Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 519.8

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ЛИНИИ

Г.Г.Забудский

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается задача размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на линии. В качестве ограничений на расположение объектов задаются минимально допустимые расстояния между ними, а критерием служит суммарная стоимость связей [1]. Такая постановка задачи актуальна, например, при размещении файлов на магнитном носителе и создании робототехнологических комплексов [2, 3]. Задача является NP -трудной даже для случая, когда все минимально допустимые расстояния совпадают [2]. Более общие постановки задачи предлагаются, например, в [4-6, 8].

В данной работе исследуется отображение множества перестановок в подмножество вершин единичного куба и описываются способы построения допустимых решений исходной задачи по оптимальному решению непрерывной. В соответствии с подходом из [7] анализируется структура L -разбиения релаксационного многогранного множества задачи, строятся верхняя и нижняя оценки длины цепей дробных L -классов.

Пусть n - число размещаемых объектов. С помощью индексов i и j будем обозначать их номера, $i,j=\overline{1,n}$. Задан n -вершинный неориентированный граф $G(N,E)$, где $N=\{1,2,\ldots,n\}$ - множество номеров объектов, $E\subset N\times N$. Ребро $(i,j)\in E$, если имеется связь между объектами с номерами i и j, удельная стоимость которой равна $c_{ij}=c_{ji}>0$. Через r_{ij} ($r_{ij}=r_{ji}>0$) обозначим минимально допустимые расстояния между ними. Учитывая введенные обозначения и используя [6], модель можно записать как

$$f(u)=\sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\,u_{ij}\longrightarrow \min \qquad (1)$$

при условиях:

$$\begin{aligned} &x_i-x_j+u_{ij}\geqslant 0,\\ &x_j-x_i+u_{ij}\geqslant 0, \quad (i,j)\in E, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_i - x_j - r_{ij} + A z_{ij} \geq 0, \qquad (3)$$

$$x_j - x_i - r_{ij} + A(1 - z_{ij}) \geq 0,$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad (4)$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Значение булевой переменной z_{ij} указывает на взаимное расположение i -го и j -го объектов на линии. Если $z_{ij} = 1$, то объект с номером i находится левее j -го, а если $z_{ij} = 0$, то расположение обратное. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задает координаты объектов, а непрерывные переменные $u_{ij}, (ij) \in E$, оценивают сверху расстояния между ними. Достаточно большая константа $A > 0$ появляется при стандартной записи альтернативных условий с помощью булевых переменных [9] и может быть выбрана, например, так: $A = (n+1) \cdot \max_{i,j} r_{ij}$. Заметим, что неотрицательность u_{ij} следует из ограничений (2), а x_j, $j = \overline{1, n}$, могут быть произвольного знака, но, не ограничивая общности, их можно считать неотрицательными.

Обозначим через B^m множество вершин m -мерного единичного куба, где $m = n(n-1)/2$. Будем считать, что каждая компонента m -мерного булева вектора z , задающего B^m, имеет вид z_{ij}, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$, причем упорядочение компонент произвольное (но фиксированное!). Набор (z_{ij}, z_{ik}, z_{jk}) компонент вектора z , где $i < j < k$, будем называть тройкой. Тройка считается противоречивой, если она имеет вид $(0, 1, 0)$ либо $(1, 0, 1)$. Вектор называется противоречивым, если он содержит хотя бы одну противоречивую тройку, иначе - непротиворечивым. Множество непротиворечивых векторов обозначим через $\mathcal{D}(B^m)$. Отметим, что иногда под тройкой будем понимать тройку номеров (q, s, t), $q < s < t$.

Далее мы будем изучать выпуклое многогранное множество Ω , определяемое системой линейных неравенств:

$$x_i - x_j - r_{ij} + A z_{ij} \geq 0, \qquad (5)$$

$$x_j - x_i - r_{ij} + A(1 - z_{ij}) \geq 0,$$

$$0 \leq z_{ij} \leq 1, \qquad (6)$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Оно тесно связано с релаксационным многогранным множеством Ω' , заданным ограничениями (2), (3), (6). По любой точке $(z, x) \in \Omega$ всегда можно построить точку из Ω' . Действительно, положим $u_{ij} = x_i - x_j$, если $x_i \geq x_j$, и $u_{ij} = x_j - x_i$, если $x_i < x_j$. Ясно, что

$(z, x, u) \in \Omega'$. Поэтому достаточно ограничиться изучением Ω, имеющим немного более простое описание.

