Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 519.854

АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ С ВЫИГРЫШАМИ

В.Л.Береснев, А.Ж.Жолдошев

Задача о максимальном потоке в сети - хорошо известная и достаточно полно исследованная (см., например, [1, 2]) оптимизационная задача. Наиболее известным алгоритмом ее решения является алгоритм Форда-Фалкерсона [1, 2]. Это итеративный алгоритм, на каждом шаге которого отыскивается так называемый увеличивающий путь и производится изменение потока вдоль этого пути, приводящее к потоку большей мощности.

Важным обобщением задачи о максимальном потоке является задача, в которой учитывается возможное изменение потока при прохождении через дугу. Это изменение характеризуется коэффициентом выигрыша (потерь) для дуги, показывающим, как увеличивается или уменьшается поток при выходе из дуги по сравнению с потоком при входе. Первые упоминания в литературе о задаче максимизации потока с выигрышами относятся к 60-м годам (см. [3, 4]) и связаны главным образом с обсуждением различных аспектов применения линейного программирования. Основные результаты для потоков с выигрышами получены в [5]. В этой работе показано, что аналог алгоритма Форда-Фалкерсона дает максимальный поток, если в качестве увеличивающего пути использовать путь с наибольшим коэффициентом выигрыша.

В настоящей работе показано, что если среди путей с наибольшим коэффициентом выигрыша в качестве увеличивающего выбирать путь наименьшей длины, то алгоритм Форда-Фалкерсона для задачи максимизации потока с выигрышами заканчивает работу через конечное число итераций.

1. Рассмотрим ориентированную сеть $N(s,t,U,E)$ с множеством вершин U, множеством дуг E, вершиной-источником s и вершиной-стоком t. Для дуги $e \in E$ через $u'(e)$ обозначим начальную вершину, а через $u''(e)$ - конечную. Считаем, что множества $\{e \mid u''(e)=s\}$, $\{e \mid u'(e)=t\}$ пустые. Если $e \in E$, то через $\bar{e}$ обозначим пару $(u''(e), u'(e))$. Будем считать, что пары e и $\bar{e}$ одновременно не являются дугами исходной сети N.

Последовательность дуг $\mu = (e_1, \ldots, e_m)$ сети N такую, что $u''(e_{i-1}) = u'(e_i)$, $i = 2,\ldots,m$, называют **путем** с начальной вершиной $u'(e_1)$ и конечной вершиной $u''(e_m)$. Путь называют **контуром**, если $u'(e_1) = u''(e_m)$. Путь называют прос т ы м, если все вершины $u'(e_i)$, $i=2,\dots,m$, различные, а вершина $u'(e_1)$ совпадает разве что с вершиной $u''(e_m)$. Подпоследовательность $\mu_1=(u_k,\dots,u_l)$, $1\le k\le l\le m$, будем называть ч а с т ь ю пути μ. Путь, состоящий из двух частей μ_1 и μ_2, будем обозначать через $\mu_1\circ\mu_2$.

Пусть для каждой дуги $e\in E$ заданы величина $b(e)\geqslant 0$, называемая п р о п у с к н о й с п о с о б н о с т ь ю дуги e, и величина $k(e)>0$, которую назовем к о э ф ф и ц и е н т о м в ы и г р ы ш а для дуги e.

П о т о к о м с в ы и г р ы ш а м и в сети N назовем вектор $X=(x(e))$, $e\in E$, такой, что

$$\sum_{e|u''(e)=u} k(e)x(e)-\sum_{e|u'(e)=u} x(e)=0,\quad u\in U\setminus\{s,t\};$$

$$0\le x(e)\le b(e),\quad e\in U.$$

М о щ н о с т ь ю потока $X=(x(e))$ назовем величину

$$f(X)=\sum_{e|u''(e)=t} k(e)x(e).$$

Далее будем рассматривать только потоки с выигрышами, однако часто для краткости будем говорить просто "поток".

