Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1990 г., вып. 30

УДК 519.854

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СЕТИ

А.А.Агеев

Введение

Рассматриваемая задача размещения представляет собой оптимизационный вариант известной задачи о p-медиане (см., например, [1]) и может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется неориентированный граф $G=(J,E)$ с множеством вершин $J=\{1,\dots,n\}$ и множеством ребер E. На множестве ребер задана функция длин $\ell: E\to Q_+$, на множестве вершин функция весов $c: J\to Q_+$. Требуется найти непустое подмножество вершин $M\subseteq J$, минимизирующее величину

$$\sum_{j\in M} c(j)+\sum_{j\in J\setminus M} d(j,M),$$

где $d(j,M)=\min\limits_{k\in M} d(j,k)$, а $d(j,k)$ – длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины j и k. В содержательной интерпретации J – множество пунктов размещения потребителей и возможных пунктов размещения поставщиков; $c(j)$ – стоимость размещения поставщика в пункте j; $\ell(j,k)$ – стоимость транспортировки продукта по ребру (j,k); $d(j,k)$ – стоимость доставки продукта из пункта j в пункт k по кратчайшему маршруту. Требуется разместить поставщиков таким образом, чтобы все потребители были удовлетворены и суммарные затраты на размещение и доставку продукта были минимальны. Сформулированную задачу далее будем называть простейшей задачей размещения на сети (ПРЗС).

В общей постановке рассматриваемая задача NP-трудна [2]. Известные полиномиально разрешимые частные случаи ПРЗС возникают при введении ограничений на вид графа G, т.е. определяются заданным классом неориентированных графов. В частности, хорошо известно, что для класса цепей рассматриваемая задача полиномиально сводится к задаче о ближайшем соседе и может быть решена за время $O(n^2)$. Первый нетривиальный результат такого рода принадлежит Трубину [3], который в 1976 г. опубликовал алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ для деревьев. В 1983 г. этот алгоритм переоткрыл Колен [4]. В большинстве работ рассматриваемого направления ПРЗС формулируется как частный случай простейшей задачи размещения:

$$\sum_{i\in I} c_i x_i + \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} d_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min_{(x_i)(x_{ij})}, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \ j \in J, \tag{2}$$

$$0 \le x_{ij} \le x_j, \ i \in I, j \in J, \tag{3}$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \ i \in I, j \in J, \tag{4}$$

в котором $I=\{1,\dots,m\}=J$, $c_j = c(j)$, $d_{ij}=d(i,j)$. Матрица (d_{ij}) в случае произвольного графа G может быть найдена алгоритмом Флойда-Уоршелла за время $O(n^3)$. Формулировка (1)-(4) удобна тем, что естественно приводит к обобщениям ПЗРС, так или иначе отражающим специфику исходной задачи. В 1983 г. подобное обобщение предложил Гимади [5]. В его работе введен в рассмотрение класс матриц, связных относительно дерева, содержащий в себе класс матриц расстояний между вершинами, а также для соответствующей более общей задачи построен алгоритм с трудоемкостью $O(mn)$. В 1989 г. автор [6], рассматривая матрицы, связные относительно произвольного графа и также включающие в себя матрицы кратчайших расстояний между вершинами, получил алгоритм с трудоемкостью $O(mn^3)$ для класса внешнепланарных графов.

В настоящей работе мы имеем дело с другим обобщением ПЗРС, определяемым одним из ее специфических свойств - свойством существования оптимальных решений со связными областями обслуживания. Основной результат статьи - алгоритм с трудоемкостью $O(m^3 n)$ для этого обобщения и соответственно $O(n^4)$ для ПЗРС на классе последовательно-параллельных графов, включающем, как известно, класс внешнепланарных графов. В шестом разделе работы показано, что простейшая задача размещения с матрицей (d_{ij}), связной относительно последовательно-параллельного графа, NP-трудна. В заключительном разделе работы обсуждаются следствия и возможности обобщения полученных результатов.

1. Оптимальные решения со связными областями обслуживания

Рассмотрим простейшую задачу размещения в общей постановке (в записи с исключенными переменными x_i):

$$\Phi = \min_x F(x) = \min_x \Big(\sum_{i\in I} c_i \max_{j\in J} x_{ij} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} x_{ij}\Big), \tag{5}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \ j \in J, \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i \in I,\ j \in J, \qquad (7)$$

где $I = \{1,\dots,m\}$, $J = \{1,\dots,n\}$, $c_i, d_{ij} \geq 0$. Пусть x - допустимое решение и $i \in I$. Подмножество $S_i(x) = \{j \in J : x_{ij} = 1\}$ называют областью обслуживания i-го поставщика.