§ 2. Допустимые решения задачи (1)-(4)

Здесь мы покажем, как связаны множество непротиворечивых векторов $\mathcal{D}(B^m)$ и допустимые решения задачи (1)-(4).

Обозначим через $\mathcal{P}(n)$ множество всех перестановок n элементов. Опишем процедуру, устанавливающую взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{D}(B^m)$ и $\mathcal{P}(n)$.

Покажем, что каждому вектору $z \in \mathcal{D}(B^m)$ однозначно соответствует перестановка $\pi(z) \in \mathcal{P}(n)$. Для этого возьмем произвольный $z \in \mathcal{D}(B^m)$ и построим $\pi(z)$. Построение будем проводить индуктивно. Пусть z_{ij} - некоторая компонента вектора z, ее значение однозначно определяет перестановку элементов i и j. Так как $z \in \mathcal{D}(B^m)$, то для любого $k \neq i, j$, например, $i < j < k$, однозначно определяется перестановка тройки индексов i, j, k по значениям z_{ij}, z_{ik} и z_{jk}. Это свойство легко проверяется. Предположим теперь, что перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ построена. Необходимо по вектору z определить расположение номера i_{k+1} по отношению к i_s, $s = \overline{1,k}$. Не умаляя общности, для удобства обозначений можно считать, что $i_{k+1} > i_s$, $s = \overline{1,k}$. Покажем, что положение $(k+1)$-го элемента однозначно определяется по следующим компонентам вектора :

$$z_{i_1 i_{k+1}}, \ z_{i_2 i_{k+1}}, \ldots, \ z_{i_k i_{k+1}} \ ;$$

которые имеют значения

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{s}, 0, 0, \ldots 0 \ ,$$

где s может измениться от 0 до k. Предположим, что это не так, т.е. существуют q и p, $q \geq p+1$, такие, что $z_{i_p i_{k+1}} = 0$ и $z_{i_q i_{k+1}} = 1$. Тогда, если $i_p < i_q$, то $z_{i_p i_q} = 1$ и тройка $(z_{i_p i_q}, z_{i_p i_{k+1}}, z_{i_q i_{k+1}})$ имеет вид $(1, 0, 1)$. Для случая $i_p > i_q$ справедливо равенство $z_{i_q i_p} = 0$ и тройка $(z_{i_q i_p}, z_{i_q i_{k+1}}, z_{i_p i_{k+1}})$ приобретает вид $(0, 1, 0)$. Оба исхода противоречат тому, что $z \in \mathcal{D}(B^m)$.

Элемент i_{k+1} располагается между i_p и i_{p+1} такими, что $z_{i_p i_{k+1}} = 1$, $z_{i_{p+1} i_{k+1}} = 0$. Если $z_{i_s i_{k+1}} = 0, s = \overline{1,k}$, то перестановка $(k+1)$-го элемента имеет вид $(i_{k+1}, i_1, \ldots, i_k)$, а если $z_{i_s i_{k+1}} = 1$, $s = \overline{1,k}$, то $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1})$. Если перестановке k элементов соответствует булев вектор с числом компонент $k(k-1)/2$, а для определения положения очередного элемента необходим K -вектор, тогда перестановке $K+1$ элемента соответствует булев вектор с числом компонент

