Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.512.25/26.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Э.Х.Гимадутдинов

1. Постановка задачи

В настоящей статье рассматривается целевая функция

$$S(x^N) = S(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i, x_{i+1}), \qquad /1/$$

где переменными величинами являются параметры $x_1, x_2, \dots, x_N$, принадлежащие области

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq x_{N+1} = b. \qquad /2/$$

Ставится основная задача I: при фиксированном $N > 0$ найти набор $x^N = (x_1^N, \dots, x_N^N)$, удовлетворяющий ограничениям /2/, при котором целевая функция /1/ достигает минимума.

Далее, для любого $n = 1, 2, \dots, N$ мы будем называть n-оптимальным набор $x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_n^n)$, при котором достигает своего минимума целевая функция

$$S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}),$$

где $a = x_0 \leq x \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = b$.

Мы будем рассматривать класс только таких задач, когда функция f удовлетворяет условию Глебова [1] :

$$f(x_1, y_2) + f(y_1, x_2) - f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) \leq 0 \qquad /3/$$

для произвольных x_1, x_2, y_1, y_2 $(a \leq x_1 \leq y_1 \leq y_2 \leq x_2 \leq b)$. При наличии смешанной производной от f это условие эквивалентно следующему

$$f''_{xy}(x, y) \leq 0 \quad (a \leq x \leq y \leq b). \qquad /4/$$

Условие /3/ на первый взгляд кажется очень сильным. Однако описываемый класс задач нам представляется важным, так как этому условию удовлетворяет целый ряд задач нелинейного программирования [2] - [9] ж/, которые удается свести к схеме динамического программирования.

Введем следующее обозначение для произвольных a', b' $(a \leq a' \leq b' \leq b)$:

$$S_n(a', b') = \min_{a' = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = b'} \sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}). \qquad /5/$$

Очевидно,

$$S_n(a, b) = S(x_1^n, \dots, x_n^n) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i^n, x_{i+1}^n).$$

ж/ Для задачи унификации деталей, рассмотренной в работах [8]-[9] условие /3/ выполняется, если коэффициенты функции затрат не убывают с ростом номера детали

Имеет место рекуррентное соотношение:

$$S_n(a,y)=\min_{a\le x\le y}\left[S_{n-1}(a,x)+f(x,y)\right]$$

для $n=1,2,\dots,N$, причем $S_0(a,x)=f(a,x)$ для всех $x\in[a,b]$.

Пользуясь этим рекуррентным соотношением, можно получить решение задачи I, последовательно решая N задач для $n=1,2,\dots,N$. При этом, как известно [10], следует проделать порядка NM^2 операций при памяти $4NM$, либо $\sim(NM)^2$ операций при памяти $(M+N)$. Здесь M -мощность ε -сети, построенной на отрезке $[a,b]$.

В работе [1] показано, что в случае выполнения условия /3/ последовательность $\{S_n(a,b), n=0,1,2,\dots\}$ является выпуклой. Этот интересный факт получен также для некоторых функций $f(x,y)$ частного вида в работах [2] - [5]. В.Т.Дементьевым [2], например, рассматривалась функция $f(x,y)=C(y)[F(y)-F(x)]$, где $C(x)$ и $F(x)$ - неубывающие функции. При этом, как видно, $f''_{xy}=-C'_y(y)\cdot F'_x(x)\le 0$. В работе [2] показана возможность использования выпуклости последовательности минимумов $\{S_n(a,b)\}$ для построения более экономного алгоритма.

В § 2 настоящей работы доказывается ряд других свойств оптимальных решений задачи I. В следующем параграфе доказывается две вспомогательные леммы - об оценке трудоемкости процедуры вычисления определенной таблицы и об оценке функции вида

$$\sum_{i=1}^{n} z_i\ln(z_{i+1}+\delta).$$

На основании полученных в §§ 2 и 3 фактов в § 4 строится вычислительный алгоритм A для решения основной задачи I с существенно меньшей трудоемкостью по сравнению с методом динамического программирования. Теоремы 1 и 2 позволяют уменьшить количество операций $/K_A/$ примерно в $\frac{M}{\lg_2 M}$ раз, а теоремы 3 - 4 сократить память $/\Pi_A/$ до количества ячеек $\sim(M+N)$, так что

$$K_A\simeq NM\lg_2 M,\quad \Pi_A\simeq M+N.$$

2. Свойства оптимальных решений основной задачи

Пусть $\theta_n(y)$ - некоторое решение функционального уравнения

$$S_n(a,y)=S_{n-1}(a,\theta)+f(\theta,y)=\varphi_n(\theta,y), \qquad /6/$$

где $a\le\theta\le y\le b$.