Далее мы будем иметь дело с задачей П, индивидуальные задачи которой имеют вид (5)-(7) и рассматриваются на некотором неориентированном графе $G = (J, E)$ с множеством вершин $J = \{1,\dots,n\}$ и множеством ребер E. Примером такой задачи может служить ПРЗС, записанная в виде (5)-(7). Назовем допустимое решение x индивидуальной задачи $P \in \Pi$ связным, если множества $S_i(x)$ порождают связные подграфы графа G. В семействе подзадач П выделим задачу Π^c, состоящую из всех индивидуальных задач П, имеющих связное оптимальное решение. Следующая теорема, доказанная Гимади в [7], стимулировала введенные выше определения; мы приводим ее с независимым доказательством.

Т е о р е м а 1. ПЗРС имеет связное оптимальное решение, т.е. является подзадачей Π^c.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P - индивидуальная ПЗРС и $\mu : E \to \{1,\dots,|E|\}$ - произвольная нумерация ребер графа G. Рассмотрим ПЗРС $P'(\varepsilon)$, отличающуюся от P лишь функцией длин ребер ℓ':

$$\ell'(e) = \ell(e) + \varepsilon^{\mu(e)},\ e \in E.$$

Нетрудно видеть, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

1) любое оптимальное решение задачи $P'(\varepsilon)$ является оптимальным решением задачи P;

2) длины различных цепей G в метрике ℓ' различны, причем если длина одной цепи не превосходит длины другой в этой метрике, то это же имеет место и в метрике ℓ.

Остается убедиться в том, что любое оптимальное решение задачи $P'(\varepsilon)$ связно. Предположим противное. Пусть x - оптимальное решение $P'(\varepsilon)$ и $S(i)$ - отвечающая ему область обслуживания, порождающая несвязный подграф G. Тогда найдутся вершины $j \in S(i)$, $j_1 \notin S(i)$ такие, что цепь минимальной длины, связывающая вершины i и j в графе G, содержит вершину j_1. Пусть потребитель j_1 обслуживается поставщиком, находящимся в вершине i_1. В силу свойства 2 задачи $P'(\varepsilon)$ длина кратчайшей цепи, соединяющей i_1 с j_1, строго меньше длины аналогичной цепи, соединяющей i с j_1. Отсюда следует, что длина кратчайшей цепи, связывающей потребителя и поставщика i_1, строго меньше расстояния от j до i, что противоречит оптимальности x и тем самым доказывает утверждаемое.

Всякий класс неориентированных графов $\mathcal{G}$ естественным образом определяет подзадачу Π^c, обозначаемую далее через $\Pi^c(\mathcal{G})$. Согласно теореме

1, ПЗРС полиномиально разрешима для заданного класса графов $\mathcal{G}$, если полиномиально разрешима задача $\Pi^c(\mathcal{G})$. Ясно, что если $\mathcal{G}$ содержит все полные графы, то задача $\Pi^c(\mathcal{G})$ совпадает с простейшей задачей размещения в общей постановке и потому NP-трудна. Кроме того, нетрудно заметить, что матрица (d_{ij}) в ПЗРС обладает свойством связности относительно графа G [6] (см. определение в разделе 6). Согласно теореме 1 из [6], это означает, что ПЗРС полиномиально разрешима с трудоемкостью $O(n^4)$ для класса внешнепланарных графов. Наша цель в дальнейшем – доказать полиномиальную разрешимость задачи $\Pi^c(\mathcal{G})$ для класса последовательно-параллельных графов $\mathcal{G}$, содержащих в себе внешнепланарные. Тем самым мы будем иметь доказательство полиномиальной разрешимости ПЗРС для этих графов.

2. Последовательно-параллельные графы и 2-деревья

Класс последовательно-параллельных графов определяется индуктивно следующим образом:

($SP1$) Дерево – последовательно-параллельный граф.

($SP2$) Если $G=(V,E)$ – последовательно-параллельный граф и G' получается из G заменой ребра $e \in E$ двумя параллельными ребрами e_1 и e_2, то G' – последовательно-параллельный граф.

($SP3$) Если $G=(V,E)$ – последовательно-параллельный граф и G' получается из G заменой ребра $e \in E$ цепью длины 2, то G' – последовательно-параллельный граф.