В предположении, что в сети N отсутствуют контуры $\mu^0=(e_1,\dots,e_m)$, для которых $k(e_1)\cdot\ldots\cdot k(e_m)>1$, рассмотрим задачу о м а к с и м а л ь н о м п о т о к е с в ы и г р ы ш а м и, которая записывается следующим образом:

$$\sum_{e|u''(e)=t} k(e)x(e)\longrightarrow\max_{(x(e))};$$

$$\sum_{e|u''(e)=u} k(e)x(e)-\sum_{e|u'(e)=u} x(e)=0,\quad u\in U\setminus\{s,t\};$$

$$0\le x(e)\le b(e),\quad e\in E.$$

2. С сетью N свяжем ориентированную сеть $N'=(s,t,U,E')$, называемую с е т ь ю п р и р а щ е н и я п о т о к а и определяемую следующим образом. Множество вершин сети N' то же, что и сети N, а число дуг в два раза больше. Каждой дуге $e\in E$ ставятся в соответствие две дуги множества E': дуга e, называемая п р я м о й, и дуга $\bar{e}$, называемая о б р а т н о й. Таким образом, каждой дуге $e'\in E'$ соответ-

ствует некоторая дуга $e \in E$, причем если e' - прямая дуга, то $e' = e$, а если обратная, то $e' = \bar{e}$.

При фиксированном потоке $X = x(e)$ в сети N для дуг $e' \in E'$ сети N' определим пропускную способность $b'(e')$ и коэффициент выигрыша $k'(e')$. Пусть дуге $e' \in E'$ соответствует дуга $e \in E$. Если e' - прямая дуга, то положим $b'(e') = b(e) - x(e)$, $k'(e') = k(e)$, а если обратная, то положим $b'(e') = k(e)\, x(e)$, $k'(e') = 1/k(e)$.

Рассмотрим путь $\mu = (e'_1, \ldots, e'_m)$ в сети N' и части этого пути $\mu_0 = \emptyset$, $\mu_i = (e'_1, \ldots, e'_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Величину

$$k'(\mu) = k'(e'_1) \cdot \ldots \cdot k'(e'_m)$$

назовем **коэффициентом выигрыша** пути μ, а величину

$$b'(\mu) = \min_{i=1,\ldots,m} \{ b'(e'_i) / k'(\mu_{i-1}) \} -$$

пропускной способностью пути μ. Путь μ назовем **проходимым** относительно потока X, если $b'(\mu) > 0$. Путь $\bar{\mu} = (\bar{e}'_m, \ldots, \bar{e}'_1)$ назовем **обратным** для пути μ.

С использованием пути μ, проходимого относительно исходного потока $X = (x(e))$, построим новый поток $\tilde{X} = (\tilde{x}(e))$ в сети N следующим образом. Для всякой дуги $e'_i \in E'$, $i = 1, \ldots, m$, рассмотрим соответствующую ей дугу $e_i \in E$. Если e'_i - прямая дуга, то положим

$$\tilde{x}(e_i) = x(e_i) + b'(\mu)\, k'(\mu_{i-1}),$$

а если e'_i обратная, то положим

$$\tilde{x}(e_i) = x(e_i) - b'(\mu)\, k'(\mu_i).$$

Для дуг $e \in E \setminus \{e_1, \ldots, e_m\}$ положим $\tilde{x}(e) = x(e)$.

Покажем, что полученный вектор $\tilde{X} = (\tilde{x}(e))$ является потоком в сети N. Для этого заметим прежде всего, что если e'_i - прямая дуга, то

$$\tilde{x}(e_i) = x(e_i) + b'(\mu) \cdot k'(\mu_{i-1}) \le x(e_i) + b'(e'_i) =$$

$$= x(e_i) + b(e_i) - x(e_i) = b(e_i),$$

а если e'_i - обратная дуга, то

$$\tilde{x}(e_i) = x(e_i) - b'(\mu) \cdot k'(\mu_i) \ge x(e_i) - b'(e'_i)\, k'(e'_i) =$$

$$= x(e_i) - k(e_i)\, x(e_i) / k(e_i) = 0.$$

Далее покажем, что в вершинах u_i', $i=2,\dots,m$, сети N выполняются необходимые соотношения. Действительно, если e_{i-1}' и e_i' – прямые дуги, то

$$k(e_{i-1})\tilde{x}(e_{i-1})-\tilde{x}(e_i)=k(e_{i-1})x(e_{i-1})-x(e_i)+$$
$$+b'(\mu)[k(e_{i-1})k'(\mu_{i-2})-k'(\mu_{i-1})]=k(e_{i-1})x(e_{i-1})-x(e_i).$$

Если e_{i-1}' – прямая, а e_i' – обратная, то

$$k(e_{i-1})\tilde{x}(e_{i-1})+k(e_i)\tilde{x}(e_i)=k(e_{i-1})x(e_{i-1})+k(e_i)x(e_i)+$$
$$+b'(\mu)[k(e_{i-1})k'(\mu_{i-2})-k(e_i)k'(\mu_i)]=k(e_{i-1})x(e_{i-1})+k(e_i)x(e_i).$$

