(t,x)\, w_2(t,x)\, dx\, dt\,. \qquad (22)$$

Формулу (22) преобразуем к виду, при котором функция $w$ заменяется функцией $\tilde{u}$.

Пусть $\psi_1^0(t,x)$, $\psi_2^0(t,x)$, $\psi_3^0(t)$, $\psi_4^0(t,x)$ являются решением системы (7)-(9). Умножая уравнения системы (7) на $w$ и интегрируя по частям с использованием граничных и начальных условий (8)-(9), получаем, что

$$\iint\limits_Q \psi_1^0 \cdot \left[\frac{\partial w_1}{\partial t} - a\cdot\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} + c f(v_2^0) w_1 + c v_1^0 \frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\cdot w_2\right] dx\,dt +$$

$$+\iint\limits_Q \psi_2^0 \cdot \left[\frac{\partial w_2}{\partial t} - b\cdot\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial w_2}{\partial x} - k f(v_2^0) w_1 - k v_1^0 \frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\cdot w_2 + g\cdot w_2 - \right.$$

$$\left. - g\cdot w_3\right] dx\,dt + \int_0^T \psi_3^0 \cdot \left[\frac{d w_3}{dt} - d\cdot\int_0^1 w_2(t,x)\,dx + (d+u^0)\, w_3\right] dt +$$

$$+\iint\limits_Q \psi_4^0(t,x)\, w_2(t,x)\,dx\,dt + a\cdot\int_0^T \psi_1^0(t,1)\cdot\frac{\partial w_1(t,1)}{\partial x}\,dt +$$

$$+ b \cdot \int_0^T \psi_2^0(t,1) \frac{\partial w_2(t,1)}{\partial x}\, dt + \int_0^1 \psi_1^0(0,x)\, w_1(0,x)\, dx + \psi_3^0(0)\, w_3(0) +$$

$$+ \int_0^1 \psi_2^0(0,x)\, w_2(0,x)\, dx + \int_0^T \psi_1(t,0) \cdot \left[ w_1(t,0) - a \cdot \frac{\partial w_1(t,0)}{\partial x} \right] dt +$$

$$+ \int_0^T \psi_2^0(t,0) \left[ w_2(t,0) - b \cdot \frac{\partial w_2(t,0)}{\partial x} \right] dt + \lambda \cdot \int_0^T w_1(t,1)\, dt = 0 . \qquad (23)$$

Учитывая, что функции $w, \tilde{u}$ удовлетворяют уравнению (10), из формулы (23) получаем, что

$$\lambda \cdot \int_0^T w_1(t,1)\, dt + \iint_Q \psi_4^0(t,x)\, w_2(t,x)\, dx\, dt +$$

$$+ \int_0^T \psi_3^0(t) \cdot \tilde{u}(t) \cdot (E - v_3^0(t))\, dt = 0 .$$

С учетом последней формулы, $f_2^1(\tilde{u})$ запишется в виде

$$f_2^1(\tilde{u}) = - \int_0^T \psi_3^0 (E - v_3^0(t))\, \tilde{u}(t)\, dt . \qquad (24)$$

Используя результаты [3] о виде линейного функционала, опорного к $U_\partial$, имеем

$$- \psi_3^0(t) (E - v_3^0(t)) \cdot (u - u^0(t)) \geq 0$$

для почти всех $t \in [0,T]$ и всех $u \in [0, u_0]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В условии (8) можно принять $\lambda = 1$.

Поступила в ред.-изд. отдел
13 июня 1989 г.

Л и т е р а т у р а

1. Мусабеков К.С. Теоремы существования решения в задаче оптимального управления химическим реактором // Управляемые процессы и оптимизация (Управляемые системы). - Новосибирск, 1982. - Вып. 22. - С. 30-50.

2. Мусабеков К.С. Необходимые условия оптимальности в задаче управления химическим реактором // Задачи поиска оптимальных решений (Управляе-

мые системы). - Новосибирск, 1984. - Вып. 24. - С. 53-78.

3. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1965. - Т. 5. № 3. - С. 395-453.

4. Люстерник Л.А. Об условных экстремумах функционалов // Мат. сб. - 1934. - Т. 41. № 3. - С. 390-401.