Хорошо известно [8, 9], что класс последовательно-параллельных графов содержится в классе планарных графов и содержит в себе класс внешнепланарных графов. Всякий последовательно-параллельный граф может быть дополнен ребрами до максимального последовательно-параллельного графа, называемого 2-деревом. Для 2-деревьев существует альтернативное индуктивное определение [10]:

($2T1$) Полный граф K_3 на трех вершинах есть 2-дерево.

($2T2$) Если $G=(V,E)$ – 2-дерево и G' получается из G выбором ребра $e=(u,v)$ и добавлением новой вершины w и новых ребер $e'=(u,w)$ и $e''=(v,w)$, то G' – 2-дерево.

В [10] описан линейный алгоритм, который для любого заданного последовательно-параллельного графа находит содержащее его 2-дерево. С другой стороны, заметим следующее. Рассмотрим индивидуальную задачу (5)-(7) на графе $G=(\mathcal{I},E)$ и ту же задачу на графе $G'=(\mathcal{I},E')$, где $E' \supseteq E$. Ясно, что если задача (5)-(7) имеет связное оптимальное решение на графе G, то это решение будет оптимальным и связным на графе G'. Таким образом, Π^c для последовательно-параллельных графов полиномиально (с линейной трудоемкостью) сводится к Π^c для 2-деревьев, так что нам остается построить полиномиальный алгоритм решения последней задачи.

Пусть $G=(J,E)$ - 2-дерево. Для всякого $e\in E$ через $\Delta(e)$ обозначим множество вершин 2-дерева $G=(J,E)$, составляющих с e треугольник (цикл длины 3). В дальнейшем нам понадобятся следующие легко устанавливаемые свойства 2-деревьев.

а) Любое 2-дерево содержит в точности $2n-3$ ребра (напоминаем, что $n=|J|$ - число вершин).

б) Для любого ребра $e\in E$ $\Delta(e)\neq\emptyset$.

в) Пусть $e\in E$ и $j_1, j_2\in\Delta(e)$, $j_1\neq j_2$. Удалим из G концы ребра e вместе со всеми инцидентными им ребрами. Тогда вершины j_1 и j_2 окажутся в различных компонентах связности получаемого в результате порожденного подграфа графа G.

Всякое ребро $e=(j_1,j_2)\in E$ согласно свойству "в" порождает два разбиения - $(S_K(e))$ $(K\in\Delta(e))$ множества ребер E и $(R_K(e))$ $(K\in\Delta(e))$ подмножества вершин $J-\{j_1,j_2\}$. Заметим, что образуемые элементами этих разбиений подграфы $G_K(e)=(R_K(e)\cup\{j_1,j_2\}, S_K(e))$, $K\in\Delta(e)$, являются 2-деревьями.

Необходимые в дальнейшем структурные свойства 2-дерева хорошо отражает связанное с ним корневое ориентированное дерево, к определению которого мы переходим.

Выделим произвольное ребро $e_0=(j',j'')\in E$ в 2-дереве $G=(J,E)$ и назовем его корневым. Для всякого $e\in E$, $e\neq e_0$, через $\tau(e)$ обозначим множество вершин $\{j\in\Delta(e): j\notin R_{K_0}(e)\}$, где вершина $K_0\in\Delta(e)$ выбрана таким образом, что $e_0\in S_{K_0}$. Заметим, что множество $\tau(e)$ в отличие от множества $\Delta(e)$ может быть и пустым. Кроме того, непосредственно из определения 2-дерева следует, что каждая его вершина j содержится в точности в одном множестве $\tau(e)$. Соответствующее ребро e будем обозначать через $e(j)$.

Построим корневое ориентированное дерево $D(G)=(V,A)$ с множеством узлов $V=(J-\{j',j''\})\cup E$, корнем e_0 и с множеством дуг A, определяемым следующим образом. Все дуги дерева $D(G)$ ориентированы в направлении к корню. Множества $J\setminus\{j',j''\}$ и E независимы в $D(G)$, т.е. любые два узла, принадлежащие одному из этих множеств, не связаны дугами. Корень e_0 связан входящими в него дугами со всеми узлами из множества $\Delta(e_0)$. Любой другой узел e из множества E связан входящими в него дугами со всеми узлами из множества $\tau(e)$. Каждый узел $j\in J$ связан двумя входящими в него дугами с узлами e_1, e_2, составляющими вместе с $e(j)$ и j треугольник в 2-дереве G. Построение корневого ориентированного дерева $D(G)$ завершено. Его корректность вытекает из свойства "в". На рис. 1 изображены 2-дерево (слева) и соответствующее ему корневое ориентированное дерево.