Если e_{i-1}' – обратная, а e_i' – прямая, то

$$\tilde{x}(e_{i-1})+\tilde{x}(e_i)=x(e_{i-1})+x(e_i)+$$
$$+b'(\mu)[k'(\mu_{i-1})+k'(\mu_{i-1})]=x(e_{i-1})+x(e_i).$$

Наконец, если e_{i-1}' и e_i' – обратные, то можем написать

$$-\tilde{x}(e_{i-1})+k(e_i)\tilde{x}(e_i)=-x(e_{i-1})+k(e_i)x(e_i)+$$
$$+b'(\mu)[k'(\mu_{i-1})-k(e_i)k'(\mu_i)]=-x(e_{i-1})+k(e_i)x(e_i).$$

Заметим также, что

$$k(e_m)\tilde{x}(e_m)=k(e_m)x(e_m)+k(e_m)b(\mu)\cdot k'(\mu_{m-1})=$$
$$=k(e_m)x(e_m)+b(\mu)k'(\mu).$$

Таким образом, окончательно получаем следующее. Если X – поток в сети N, а μ – путь в сети N' с начальной вершиной s и конечной вершиной t, проходимый относительно X, то может быть построен новый поток $\tilde{X}$ в сети N такой, что

$$f(\tilde{X})=f(X)+b'(\mu)k'(\mu)>f(X).$$

Путь μ будем называть *увеличивающим путем*, а саму описанную процедуру построения нового потока X – *процедурой увеличения потока X вдоль увеличивающего пути μ*.

На основе рассмотренной процедуры в [5] предлагается алгоритм, являющийся аналогом алгоритма Форда-Фалкерсона для обычной задачи о максимальном потоке. В ходе алгоритма, начиная с нулевого потока, производится последовательное увеличение потока до тех пор, пока в сети приращения потока существует увеличивающий путь. Основная идея алгоритма, позволяющая в случае его остановки получить максимальный поток, состоит в том, что увеличение потока на каждой итерации алгоритма производится вдоль пути с наибольшим коэффициентом выигрыша. Однако одного этого требования не достаточно, чтобы гарантировать остановку алгоритма через конечное число итераций. Вместе с тем незначительное усиление требования к выбору увеличивающего пути позволяет получить конечный алгоритм.

Для пути μ через $\ell(\mu)$ обозначим величину, равную числу дуг в пути μ и называемую д л и н о й п у т и. Ниже будет показано, что если в качестве увеличивающего использовать путь, который среди путей с максимальным коэффициентом выигрыша имеет наименьшую длину, то алгоритм закончит работу через конечное число итераций.

3. Пусть поток $\tilde{X}$ получен увеличением потока X вдоль увеличивающего пути μ^* с наибольшим коэффициентом выигрыша $k'(\mu^*)$.

Важное свойство процедуры увеличения потока устанавливает

Л е м м а 1. Если в сети N' отсутствуют проходимые относительно X контуры μ^o, $k'(\mu^o)>1$, то в сети N' отсутствуют проходимые относительно $\tilde{X}$ контуры μ^o, $k'(\mu^o)>1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что проходимый относительно $\tilde{X}$ контур μ^o, $k'(\mu^o)>1$, существует. Поскольку контур μ^o непроходимый относительно X, то он содержит обратную дугу $\bar{e}'$ такую, что $x(e)=0$, $\tilde{x}(e)>0$, где $e=e'$. Следовательно, путь μ^* содержит прямую дугу e'. Из всех дуг e' пути μ^*, обладающих указанным выше свойством, образуем пути $\mu_1^*, \dots, \mu_K^*$ так, чтобы среди них не было смежных. Пусть нумерация этих путей определяется порядком их следования в пути μ^*. Поскольку контур μ^o можно считать простым, то обратные пути $\bar{\mu}_1^*, \dots, \bar{\mu}_K^*$ - части контура μ^o. Пусть $i_1, \dots, i_K$, $i_1=1$, - порядок их следования в контуре μ^o.