$$\frac{K(K-1)}{2}+K=\frac{K(K+1)}{2}.$$

Продолжая этот процесс, построим $\mathcal{X}(\mathfrak{Z})$. Теперь по произвольной перестановке $\mathcal{X}\in\mathcal{P}(n)$ однозначно построим вектор $\mathfrak{Z}\in\mathcal{D}(B^m)$. Пусть $\mathcal{X}=(i_1, i_2,\dots,i_n)$. Тогда компоненты вектора $\mathfrak{Z}$ определим следующим образом: $\mathfrak{Z}_{i_1 i_s}=1$ для всех $i_s>i_1$; $\mathfrak{Z}_{i_s i_1}=0$ для всех $i_s<i_1$; $\mathfrak{Z}_{i_2 i_s}=1$ для всех $i_s>i_2$, $i_s\neq i_1$; $\mathfrak{Z}_{i_s i_2}=0$ для всех $i_s<i_2$, $i_s\neq i_1$; $\mathfrak{Z}_{i_{n-1} i_n}=1$, если $i_{n-1}<i_n$; $\mathfrak{Z}_{i_n i_{n-1}}=0$, если $i_{n-1}>i_n$. Однозначность $\mathfrak{Z}$ следует из построения. Покажем, что $\mathfrak{Z}\in\mathcal{D}(B^m)$. Рассмотрим произвольные номера $i_p<i_q<i_k$. Если их расположение в $\mathcal{X}$ имеет вид $(\dots,i_p,\dots,i_q,\dots,i_k,\dots)$, то $\mathfrak{Z}_{i_p i_q}=1$, $\mathfrak{Z}_{i_p i_k}=1$, $\mathfrak{Z}_{i_q i_k}=1$, т.е. тройка $(\mathfrak{Z}_{i_p i_q},\mathfrak{Z}_{i_p i_k},\mathfrak{Z}_{i_q i_k})$ непротиворечива. Аналогично проверяется непротиворечивость тройки для других взаимных положений элементов i_p, i_q, i_k. Так как элементы взяты произвольно, то $\mathfrak{Z}$ не будет содержать ни одной противоречивой тройки.

Таким образом, при построении модели (1)-(4) используется отображение множества $\mathcal{P}(n)$ в подмножество вершин единичного куба B^m. Рассмотрим некоторые свойства этого отображения.

Компонента вектора $\mathfrak{Z}\in\mathcal{D}(B^m)$ называется инвертируемой, если при изменении ее значения на противоположное получается вектор из $\mathcal{D}(B^m)$. Легко заметить, что инвертируемыми являются те и только те компоненты $\mathfrak{Z}_{ij}$ вектора $\mathfrak{Z}$, у которых индексы i и j соответствуют соседним элементам в перестановке $\mathcal{X}(\mathfrak{Z})\in\mathcal{P}(n)$, так как инвертирование означает изменение взаимного расположения этих элементов в $\mathcal{X}(\mathfrak{Z})$.

Пусть неориентированный граф H образован следующим образом: его вершины - множество $\mathcal{D}(B^m)$ - соединяются ребром, когда соответствующие им векторы являются соседними в B^m, т.е. отличаются одной координатой. Отметим свойства этого графа.

1. Граф H является связным. Действительно, произвольную перестановку можно получить, переставляя соседние элементы, поэтому любые две вершины в графе H соединены путем.

2. Степень каждой вершины в H равна $n-1$. Это следует из того, что в любой перестановке имеется $n-1$ пара соседних элементов, поэтому инвертируемых компонент $n-1$, а инвертирование компоненты означает переход в соседнюю вершину H.

3. Для произвольной пары индексов (i,j) на любой из граней выпуклой оболочки множества B^m, лежащей в гиперплоскости $\mathfrak{Z}_{ij}=0$ или $\mathfrak{Z}_{ij}=1$,

имеется $n!/2$ вершин графа H. Это следует из того, что фиксирование взаимного расположения двух элементов в перестановке сокращает число перестановок до $n!/2$.

Покажем, какая связь существует между множеством $\mathcal{D}(B^m)$ и точками $(x,z)\in\Omega$, у которых $z\in B^m$.

Утверждение 2.1. Если $(x,z)\in\Omega$ и $z\in B^m$, то $z\in\mathcal{D}(B^m)$. Обратно, для всякого $z\in\mathcal{D}(B^m)$ найдется x такой, что $(z,x)\in\Omega$.

Доказательство. Пусть $(z,x)\in\Omega$, $z\in B^m$ и $z\notin\mathcal{D}(B^m)$. Тогда в z найдется противоречивая тройка (z_{ij}, z_{ik}, z_{jk}). Если она имеет вид $(0,1,0)$, то, подставляя эти значения в соответствующие неравенства из (5), имеем:

$$x_i - x_j - r_{ij} \geqslant 0, \quad x_k - x_i - r_{ik} \geqslant 0, \quad x_j - x_k - r_{jk} \geqslant 0.$$

Складывая первое и третье неравенства, получаем противоречие со вторым, так как $r_{qs} > 0$ для всех $q \neq s$. Аналогично рассматривается случай тройки $(1,0,1)$. Из полученного противоречия следует, что $z\in\mathcal{D}(B^m)$.