В дальнейшем через $\beta(v)$ будем обозначать множество всех узлов дерева $D(G)$, предшествующих узлу $v \in V$.

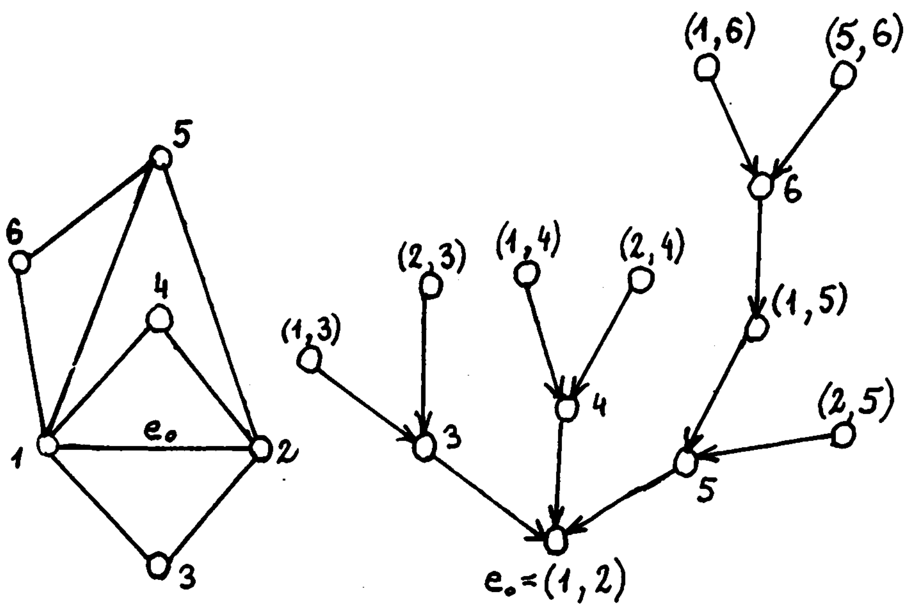

Рис. 1.

3. Описание алгоритма и его трудоемкость

Предлагаемый алгоритм решения задачи Π^c (обозначим его через $\mathcal{A}$) начинает работу с изложенного выше построения корневого ориентированного дерева $D(G)$. Заметим, что ввиду свойства "а" дерево $D(G)$ имеет в точности $3n-5$ узлов, так что трудоемкость этой процедуры оценивается величиной $O(n)$.

Применим далее к дереву $D(G)$ поиск в глубину (см., например [11]) с последовательной нумерацией узлов, начиная с корня. Учитывая сделанное выше замечание, это можно выполнить за линейное время. Полученную нумерацию обозначим через $\sigma(v)$, $v \in V$. Отметим, что, как мы условились выше, $\sigma(e_0)=1$.

Пусть $e=(j_1,j_2)\in E$, $j\in \tau(e)$, $i_1, i_2 \in I$. Следующими рекуррентными формулами определим величины Q, $Q_{j_1 j_2}(i_1,i_2)$ и $Q^j_{j_1 j_2}(i_1,i_2)$:

$$Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = 0 \text{ для всех } i_1, i_2 \in I \text{ и } e \in E \text{ таких, что } \tau(e) = \emptyset; \quad (8)$$

$$Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = \sum_{j \in \tau(e)} Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \text{ для всех } i_1, i_2 \in I \text{ и } e \in E \text{ таких, что } \tau(e) \neq \emptyset; \quad (9)$$

$$Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = \min_{i \in I}(Q_{j_1 j}(i_1, i) + Q_{j_2 j}(i_2, i) + c_i x_i(\{i_1, i_2\}) + d_{ij}) \quad (10)$$

для всех $i_1, i_2 \in I$, $e \in E$ таких, что $\tau(e) \neq \emptyset$, и всех $j \in \tau(e)$;

$$Q = \min_{i' \in I}(c_{i'} + d_{i'j'} + \min_{i'' \in I}(c_{i''} x_{i''}(\{i'\}) + d_{i''j''} + Q_{j'j''}(i', i''))), \quad (11)$$

где, напоминаем, j', j'' - концы корневого ребра e_0, и для всякого $S \subseteq I$:

$$x_i(S) = \begin{cases} 0, & i \in S, \\ 1, & i \notin S. \end{cases}$$

Вычисления величин Q, $Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ и $Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ по рекуррентным формулам (8)-(11) выполняются в порядке, определяемом нумерацией σ, т.е. начинать следует с $Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ с номером узла $e = (j_1, j_2)$, равным $3n - 5$, затем перейти к $Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ с $\sigma(j) = 3n - 6$ и т.д. Последней вычисляется величина Q. Эта процедура составляет первый этап алгоритма $\mathcal{A}$.