Обозначим через u_k' и u_k'', $k=1,\dots,K$, соответственно начальную и конечную вершины пути μ_k^*. Рассмотрим следующие части пути μ^*: путь μ_0 с начальной вершиной s и конечной u_1'; пути μ_k^*, $k=1,\dots$ $\dots, K-1$, с начальной вершиной u_k'' и конечной u_{k+1}' и путь μ_K с начальной вершиной u_K'' и конечной t. Рассмотрим также следующие части контура μ^o: пути ν_k, $k=1,\dots,K-1$, с начальной вершиной u_{i_k}' и конечной $u_{i_{k+1}}''$ и путь ν_K с начальной вершиной u_{i_K}' и конечной u_{i_1}''. Пути μ_0 и μ_K будем считать непустыми. Случай, когда $\mu_0=\emptyset$ или $\mu_K=\emptyset$, не вносит существенных изменений в доказательство.

Заметим, что рассмотренные части путей μ^* и μ^o являются проходимыми относительно X, а совокупность этих путей обладает следующим свойством. Каждая вершина u'_k, $k=1,\dots,K'$, является конечной ровно для одной части пути μ^* и начальной ровно для одной части контура μ°. Аналогично каждая вершина u''_k, $k=1,\dots,K'$, является конечной ровно для одной части контура μ° и начальной ровно для одной части пути μ^*. Кроме того, вершина s является начальной для единственного пути μ_0, а вершина t – конечной для единственного пути μ_K.

Из этого замечания следует, что из рассмотренных частей пути μ^* и контура μ° могут быть составлены, во-первых, путь μ с начальной вершиной s и конечной вершиной t и, во-вторых, некоторое количество контуров $\mu_1^\circ,\dots,\mu_L^\circ$, $L\geq 0$.

Поскольку $k'(\mu^\circ)>1$ и $k'(\mu_l^\circ)\leq 1$, $l=1,\dots,L$, то можем написать:

$$
\begin{aligned}
&k'(\mu^*) < k'(\mu^*)\cdot k'(\mu^\circ)=\\
&= k'(\mu_0\circ\mu_1^*\circ\mu_1\circ\dots\circ\mu_K^*\circ\mu_K)\, k'(\bar\mu_{i_1}^*\circ\vartheta_{i_1}\circ\dots\circ\bar\mu_{i_K}^*\circ\vartheta_{i_K})=\\
&= k'(\mu_0)k'(\mu_1)\dots k'(\mu_K)\,k'(\vartheta_1)\dots k'(\vartheta_{K'})=\\
&= k'(\mu)\,k'(\mu_1^\circ)\dots k'(\mu_L^\circ)\leq\\
&\leq k'(\mu).
\end{aligned}
$$

Таким образом, построен проходимый относительно X путь μ, для которого $k'(\mu)>k'(\mu^*)$. Это противоречит выбору пути μ^* в качестве увеличивающего пути.

Поскольку исходная сеть N не имеет контуров $\mu^\circ=(e_1,\dots,e_m)$ таких, что $k(e_1)\cdot\ldots\cdot k(e_m)>1$, то сеть N' не имеет проходимых относительно нулевого потока контуров μ°, $k'(\mu^\circ)>1$. Тогда из доказанной леммы получаем, что на каждой итерации алгоритма при увеличении потока X не существует проходимых относительно X контуров μ°, $k'(\mu^\circ)>1$.

Пусть поток $\tilde X$ получен увеличением потока X вдоль увеличивающего пути μ^*, который среди путей с наибольшим коэффициентом выигрыша имеет наименьшую длину.

Л е м м а 2. В сети N' не существует пути μ, непроходимого относительно X, проходимого относительно $\tilde X$ и такого, что либо $k'(\mu)>$ $>k'(\mu^*)$, либо $k'(\mu)=k'(\mu^*)$, $l(\mu)\leq l(\mu^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о строится по той же схеме, что и доказательство леммы 1.

Предположим, что путь μ существует.

Как и при доказательстве леммы 1, рассмотрим пути $\mu_1^*,\dots,\mu_{K'}^*$, являющиеся частями пути μ^*, и пути $\bar{\mu}_1^*, \dots, \bar{\mu}_{K'}^*$, являющиеся частями пути μ.