Покажем, что для каждого $z\in\mathcal{D}(B^m)$ можно найти $x\in R^n$ такой, что $(z,x)\in\Omega$. Пусть вектору z соответствует перестановка $\pi(z)=(i_1,i_2,\ldots,i_n)$. Тогда x можно построить, например, так: положить $x_{i_1}=c$, где c - произвольная константа, а

$$x_{i_p} = \max_{1\leq s<p}\{x_{i_{p-s}} + r_{i_{p-s}\, i_p}\}$$

для любого $1<p\leq n$. Легко проверить, что $(z,x)\in\Omega$. Утверждение доказано.

Отметим, что если c и r_{ij}, $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{i+1,n}$, - целые числа, то вектор, построенный описанным выше способом, будет целочисленным.

Утверждение 2.2. Для произвольного $(z,x)\in\Omega$, $z\notin B^m$, подходящим округлением компонент вектора z можно построить $\bar{z}\in\mathcal{D}(B^m)$.

Доказательство. Пусть $(z,x)\in\Omega$. Упорядочим компоненты вектора x по неубыванию. Если для некоторых i и j выполняется $x_i=x_j$, то их порядок фиксируем произвольно. Запишем индексы компонент полученного вектора в виде перестановки $\pi=(i_1,i_2,\ldots,i_n)$. Утверждается, что ей соответствует вектор $\bar{z}\in\mathcal{D}(B^m)$, являющийся одним из округлений z. Действительно, если $z_{qs}=0$ для некоторых q и s, то $x_q > x_s$, так как $x_q - x_s \geqslant r_{qs}$, а тогда, по построению π и соответствию $\mathcal{D}(B^m)$ и $\mathcal{P}(n)$, имеем $\bar{z}_{qs}=0$. Аналогично рассматривается случай $z_{qs}=1$. Дробные компоненты z_{jk} вектора z округляются до значений $\bar{z}_{ik}$. Утверждение доказано.

Отметим, что утверждение 2.2 дает один из способов построения допустимых решений задачи (1)-(4) по оптимальному решению непрерывной задачи. Это построение можно производить с учетом значения целевой функции, например, следующим образом. Пусть $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_{s-1}} < x_{i_s} = x_{i_{s+1}} < x_{i_{s+2}} < \ldots$, тогда если

$$\sum_{k=1}^{s-1} c_{i_k i_s} > \sum_{k=1}^{s-1} c_{i_k i_{s+1}} \text{ и } \sum_{k=s+2}^{n} c_{i_k i_s} < \sum_{k=s+2}^{n} c_{i_k i_{s+1}},$$

то целесообразно взять перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_s, i_{s+1})$, в противном случае $(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, i_s)$.

§ 3. L - структура релаксационного многогранного множества

Напомним некоторые определения [7]. Пусть Z^k - множество всех k-мерных целочисленных векторов. Тогда L - разбиение пространства R^k - задается следующим образом.

Возьмем $x, y \in R^k$, $x \succ y$, где $\succ$ - знак лексикографического сравнения. Будем говорить, что x эквивалентна y, $x \overset{L}{\sim} y$, если не существует $z \in Z^k$ такой, что $x \succcurlyeq z \succcurlyeq y$. Отметим, что каждая точка $z \in Z^k$ образует отдельный класс, остальные классы состоят из нецелочисленных точек и называются дробными. Для произвольного $W \subseteq R^k$ через W/L обозначим фактор-множество, образованное отношением эквивалентности L. Элементы множества W/L называются L-классами. Будем говорить, что множество V лексикографически больше V', и писать $V \succ V'$, если $y \succ y'$ для всех $y \in V$, $y' \in V'$. Для такого бинарного отношения W/L является линейно упорядоченным. Любой дробный L-класс из W/L может быть записан в виде

$$V = W \cap \{ y : y = a_i, i = 1, 2, \ldots, s-1, a_s < y_s < a_s + 1 \},$$

где a_i, $i = \overline{1, s-1}$, s, - некоторые целые числа, $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Пусть $Z^{k,t}$ - множество всех k-мерных векторов, у которых первые t компонент целые. Подмножество Q дробных L-классов называется цепью, если для любых $V, V' \in Q$, $(V \succ V')$ не найдется точки $z \in W \cap Z^{k,t}$ такой, что $V \succcurlyeq z \succcurlyeq V'$. Обозначим через $C(W)$ множество всех цепей, порожденных W, и определим степень "дробности" W с помощью функции

$$\Psi(W) = \sup \{ |Q| : Q \in C(W) \}.$$

Докажем утверждение, которое будет использоваться при построении верхней и нижней оценок $\Psi(\Omega)$.