Из выражения /6/ следует, что для любых $x\in[a,y]$

$$S_n(a,y)\le\varphi_n(x,y). \qquad /7/$$

Из определений x^n и $\theta_n(y)$ непосредственно следует, что

$$x_i^n=\theta_i(x_{i+1}^n),\quad i=\overline{1,n}. \qquad /8/$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть известно решение функционального уравнения /6/

для одной из точек $y_1, y_2 (a \le y_1 \le y_2 \le b)$. Тогда найдется решение для другой точки такое, что

$$\theta_n(y_1) \le \theta_n(y_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда для любой пары решений $\{\theta_n(y_1), \theta_n(y_2)\}$ будем иметь

$$\theta_n(y_2) < \theta_n(y_1) \le y_1 \le y_2. \qquad /9/$$

В случае известного $\theta_n(y_2)$ последнее условие означает, что должно выполняться неравенство

$$S_n(a, y_1) < \varphi_n(x, y_1) \text{ для всех } x \le \theta_n(y_2). \qquad /10/$$

Из уравнения /6/ следует тождество

$$S_n(a, y_2) = \varphi_n(\theta_n(y_2), y_1) + f(\theta_n(y_2), y_2) - f(\theta_n(y_2), y_1),$$

откуда с помощью /10/ получаем, что

$$S_n(a, y_2) > S_n(a, y_1) + f(\theta_n(y_2), y_2) - f(\theta_n(y_2), y_1) =$$
$$= S_{n-1}(a, \theta_n(y_1)) + [f(\theta_n(y_1), y_1) + f(\theta_n(y_2), y_2) - f(\theta_n(y_2), y_1)].$$

Учитывая /3/ и /9/, окончательно получим

$$S_n(a, y_2) > S_{n-1}(a, \theta_n(y_1)) + f(\theta_n(y_1), y_2) = \varphi_n(\theta_n(y_1), y_2),$$

что противоречит условию /7/. Отсюда следует справедливость теоремы в рассмотренном случае.

Аналогично показывается справедливость теоремы для случая известного $\theta_n(y_1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть известны такие решения функционального уравнения /6/ для произвольных $y_1, y_2 (a \le y_1 \le y_2 \le b)$ что

$$\theta_n(y_1) \le \theta_n(y_2).$$

Тогда найдется такое решение функционального уравнения /6/ для произвольной точки $y \in [y_1, y_2]$, что

$$\theta_n(y) \in [\theta_n(y_1), \theta_n(y_2)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО - от противного: пусть любое решение $\theta_n(y) \in [\theta_n(y_1), \theta_n(y_2)]$. Это возможно лишь в двух случаях: 1/ $\theta_n(y_2) < \theta_n(y) \le y_1 < y_2$, 2/ $\theta_n(y) < \theta_n(y_1) \le y_1 \le y$. При этом должно выполняться неравенство:

$$S_n(a, y) < \varphi_n(x, y) \quad \text{для любого } x \in [\theta_n(y_1), \theta_n(y_2)]. \qquad /11/$$

Следуя приему, примененному при доказательстве предыдущей теоремы, с учетом /3/ и /11/ в первом случае получаем

$$S_n(a, y_2) = \varphi_n(\theta_n(y_2), y) + f(\theta_n(y_2), y_2) - f(\theta_n(y_2), y) > S_n(a, y) +$$
$$+ f(\theta_n(y_2), y_2) - f(\theta_n(y_2), y) \ge S_{n-1}(a, \theta_n(y)) + f(\theta_n(y), y_2) = \varphi_n(\theta_n(y), y_2),$$

что противоречит условию /7/.

Поступая аналогичным образом, во втором случае получим, что $S_n(a, y_1) > \varphi_n(\theta_n(y), y_1)$, что также противоречит условию /7/.

Остается предположить, что существует решение $\theta_n(y)$, принадлежащее отрезку $[\theta_n(y_1), \theta_n(y_2)]$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольного n-оптимального набора $X^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n)$ найдется такой $(n+1)$ -оптимальный набор $X^{n+1} = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \ldots, x_{n+1}^{n+1})$, что параметры x_i^{n+1} чередуются с параметрами x_i^n :

$$a = x_0^n \le x_1^{n+1} \le x_1^n \le x_2^{n+1} \le \ldots \le x_n^n \le x_{n+1}^{n+1} \le x_{n+1}^n = b.$$

*) Для облегчения записи мы иногда вместо $x_i^n, i = \overline{1,n}$, будем писать просто x_i, а вместо $x_i^{n+1}, i = \overline{1,n+1}$, - соответственно y_i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим для заданного n -оптимального набора x^n и произвольного $(n+1)$ -оптимального набора x^{n+1} такое максимально возможное число

$$m = m(x^n, x^{n+1}),$$

что $a \leqslant y_1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant y_m \leqslant x_m \leqslant y_{m+1}$.