На втором этапе покомпонентно в порядке возрастания номеров узлов дерева $D(G)$ из множества $\mathcal{J}$ строится искомое допустимое решение $x^a = (x^a_{ij})$ задачи Π^c.

<u>Шаг 0</u>. Полагаем $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J} \setminus \{j', j''\}$. Находим i', i'', на которых достигаются минимумы в соотношении (11), и полагаем $x^a_{i'j'} = x^a_{i''j''} = 1$.

<u>Шаг k ($k \geq 1$)</u>. Для $j \in \mathcal{J}_k$ с минимальным номером σ отыскиваем $i \in I$, на котором достигается минимум в соотношении (10), где узел $e = (j_1, j_2)$ - предшествующий узлу j в дереве $D(G)$. Полагаем $x^a_{ij} = 1$, $\mathcal{J}_{k+1} = \mathcal{J}_k \setminus \{j\}$. Если $\mathcal{J}_{k+1} \neq \emptyset$, то переходим к выполнению шага $k + 1$, в противном случае этап закончен.

Очевидно, что трудоемкость построенного алгоритма определяется трудоемкостью первого этапа. Последняя с учетом того, что дерево $D(G)$ имеет $3n - 5$ узлов, оценивается величиной $O(m^3 n)$. Таким образом, алгоритм $\mathcal{A}$ находит допустимое решение x^a задачи Π^c за время $O(m^3 n)$. Для ПЗРС, ввиду того, что необходимо вычислять матрицу кратчайших расстояний (d_{ij}), суммарная трудоемкость оценивается величиной $O(n^4)$.

4. Оптимальность. Формулировки лемм

Наша цель в дальнейшем - доказательство следующей теоремы:

Т е о р е м а 2. Допустимое решение x^a, найденное алгоритмом $\mathcal{A}$, - оптимально.

В этом разделе мы формулируем леммы 1 и 2, очевидным следствием которых она является, а также лемму 3, лежащую в основе доказательства леммы 2. Справедливость утверждения первой леммы ясна из описания второго этапа алгоритма. Доказательства лемм 2 и 3 будут приведены в следующем разделе.

Л е м м а 1. $F(x^a) \leq Q$.

Л е м м а 2. Для любой индивидуальной задачи $P \in \Pi^c$ справедливо $Q = \Phi$.

Формулировке утверждения леммы 3 предпошлем несколько определений.

Набору величин Q, $Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ и $Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ поставим в соответствие набор величин Φ, $\Phi_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ и $\Phi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$, имеющих достаточно прозрачный содержательный смысл. Величина Φ, по определению (5), есть оптимум индивидуальной задачи $P \in \Pi^c$. Величины $\Phi_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ и $\Phi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ определим соответственно как оптимумы индивидуальных задач $P_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ и $P^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$, которые имеют следующий вид:

$$\Phi^{(j)}_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = \min F^{(j)}_{j_1 j_2}(i_1, i_2; x) = \min \sum_{i \in I} c_i x_i(\{i_1, i_2\}) \max_{k \in W_e^{(j)}} x_{ik} +$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{k \in W_e^{(j)}}' d_{ik} \gamma_{ik}(\{i_1, i_2\}, \{j_1, j_2\}) x_{ik},$$

$$\sum_{i \in I} x_{ik} = 1, \; k \in W_e^{(j)},$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, \; i \in I, \; k \in W_e^{(j)},$$

где $e = (j_1, j_2) \in E, \; j \in \tau(e)$,

$$W_e = (\beta(e) \cap \mathcal{J}) \cup \{j_1, j_2\},$$
$$W_e^j = (\beta(j) \cap \mathcal{J}) \cup \{j_1, j_2\}$$

$$\gamma_{ik}(S,T) = \begin{cases} 0, \text{ если } & i \in S,\ k \in T, \\ 1, \text{ если } & k \notin T, \\ L & - \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$L \geq \sum_{i \in I} c_i + \sum_{i \in I} \sum_{k \in J} d_{ik} .$$

для любых $S \subseteq I$, $T \subseteq J$.

Задачам $P_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ и $P^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$ отвечают соответственно подграфы $G(W_e)$ и $G(W_e^j)$ графа G, порожденные множествами W_e и W_e^j; с учетом этого можно считать, что $P_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$, $P^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \in \Pi$.