Утверждение 3.1. Пусть $(\hat{z},\hat{x})\in\Omega$, $\hat{z}\in\mathcal{D}(B^m)$ и $\hat{z}_{jk}$ – некоторая компонента вектора $\hat{z}$. Тогда в Ω лежит вектор $(z',\hat{x})$, который получается заменой значения $\hat{z}_{jk}$ на подходящее $\varepsilon\in(0,1)$.

Доказательство. Вектор $(z',\hat{x})$ отличается от $(\hat{z},\hat{x})$ значением одной компоненты с индексами (j,k), поэтому достаточно показать, что найдется число $z'_{jk}\in(0,1)$, удовлетворяющее паре неравенств из (5):

$$\begin{aligned}\hat{x}_j-\hat{x}_k-\tau_{jk}+Az_{jk}&\geqslant 0,\\ \hat{x}_k-\hat{x}_j-\tau_{jk}+A(1-z_{jk})&\geqslant 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Обозначим $\Delta_0=\frac{1}{A}(\hat{x}_k-\hat{x}_j+\tau_{jk})$, $\Delta_1=\frac{1}{A}(\hat{x}_k-\hat{x}_j-\tau_{jk}+A)$, тогда из (7) получим

$$\Delta_0\leq z_{jk}\leq\Delta_1.$$

Так как $\Delta=\Delta_1-\Delta_0=\frac{1}{A}(A-2\tau_{jk})>0$ из выбора A, то система (7) имеет решение. Если $\hat{z}_{jk}=0$, то $\hat{x}_j-\hat{x}_k\geqslant\tau_{jk}$ и $\Delta_1\in(0,1)$, тогда в качестве ε можно взять Δ_1. Если $\hat{z}_{jk}=1$, то $x_k-x_j\geqslant\tau_{jk}$ и $\Delta_0\in(0,1)$, тогда ε можно положить равным Δ_0. Утверждение доказано.

Отметим, что в Ω содержатся точки вида (z^1,x^1), (z^2,x^2), где $z^1,z^2\in\mathcal{D}(B^m)$, $z^1=(1,1,\dots,1)$, $z^2=(0,0,\dots,0)$. Отсюда и из определения цепи дробных L-классов следует, что максимальная цепь в Ω ограничена снизу и сверху точками вида (z'',x''), (z',x'), где $z',z''\in\in\mathcal{D}(B^m)$, а также что при оценивании длины цепей достаточно рассматривать лишь первые m компонент векторов из Ω. Используя это замечание, построим верхнюю и нижнюю оценки для максимальной цепи дробных L-классов в Ω/L.

Через $\tilde{V}_{pt}$ обозначим дробный L-класс из Ω, у представителей которого первая дробная компонента имеет индексы (p,t), а V_{pt} – множество векторов, полученное из класса $\tilde{V}_{pt}$ отбрасыванием последних n координат его элементов. Множества V_{pt} мы тоже будем называть L-классами. Из отмеченного выше следует, что при выводе оценок вместо $\tilde{V}_{pt}$ достаточно рассматривать множества V_{pt}. Порядок компонент в векторах z, $(z,x)\in\Omega$, произвольный, но фиксированный.

Нетрудно показать, что длина максимальной цепи дробных L-классов в Ω/L не превосходит $2m$. Если это не так, то найдутся три дробных L-класса, у представителей которых индексы первых дробных компонент совпадают. Пусть $V^1_{pt}>V^2_{pt}>V^3_{pt}$. Тогда, воспользовавшись утверждением 2.2, можно путем подходящего округления точки $z \in V^2_{pt}$ построить точку $\bar{z} \in \mathcal{D}(B^m)$ такую, что выполняется одно из двух условий: либо $V^1_{pt} \succ \bar{z} \succ \succ V^2_{pt} \succ V^3_{pt}$, либо $V^1_{pt} \succ V^2_{pt} \succ \bar{z} \succ V^3_{pt}$, т.е. эти L-классы разделяются целой точкой. Отсюда следует, что максимальная цепь в Ω/L не превосходит $2m$. Далее, учитывая специфику задачи, построим более точную верхнюю оценку.