Пусть $u'_k, u''_k, k=1,\dots,K'$, – соответственно начальная и конечная вершины пути μ_k^*. Рассмотрим следующие части пути μ^*: путь μ_0 с начальной вершиной s и конечной u'_1, пути μ_k, $k=1,\dots,K'-1$, с начальной вершиной u''_k и конечной u'_{k+1}, путь $\mu_{K'}$ с начальной вершиной $u''_{K'}$ и конечной вершиной t. Рассмотрим также следующие части пути μ: путь ν_0 с начальной вершиной s и конечной u''_{i_1}, пути ν_k, $k=1,\dots,K'-1$, с начальной вершиной u'_{i_k} и конечной $u''_{i_{k+1}}$, путь $\nu_{K'}$ с начальной вершиной $u'_{i_{K'}}$ и конечной вершиной t.

Заметим, что рассмотренные части путей μ^* и μ являются проходимыми относительно X и совокупность этих путей обладает следующим свойством. Каждая вершина u'_k, $k=1,\dots,K'$, является конечной ровно для одной части пути μ^* и начальной ровно для одной части пути μ. Аналогично, каждая вершина u''_k, $k=1,\dots,K'$, является конечной ровно для одной части пути μ и начальной ровно для одной части пути μ^*. Кроме того, вершина s является начальной для путей μ_0 и ν_0, а вершина t – конечной для путей $\mu_{K'}$ и $\nu_{K'}$.

Из этого замечания вытекает, что из рассмотренных частей путей μ^* и μ могут быть составлены ровно два пути μ' и μ'' с начальной вершиной s и конечной t и, может быть, некоторое количество контуров $\mu_1^\circ, \dots$ $\dots, \mu_L^\circ, L \geq 0$. Все эти пути будут проходимы относительно X.

Поскольку $k'(\mu_l^\circ) \leq 1$, $l=1,\dots,L$, то можем написать:

$$k'(\mu^*)\,k'(\mu) =$$

$$= k'(\mu_0 \circ \mu_1^* \circ \mu_1 \circ \dots \circ \mu_{K'}^* \circ \mu_{K'}) \cdot k'(\nu_0 \circ \bar{\mu}_{i_1}^* \circ \nu_{i_1} \circ \dots \circ \bar{\mu}_{i_{K'}}^* \circ \nu_{i_{K'}}) =$$

$$= k'(\mu_0)\,k'(\mu_1) \cdot \ldots \cdot k'(\mu_{K'})\,k'(\nu_0)\,k'(\nu_1) \cdot \ldots \cdot k'(\nu_{K'}) =$$

$$= k'(\mu')\,k'(\mu'')\,k'(\mu_1^\circ) \cdot \ldots \cdot k'(\mu_L^\circ) \leq$$

$$= k'(\mu') \cdot k'(\mu'').$$

Поскольку $k'(\mu) \geq k'(\mu^*)$, то возможен один из двух случаев: либо $k'(\mu) < \max\{k'(\mu'); k'(\mu'')\}$, либо $k'(\mu^*) = k'(\mu) = k'(\mu') = k'(\mu'')$. Если имеет место второй случай, то примем во внимание, что $l(\mu^*) + l(\mu) >$ $> l(\mu') + l(\mu'')$, $l(\mu^*) \geq l(\mu)$ и, следовательно,

$$l(\mu^*) > \min\{l(\mu'); l(\mu'')\}.$$

Таким образом в обоих случаях получаем путь, наличие которого противоречит выбору пути μ^* в качестве увеличивающего.

Из доказанной леммы вытекает, что каждый путь с начальной вершиной s и конечной вершиной t в сети приращения потока N' может выступать в качестве увеличивающего разве что один раз. Следовательно, через конечное число шагов алгоритм остановится, и будет построен максимальный поток. Отметим также, что сложность процедуры поиска пути с наибольшим коэффициентом выигрыша и наименьшей длиной не увеличивается по сравнению с процедурой поиска пути с наибольшим коэффициентом выигрыша. Работу мультипликативных вариантов алгоритмов Форда [1] или Флойда-Уоршела [2] можно организовать таким образом, что за время порядка $|U|^3$ будет найден увеличивающий путь с нужным свойством.

Поступила в ред.-изд. отдел
12 ноября 1990 г.

Литература

1. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях.- М.: Мир, 1966.- 276 с.

2. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. - М.: Мир, 1985. - 510 с.

3. Jewell W.S. Optimal Flows with Gains // Operation Res.- 1962, 10. - P. 476-522.

4. Jonson E.L. Networks and Basic Solutions // Operation Res. - 1966, 14. - P. 619-624.

5. Onaga K. Optimum flows in general communication networks // J. of the Franklin Institute. - 1967. - P. 283, 308-327.