Л е м м а 3. Пусть $P \in \Pi$. При любых $e = (j_1, j_2) \in E$ и $j \in \mathcal{T}(e)$ справедливы следующие утверждения:

1а) $\Phi_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \leq Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$;

2а) $\Phi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \leq Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$;

1б) если $P_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \in \Pi^c$, то $\Phi_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$;

2б) если $P^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \in \Pi^c$, то $\Phi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$.

5. Доказательства лемм 2 и 3

Мы начинаем с доказательства леммы 3, поскольку, как мы увидим далее, лемма 2 есть следствие этого утверждения.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3 проведем индукцией по убыванию номеров узлов дерева $D(G)$ с базой в узле $v^m = e^m = (j_1^m, j_2^m) \in E$ с максимальным номером $3n - 5$. Очевидно, что $\tau(e^m) = \phi$, т.е. $W_e = \{j_1^m, j_2^m\}$ и, следовательно,

$$\Phi_{j_1^m j_2^m}(i_1, i_2) = Q_{j_1^m j_2^m}(i_1, i_2) = 0$$

при любых $i_1, i_2 \in I$. Таким образом, справедливость соответствующих базисных утверждений 1а и 1б установлена.

Предположим, что утверждения леммы доказаны для всех узлов дерева $D(G)$ с номерами, большими μ. Покажем, что тогда они справедливы для узла $v \in V$ с номером $\sigma(v) = \mu$.

<u>Случай 1:</u> $v = e = (j_1, j_2) \in E$. На основании индуктивного предположения и ввиду (9) имеем

$$\Phi_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \leq \sum_{j \in \tau(e)} \Phi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \leq \sum_{j \in \tau(e)} Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \leq Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2),$$

так что утверждение 1а доказано. Пусть теперь

$$P_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \in \Pi^c$$

и x^* - связное оптимальное решение $P_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$. Обозначим через x^{*j} подматрицу x^*, образованную столбцами из множества W_e^j, $j \in \tau(e)$. Принимая во внимание связность x^*, имеем

$$\sum_{j \in \tau(e)} \varphi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \geq \varphi_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = F_{j_1 j_2}(i_1, i_2; x^*) =$$

$$= \sum_{j \in \tau(e)} F^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2; x^{*j}) \geq \sum_{j \in \tau(e)} \varphi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2),$$

так что в любом из этих соотношений знак неравенства можно заменить на знак равенства и, в частности,

$$\sum_{j \in \tau(e)} F^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2; x^{*j}) = \sum_{j \in \tau(e)} \varphi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2).$$

Отсюда, поскольку по определению

$$F^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2; x^*) \geq \varphi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$$

для всех $j \in \tau(e)$, в данном случае имеем равенства

$$F^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2; x^*) = \varphi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2)$$

для всех $j \in \tau(e)$. Следовательно, задачи

$$P^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2), \quad j \in \tau(e),$$

имеют связные оптимальные решения, т.е.

$$P^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \in \Pi^c,$$

а поскольку $\sigma(j) > \mu$ для всех $j \in \tau(e)$, то, согласно предположению индукции,

$$\varphi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2), \quad j \in \tau(e).$$

Поэтому, учитывая вышесказанное,

$$\varphi_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = \sum_{j \in \tau(e)} \varphi^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = \sum_{j \in \tau(e)} Q^j_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = Q_{j_1 j_2}(i_1, i_2),$$

и тем самым утверждение 1б также доказано.

<u>Случай 2</u>: $v = j \in \tau(e)$, $e = (j_1, j_2)$. Отметим, что $\sigma(j_K, j) \geq \geq \sigma(j) = \mu$, $K = 1, 2$. С учетом этого замечания утверждение 2а вы-

текает из предположения индукции, (10) и очевидного неравенства

$$\Phi^{j}_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \leq \Phi_{j_1 j}(i_1, i) + \Phi_{j_2 j}(i_2, i) + c_i x_i(\{i_1, i_2\}) + d_{ij}$$

для любого $i \in I$. Убедимся в справедливости утверждения 2б . Пусть $P^{j}_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \in \Pi^c$, и x^* - связное оптимальное решение этой задачи. Обозначим через x^{*1} и x^{*2} подматрицы матрицы x^*, составленные из столбцов, принадлежащих множествам $W(j_1, j)$ и $W(j_2, j)$ соответственно. Учитывая связность x^* , имеем

$$\Phi^{j}_{j_1 j_2}(i_1, i_2) = F^{j}_{j_1 j_2}(i_1, i_2 ; x^*) =$$

$$= F_{j_1 j}(i_1, i, x^{*1}) + F_{j_2 j}(i_2, i, x^{*2}) + c_i x_i(\{i_1, i_2\}) + d_{ij} \geq$$

$$\geq \Phi_{j_1 j}(i_1, i) + \Phi_{j_2 j}(i_2, i) + c_i x_i(\{i_1, i_2\}) + d_{ij} \geq \Phi^{j}_{j_1 j_2}(i_1, i_2),$$