Обозначим через $I(n)$ количество неинвертируемых компонент в произвольном векторе $z \in \mathcal{D}(B^m)$. Из § 2 следует, что $I(n)=(n-1)(n-2)/2$, так как число инвертируемых компонент равно $n-1$. Будем предполагать также, что z - вектор-строка, т.е. можно говорить, что одна компонента этого вектора расположена левее или правее другой.

Т е о р е м а 3.1. Для произвольного упорядочения булевых переменных справедлива оценка

$$\Psi(\Omega) \leq (n-1)(n-2)+1 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные точки $z', z'' \in \in \mathcal{D}(B^m)$. Пусть $z' \succ z''$ такие, что не существует $z \in \mathcal{D}(B^m)$, удовлетворяющей условию $z' \succ z \succ z''$. Оценим максимальное количество дробных L-классов между ними. Запишем z' и z'' в виде $z'=(t, z'_{qs}, \delta')$, $z''=(t, z''_{qs}, \delta'')$, где (q,s) - индексы первой компоненты такой, что $z'_{qs}=1$, $z''_{qs}=0$, t - набор компонент, которые стоят левее (q,s), и их значения в z' и z'' совпадают, а δ' и δ'' - совокупности остальных компонент. Отметим свойства, которым удовлетворяют наборы δ' и δ'', являющиеся следствием выбора z' и z'', а именно:

1) значения 1 в δ' и 0 в δ'' имеют только неинвертируемые компоненты;

2) δ' является лексикографическим минимумом среди всех таких δ, что $(t,1,\delta) \in \mathcal{D}(B^m)$, а δ'' - лексикографическим максимумом среди всех таких δ, что $(t,0,\delta) \in \mathcal{D}(B^m)$.

Рассмотрим множество дробных L-классов из Ω/L, образованных подстановкой вместо единиц в δ' и нулей в δ'' подходящих дробных величин. По утверждению 3.1, такие найдутся, и, очевидно, соответствующие дробные L-классы будут лежать между z' и z''. Так как Ω выпукло, то существует дробный L-класс $\widetilde{V}_{qs}$ такой, что $z' \succ V_{qs} \succ z''$. Обозначим совокупность указанных L-классов через U. Покажем, что других дробных L-классов между z' и z'' нет.

Отметим, что у любого дробного L-класса, находящегося между z' и z'', значения компонент до первой дробной совпадают со значениями соответствующих компонент z' или z''. Действительно, если это не так, то, по утверждению 2.2, округлением любого представителя этого L-класса получим точку $\bar{z} \in \mathcal{D}(B^m)$, разделяющую z' и z''.

Пусть $\widetilde{V}_{ke}$ - произвольный дробный $\mathcal{L}$ -класс такой, что $\mathfrak{Z}' \succ V_{ke} \succ \mathfrak{Z}''$. Покажем, что $\widetilde{V}_{ke} \in \mathcal{U}$. Из отмеченного выше и свойств наборов δ' и δ'' следует, что $\mathfrak{Z}'_{ke} = 1$ либо $\mathfrak{Z}''_{ke} = 0$, так как в противном случае $V_{ke} \succ \mathfrak{Z}'$, либо $\mathfrak{Z}'' \succ V_{ke}$. Отсюда $\widetilde{V}_{ke} \in \mathcal{U}$.

Оценим мощность множества $\mathcal{U}$: заметим, что количество единиц в δ' и нулей в δ'' не более $I(n)$. Тогда

$$\Psi(\Omega) \leq 2 \cdot I(n) + 1 = (n-1)(n-2) + 1 .$$

Теорема доказана.

Теперь покажем, что при определенном порядке компонент в векторах из $\mathcal{D}(B^m)$ существуют цепи дробных $\mathcal{L}$ -классов длины больше m. Для этого специальным образом построим точки $\mathfrak{Z}'$ и $\mathfrak{Z}''$ из $\mathcal{D}(B^m)$ и оценим снизу длину цепи дробных $\mathcal{L}$ -классов между ними.