Среди всех наборов x^{n+1} найдется набор y^{n+1} с

$$m^0 = \max_{\{x^{n+1}\}} m(x^n, x^{n+1}) = m(x^n, y^{n+1}).$$

Теорема будет доказана, если показать, что $m^0 = n$.

Допустим обратное:

$$m^0 < n. \qquad /12/$$

Определим для набора y^{n+1} такое число

$$\ell = \ell(x^n, y^{n+1}),$$

что

$$x_{m^0} \leqslant y_{m^0+1} \leqslant y_{m^0+2} \leqslant \ldots \leqslant y_{m^0+\ell} \leqslant x_{m^0+1} < y_{m^0+\ell+1}. \qquad /13/$$

Из определения числа m следует, что $\ell \neq 1$. Рассмотрим три возможных случая: $\ell = 2$, $\ell = 0$, $\ell \geqslant 3$.

1/ При $\ell = 2$ из /13/ следует, что

$$x_{m^0} \leqslant y_{m^0+1} \leqslant y_{m^0+2} \leqslant x_{m^0+1}.$$

Выпишем тождество

$$S_n(a,b) + S_{n+1}(a,b) = [S_{m^0-1}(a, x_{m^0}) + f(x_{m^0}, x_{m^0+1}) + S_{n-m^0-1}(x_{m^0+1}, b)] +$$
$$+ [S_{m^0}(a, y_{m^0+1}) + f(y_{m^0+1}, y_{m^0+2}) + S_{n-m^0-1}(y_{m^0+2}, b)].$$

Воспользовавшись условием /3/, получим соотношение:

$$S_n(a,b) + S_{n+1}(a,b) \geqslant [S_{m^0-1}(a, x_{m^0}) + f(x_{m^0}, y_{m^0+2}) + S_{n-m^0-1}(y_{m^0+2}, b)] +$$
$$+ [S_{m^0}(a, y_{m^0+1}) + f(y_{m^0+1}, x_{m^0+1}) + S_{n-m^0-1}(x_{m^0+1}, b)] =$$
$$= S(x_1, \ldots, x_{m^0}, y_{m^0+2}, \ldots, y_{n+1}) + S(y_1, \ldots, y_{m^0+1}, x_{m^0+1}, \ldots, x_n) \geqslant S_{n+1}(a,b) + S_n(a,b).$$

Отсюда следует, что получен $(n+1)$ -оптимальный набор

$$x^{n+1} = (y_1, \ldots, y_{m^0+1}, x_{m^0+1}, \ldots, x_n),$$

для которого, как нетрудно убедиться, значение числа m совпадает с n, что противоречит предположению /12/. Следовательно, случай $\ell = 2$ невозможен.

2/ В случае $\ell = 0$

$$y_{m^0} \leqslant x_{m^0} \leqslant x_{m^0+1} < y_{m^0+1}$$

и по аналогии с предыдущим получим

$$S_n(a,b) + S_{n+1}(a,b) = [S_{m^0-1}(a, x_{m^0}) + f(x_{m^0}, x_{m^0+1}) + S_{n-m^0-1}(x_{n-m^0}, b)] +$$
$$+ [S_{m^0-1}(a, y_{m^0}) + f(y_{m^0}, y_{m^0+1}) + S_{n-m^0}(y_{m^0+1}, b)] \geqslant [S_{m^0-1}(a, y_{m^0}) + f(y_{m^0}, x_{m^0+1}) +$$
$$+ S_{n-m^0-1}(x_{m^0+1}, b)] + [S_{m^0-1}(a, x_{m^0}) + f(x_{m^0}, y_{m^0+1}) + S_{n-m^0}(y_{m^0+1}, b)] \geqslant S_n(a,b) + S_{n+1}(a,b),$$

откуда следует $(n+1)$- оптимальность набора

$$x^{n+1} = (x_1, \ldots, x_{m^0}, y_{m^0+1}, \ldots, y_{n+1}),$$

причем

$$m(x^n, x^{n+1}) > m^0,$$

что противоречит максимальности числа m^0. Таким образом, случай $\ell = 0$ также невозможен.