где $i \in I$ такой, что $x_{ij} = 1$. Таким образом, все неравенства, фигурирующие в приведенной цепочке соотношений, можно заменить на равенства. Отсюда, в частности, следует, что

$$F_{j_K j}(i_K, i, x^{*K}) = \Phi_{j_K j}(i_K, i), \quad K = 1, 2 ,$$

т.е. задачи $P_{j_K j}(i_K, i)$ обладают связными оптимальными решениями x^{*K} или, что то же самое, $P_{j_K j}(i_K, i) \in \Pi^c$, $K = 1, 2$. Согласно предположению индукции, это означает, что

$$\Phi_{j_K j}(i_K, i) = Q_{j_K j}(i_K, i), \quad K = 1, 2 .$$

Следовательно, принимая во внимание (10),

$$\Phi^{j}_{j_1 j_2}(i_1, i_2) \leq Q^{j}_{j_1 j_2}(i_1, i_2),$$

что совместно с ранее доказанным утверждением 2а и влечет требуемое.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Пусть $P \in \Pi^c$ и x^* - связное оптимальное решение задачи P. Поскольку $Q \geq \Phi$ следует из леммы 1, нам остается установить противоположное неравенство $Q \leq \Phi$. Действительно, пусть i' , $i'' \in I$ такие, что $x^*_{i'j'} = x^*_{i''j''} = 1$. Тогда x^* - связное оптимальное решение задачи $P_{j'j''}(i', i'')$ и, следовательно, $P_{j'j''}(i', i'') \in \Pi^c$. Согласно утверждению 2а леммы 3 и ввиду соотношения (11) отсюда следует

$$\Phi = F(x^*) = c_{i'} + d_{i'j'} + c_{i''} x_{i''}(\{i'\}) + d_{i''j''} + F_{j'j''}(i', i'', x^*) \geq$$

$$\geq c_{i'} + d_{i'j'} + c_{i''} x_{i''}(\{i'\}) + d_{i''j''} + \Phi_{j'j''}(i', i'') =$$

$$= c_{i'} + d_{i'j'} + c_{i''} x_{i''}(\{i'\}) + d_{i''j''} + Q_{j'j''}(i', i'') \geq Q ,$$

что и требовалось показать.

6. Сложность задачи размещения с матрицей, связной относительно последовательно-параллельного графа

В этом разделе мы исследуем естественно возникающий вопрос о сложности простейшей задачи размещения с матрицей транспортных затрат, связной относительно последовательно-параллельного графа. Прежде всего напомним определение [6].

Будем говорить, что матрица (d_{ij}), $i \in I$, $j \in J$, связна относительно графа $G = (J, E)$, если для всякой пары $i_1, i_2 \in I$ найдется разбиение (J_1, J_2) множества J такое, что подграфы $G(J_1)$ и $G(J_2)$, порожденные J_1 и J_2, связны и, кроме того,

$$d_{i_1 j} \leq d_{i_2 j} \quad \text{для всех } j \in J_1 ,$$

$$d_{i_2 j} \leq d_{i_1 j} \quad \text{для всех } j \in J_2 .$$

Т е о р е м а 3. Простейшая задача размещения (1)-(4) с матрицей (d_{ij}), связной относительно последовательно-параллельного графа, NP-трудна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что к данной задаче сводится задача (1)-(4) в общей постановке. Действительно, преобразуем задачу (1)-(4) с произвольной матрицей (d_{ij}) в задачу следующего вида:

$$\min\Big(\sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J'} d'_{ij} x_{ij}\Big),$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \; j \in J',$$

$$0 \leq x_{ij} \leq x_j , \; i \in I, \; j \in J',$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \; i \in I, \; j \in J',$$

где $J' = J \cup \{j_1, j_2\}$,

$$d'_{ij} = \begin{cases} 0 , & \text{если } j \notin J , \\ d_{ij} , & \text{если } j \in J . \end{cases}$$

Рассмотрим граф $G=(J', E)$ с множеством ребер

$$E=\{(j_1, j): j\in J\}\cup\{(j_2, j): j\in J\}.$$

Очевидно, что граф G последовательно-параллельный. Остается проверить, что матрица (d'_{ij}) связна относительно этого графа. Действительно, возьмем произвольные $i_1, i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$, и положим

$$J_1=\{j\in J: d_{i_1 j} \le d_{i_2 j}\},\ J_2=J\setminus J_1.$$

Имеем: ($J_1\cup\{j_1\}, J_2\cup\{j_2\}$) - разбиение J' и порожденные подграфы графа G $G(J_1\cup\{j_1\})$ и $G(J_2\cup\{j_2\})$ связны, в чем и требовалось убедиться.