Определим порядок компонент векторов из $\mathcal{D}(B^m)$ следующим образом. Первые $n-2$ компоненты имеют пары индексов

$$(n-1,n)(n-2,n-1), \ldots, \left(\left[\tfrac{n}{2}\right]+2, \left[\tfrac{n}{2}\right]+3\right), \left(\left[\tfrac{n}{2}\right], \left[\tfrac{n}{2}\right]+2\right),$$

$$\left(\left[\tfrac{n}{2}\right]-1, \left[\tfrac{n}{2}\right]+1\right), \left(\left[\tfrac{n}{2}\right]-2, \left[\tfrac{n}{2}\right]-1\right), \ldots, (1,2),$$

причем упорядочение их между собой может быть произвольным. Далее расположены две компоненты с индексами $(1,n), \left(\left[\tfrac{n}{2}\right], \left[\tfrac{n}{2}\right]+1\right)$, правее которых порядок компонент нам не важен. При указанном порядке компонент вектору $\mathfrak{Z}'$ будет соответствовать перестановка π', а $\mathfrak{Z}''$ - перестановка π''. Эти перестановки имеют вид:

$$\pi' = \left(\left[\tfrac{n}{2}\right]+1, \left[\tfrac{n}{2}\right]-1, \ldots, 1, n, n-1, \ldots, \left[\tfrac{n}{2}\right]+2, \left[\tfrac{n}{2}\right]\right),$$

$$\pi'' = \left(n, n-1, \ldots, \left[\tfrac{n}{2}\right]+2, \left[\tfrac{n}{2}\right], \left[\tfrac{n}{2}\right]+1, \left[\tfrac{n}{2}\right]-1, \ldots, 2, 1\right).$$

Нетрудно заметить, что $\mathfrak{Z}'' = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где значение 1 принимает компонента с индексами $\left(\left[\tfrac{n}{2}\right], \left[\tfrac{n}{2}\right]+1\right)$. Из-за сложности обозначений мы $\mathfrak{Z}'$ выписывать не будем, а ниже рассмотрим его на примере. Отметим, что по значениям первых n компонент векторов $\mathfrak{Z}'$ и $\mathfrak{Z}''$ однозначно определяются значения всех остальных, так как по ним строятся перестановки π' и π''. Это легко проверяется непосредственно. Ясно, что $\mathfrak{Z}' \succ \mathfrak{Z}''$, так как $\mathfrak{Z}'_{1n} = 1$, а $\mathfrak{Z}''_{1n} = 0$ и значения компонент до $(1,n)$ в $\mathfrak{Z}'$ и $\mathfrak{Z}''$ совпадают. Это следует из того, что взаимное расположение элементов, номера которых служат индексами компонент левее $(1,n)$, в π' и π'' одинаковое. Покажем, что не существует $\mathfrak{Z} \in \mathcal{D}(B^m)$ такого, что $\mathfrak{Z}' \succ \mathfrak{Z} \succ \mathfrak{Z}''$.

Предположим противное, т.е. найдется компонента с индексами (q,s) такая, что выполняется одно из двух условий:

		...	$(1,n)$	$([\frac{n}{2}],[\frac{n}{2}]+1)$	...	(q,s)	...
1)	$\mathfrak{z}'$	$0\ldots0$	1	0	. . .	. . .	. . .
	$\mathfrak{z}$	$0\ldots0$	0	1	$0\ldots0$	1	...
	$\mathfrak{z}''$	$0\ldots0$	0	1	$0\ldots0$	0	...
2)	$\mathfrak{z}'$	$0\ldots0$	1	0	$\alpha_1\ldots\alpha_p$	1	...
	$\mathfrak{z}$	$0\ldots0$	1	0	$\alpha_1\ldots\alpha_p$	0	...
	$\mathfrak{z}''$	$0\ldots0$	0	1	$0\ldots0$	0	...,

где первая строка - это индексы компонент, а α_k, $k=\overline{1,p}$, - либо 0, либо 1. Как уже отмечалось, значениями первых n компонент векторов $\mathfrak{z}'$ и $\mathfrak{z}''$ однозначно определяются значения остальных, откуда следует, что оба случая невозможны. В результате получаем, что не существует $\mathfrak{z}\in\mathcal{D}(B^m)$, разделяющего $\mathfrak{z}'$ и $\mathfrak{z}''$.