3/ Для $\ell \geqslant 3$ выпишем тождество

$$S_n(a,b) + S_{n+1}(a,b) = [S_{m^0-1}(a, x_{m^0}) + f(x_{m^0}, x_{m^0+1}) + S_{n-m^0-1}(x_{m^0+1}, b)] +$$

$$+[S_{m^o+l-3}(a,y_{m^o+l-2})+f(y_{m^o+l-2},y_{m^o+l-1})+f(y_{m^o+l-1},y_{m^o+l})+S_{n-m^o+1}(y_{m^o+l},b)]. \quad /14/$$

Из /13/ и /3/ имеем:

$$f(x_{m^o},x_{m^o+1})+f(y_{m^o+l-1},y_{m^o+l})\geqslant f(x_{m^o},y_{m^o+l})+f(y_{m^o+l-1},x_{m^o+1}),$$
$$f(x_{m^o},y_{m^o+1})+f(y_{m^o+l-2},y_{m^o+l-1})\geqslant f(x_{m^o},y_{m^o+l-1})+f(y_{m^o+l-2},y_{m^o+l}).$$

Сложив эти неравенства, получим

$$f(x_{m^o},x_{m^o+1})+f(y_{m^o+l-2},y_{m^o+l-1})+f(y_{m^o+l-1},y_{m^o+l})\geqslant$$
$$\geqslant f(x_{m^o},y_{m^o+l-1})+f(y_{m^o+l-2},y_{m^o+l})+f(y_{m^o+l-1},x_{m^o+1}).$$

Наконец, из /14/ и последнего неравенства следует, что

$$S_n(a,b)+S_{n+1}(a,b)\geqslant[S_{m^o-1}(a,x_{m^o})+f(x_{m^o},y_{m^o+l-1})+f(y_{m^o+l-1},x_{m^o+1})+$$
$$+S_{n-m^o-1}(x_{m^o+1},b)]+[S_{m^o+l-3}(a,y_{m^o+l-2})+f(y_{m^o+l-2},y_{m^o+l})+S_{n-m^o-l+1}(y_{m^o+l},b)]=$$
$$=S(x_1,\dots,x_{m^o},y_{m^o+l-1},x_{m^o+1},\dots,x_n)+S(y_1,\dots,y_{m^o+l-2},y_{m^o+l},\dots,y_{n+1})\geqslant S_{n+1}(a,b)+S_n(a,b).$$

Получен $(n+1)$-оптимальный набор

$$x^{n+1}=(x_1,\dots,x_{m^o},y_{m^o+l-1},x_{m^o+1},\dots,x_n)$$

с числом $m(x^n,x^{n+1})=n>m^o$, что противоречит условию максимальности числа m.

Следовательно, предположение /12/ при всех значениях числа l приводит к противоречиям.

Теорема доказана.

Из формулы /8/ и теоремы 3 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ I. При известном n-оптимальном наборе $(x_1^n,x_2^n,\dots,x_n^n)$ существует такое решение $\theta_{n+1}(b)$ функционального уравнения

$$S_{n+1}(a,b)=S_n(a,\theta)+f(\theta,b)=\varphi_{n+1}(\theta,b),$$

что $\theta_{n+1}(b)\in[x_n^n,b]$.

Более того, для каждого функционального уравнения

$$S_i(a,x_i^n)=\varphi_i(\theta,x_i^n),\ i=\overline{1,n},$$

существует решение

$$\theta_i(x_i^n)\in[x_{i-1}^n,x_i^n].$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – n – оптимальный набор. Тогда для функционального уравнения

$$S_i(a,x)=S_{i-1}(a,\theta)+f(\theta,x)=\varphi_i(\theta,x),\ i=\overline{1,n},$$

где x -произвольная точка из отрезка $[x_i,x_{i+1}]$, найдется решение $\theta_i(x)$, принадлежащее отрезку $[x_{i-1},x_i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию I существует решение $\theta_i(x_i)$, принадлежащее отрезку $[x_{i-1},x_i]$, при этом согласно /8/ $x_i=\theta_i(x_{i+1})$. Но тогда существуют такие $\theta_i(x_i)$ и $\theta_i(x_{i+1})$, что

$$\theta_i(x_i)\leqslant\theta_i(x_{i+1}),$$
$$[\theta_i(x_i),\theta_i(x_{i+1})]\subseteq[x_{i-1},x_i].$$

Отсюда согласно теореме 2 для произвольного $x\in[x_i,x_{i+1}]$ найдется решение $\theta_i(x)\in[\theta_i(x_i),\theta_i(x_{i+1})]\subseteq[x_{i-1},x_i]$, откуда следует справедливость теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученные в этом параграфе результаты, как нетрудно убедиться, имеют место и для дискретного варианта задачи I:

$$S_N(0,M)=\min_{0=m_0\leqslant m_1\leqslant\dots\leqslant m_N\leqslant m_{N+1}=M}\ \sum_{i=0}^{N}f(m_i,m_{i+1}),$$

где m_i - целые числа, $i=\overline{1,N}$.