7. Заключительные замечания

1. Понятия дерева и 2-дерева могут быть получены специализацией более общего понятия q -дерева. Граф G называется q -деревом, если выполняется одно из следующих двух условий:

(1) G - полный граф на q вершинах, т.е. K_q.

(2) В графе G существует вершина v такая, что множество смежных с ней вершин образует K_q, и такая, что удаление этой вершины со всеми инцидентными ей ребрами, приводит к q -дереву.

Граф называется частичным q -деревом, если он может быть получен из q -дерева удалением некоторых ребер.

В [12] разработан метод построения алгоритмов линейной трудоемкости для решения ряда NP -трудных задач на частичных q -деревьях при фиксированных q. Этот метод, как нетрудно заметить, не применим к ПЗРС. С другой стороны, легко видеть, что рекуррентные соотношения, лежащие в основе построенного выше алгоритма решения задачи размещения на частичном 2-дереве (последовательно-параллельном графе), естественно обобщаются на случай частичных q -деревьев. Это приводит к семейству алгоритмов трудоемкости $O(m^{q+1}n)$ для классов q -деревьев. В частности, для ПЗРС на q -дереве получаем алгоритм трудоемкости $O(n^{q+2})$.

2. В [13] показано, что задача поиска минимального q, при котором заданный граф оказывается частичным q -деревом, NP-трудна. Там же предлагается алгоритм трудоемкости $O(n^{q+2})$ для решения задачи распознавания частичных q -деревьев при фиксированном q. Задача распознавания 3-дерева может быть решена алгоритмом трудоемкости $O(n\log_2 n)$ [14].

3. Из полученных результатов вытекает полиномиальная разрешимость задач о p -медиане и p -центре на частичных q -деревьях при фиксированном q. Обоснованию этого утверждения будет посвящена отдельная работа.

Поступила в ред.-изд. отдел
21 марта 1990 г.

Литература

I. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, I982. - 4I6 с.

2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. - М.: Мир, I978. - 432 с.

3. Трубин В.А. Эффективный алгоритм размещения на сети в форме дерева // Докл. АН СССР. - I976. - Т. 23I, № 3. - С. 547-550.

4. Kolen A. Solving covering problems and the uncapacitated plant location problem on trees // Europ. J. Oper. Res. - 1983. - V. 12. - P. 266-278.

5. Гимади Э.Х. Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети // Управляемые системы. - Новосибирск, I983. - Вып. 23. - С. I2-23.

6. Агеев А.А. Графы, матрицы и простейшая задача размещения // Управляемые системы. - Новосибирск, I989. - Вып. 29. - С. 3-II.

7. Гимади Э.Х. Задача размещения на сети с центрально-связными областями обслуживания // Управляемые системы. - Новосибирск, I984. - Вып. 25. - С. 38-47.

8. Duffin R.J. Topology of series-parallel networks // J. Math. Anal. Appl. - 1965. - V. 10. - P. 303-318.

9. Nishizeki T., Chiba N. Planar graphs: theory and algorithms. //Annals of Discrete Math. - 1988. - V. 32. - 232 p.

I0. Wald J.A., Colbourn C.J. Steiner trees, partial 2-trees, and minimum IFI networks // Networks. - 1983. - V. 13. - P. 159-167.

II. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация.- М.: Мир, I985. - 5I0 с.

12. Arnborg S., Proskurowski A. Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial trees. // Discr. Appl. Math. - 1989. - V. 23. - P. 11-24.

13. Arnborg S., Corneil D.G., Proskurowski A. Complexity of finding embeddings in a k-tree. // SIAM J. Algebr. Discr. Methods. - 1987. - V. 8. - P. 277-284.

14. Arnborg S., Proskurowski A. Characterization and recognition of partial 3-trees. // Siam J. Algebr. Discr. Methods. - 1986.- V. 7. - P. 305-314.