Нетрудно подсчитать, что количество расположенных правее $(1,n)$ неинвертируемых компонент со значением 0 в $\mathfrak{z}''$ равно $n(n-1)/2-n$. Число расположенных правее $(1,n)$ неинвертируемых компонент со значением 1 в $\mathfrak{z}'$ легко определяется из вида перестановки π'. Если n четное, то оно равно $n^2/4-2$, если n нечетное, то $(n-1)^2/4-2+(n-1)/2$. С учетом дробного $\mathcal{L}$-класса $\tilde{V}_{1n}$ нижнюю оценку функции $\Psi(\Omega)$ дает следующая

Теорема 3.2. При указанном упорядочении булевых переменных справедлива оценка

$$\Psi(\Omega)\geqslant\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+\dfrac{n^2-8}{4}, & n \text{ четное;}\\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+\dfrac{n^2-9}{4}, & n \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Заметим, что при $n>5$ нижняя оценка больше количества булевых переменных, которое равно m.

Покажем на примере, как строить цепь дробных $\mathcal{L}$-классов для $n=4$ способом, предложенным выше. Перестановки π' и π'' имеют вид $\pi'=(3,1,4,2)$, $\pi''=(4,2,3,1)$, а векторы $\mathfrak{z}'$ и $\mathfrak{z}''$ - вид

	$(2,4)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(1,2)$
$\mathfrak{z}'$	0	0	1	0	1	1
$\mathfrak{z}''$	0	0	0	1	0	0

Тогда цепь дробных L -классов $\widetilde{V}^1 > \widetilde{V}^2 > \widetilde{V}^3 > \widetilde{V}^4 > \widetilde{V}^5$ выпишем с помощью компонент z^i их представителей $i=\overline{1,5}$:

$$z^1 = (0,0,1,0,1,\varepsilon_1) \qquad z^4 = (0,0,0,1,\varepsilon_4,0)$$
$$z^2 = (0,0,1,0,\varepsilon_2,1) \qquad z^5 = (0,0,0,1,0,\varepsilon_5)$$
$$z^3 = (0,0,\varepsilon_3,0,1,1)$$
$$\varepsilon_i \in (0,1),\ i=\overline{1,5}.$$

Поступила в ред.-изд. отдел
7 мая 1990 г.

Литература

1. Забудский Г.Г. Об одной задаче размещения объектов на линии// Тез. докл. 4 Всесоюз. сов. по методам и программам решения оптимизационных задач на графах и сетях, Новосибирск, 1989. - Ч. 2. - С. 29.

2. Picard J.C., Queyranne M. On the One-Dimensional Space Allocation Problem // Oper. res. - 1981. - Vol. 29. - P 371-391.

3. Павловский В.Е., Прудковский С.Г. Исследование и верификация моделей робототехнологических комплексов. - М., 1986. - 32 с. - (Препринт № 13 ИПМ).

4. Забудский Г.Г., Колмычевская Н.В., Леванова Т.В. Оптимизация размещения технологического оборудования на генплане // Тез. докл. 10 Всесоюз. симп. по системам программного обеспечения решения задач оптимального планирования, М., 1988. - С. 148.

5. Забудский Г.Г. Об оценках стоимости связывающей сети в некоторых задачах размещения // Дискретная оптимизация и анализ сложных систем. - Новосибирск, 1989. - С. 10-25.

6. Жак С.В., Зинченко А.Б. Комбинаторные методы решения задачи размещения помещений в производственном здании // Автоматизация архитектурно-строительного проектирования промышленных предприятий.- Ростов-на-Дону, 1979. - С. 87-92.

7. Колоколов А.А. Алгоритмы отсечения и некоторые разбиения множеств // Дискретная оптимизация и численные методы решения прикладных задач. - Новосибирск, 1986. - С. 50-67.

8. Love R.F., Wong J.Y. On Solving a One-Dimensional Space Allocation Problem With Integer Programming // INFOR. - 1976. - Vol. 14, N 2. - P. 139-143.

9. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование / М.: Наука, 1969. - 368 с.