3. Две вспомогательные леммы .

3. I. Пусть переменные x и y принимают значения из отрезков натурального ряда:

$$x\in X=\{1,2,\ldots,p\},\quad y\in Y=\{1,2,\ldots,q\}.$$

На декартовом произведении $X\times Y$ задана вещественная ограниченная снизу функция $\varphi(x,y)$.

Ставится задача: вычислить таблицу T значений функции

$$\Phi(y)=\min_{x\in X}\varphi(x,y)$$

для всех точек $y\in Y$.

В общем случае для решения этой задачи потребовалось бы pq операций вычисления функции $\varphi(x,y)$ и $\sim q$ ячеек памяти /для хранения таблицы $T=\{\Phi(y),\ y=1,2,\ldots,q\}$ /.

Обозначим через θ_y решение функционального уравнения

$$\Phi(y)=\varphi(\theta,y),\ \theta\in X. \qquad /15/$$

Пусть функция φ удовлетворяет следующим двум условиям:

I°. Если известно решение функционального уравнения /15/ для одного из двух элементов y_1,y_2 $(y_1\leq y_2)$, то найдется такое решение для другого элемента, что $\theta_{y_1}\leq\theta_{y_2}$.

2°. Если $\theta_{y_1}\leq\theta_{y_2}$ $(y_1\leq y_2)$, то для произвольного $y\in[y_1,y_2]$ найдется решение $\theta_y\in[\theta_{y_1},\theta_{y_2}]$. Тогда справедлива следующая

ЛЕММА I. Для вычисления всех элементов таблицы T требуется не более

$$(p-1)(1+[\log_2 q])+2q^{*)}$$

операций при памяти $\sim q$ ячеек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что рассматриваемая здесь задача может быть решена с помощью описанного ниже алгоритма B ,трудоемкость которого согласуется с утверждением леммы.

Введем обозначения:

$r=[\log_2 q]$;

k -номер шага алгоритма B, $k=\overline{1,r+1}$;

$\Delta_k=2^{r-k+1}$;

$R_k=\left[\dfrac{q}{\Delta_k}\right]$;

L_k -количество операций, затрачиваемое на k -м шаге;

$L=\sum\limits_{k=1}^{r+1}L_k$;

$Y_k=\{y:\ y\equiv\Delta_k\,(\mathrm{mod}\,\Delta_{k-1}),\ y\in Y\}$.

---

*) $[d]$ - означает целую часть числа d .

Нетрудно проверить, что

$$Y=\bigcup_{k=1}^{r+1} Y_k, \quad |Y_k|=R_k-R_{k-1}.$$

На первом шаге алгоритма B, решая уравнение /15/ для $y=\Delta_1$, найдем решение θ_{Δ_1}. При этом необходимо перебрать $L_1=p$ значений функции $\varphi(x,\Delta_1)$. Запомним значение θ_{Δ_1} в Δ_1-й ячейке таблицы T.

Допустим, что в результате k шагов $(k\leqslant r)$ таблица T в точках

$$y=\Delta_k,\ 2\Delta_k,\ldots,R_k\Delta_k \qquad /16/$$

заполнена значениями θ_y такими, что

$$1\leqslant\theta_{\Delta_k}\leqslant\theta_{2\Delta_k}\leqslant\ldots\leqslant\theta_{R_k\Delta_k}\leqslant p.$$

На $(k+1)$-м шаге алгоритма находим значения θ_y для $y\in Y_{k+1}$. В силу конструкции множеств $\{Y_k\}$ элементы $y\in Y_{k+1}$ чередуются с точками /16/, при этом

$$(s-1)\Delta_k<(2s-1)\Delta_{k+1}<s\Delta_k,\ s=1,2,\ldots,|Y_{k+1}|.$$

Вычислим количество операций L^s_{k+1}, требуемое для вычисления решения θ_y для элемента $y=(2s-1)\Delta_{k+1}\in Y_{k+1}$. Из условий 1° – 2° следует, что это решение может быть найдено из функционального уравнения:

$$\varphi(\theta,(2s-1)\Delta_{k+1})=\min_{\theta_{(s-1)\Delta_k}\leqslant x\leqslant\theta_{s\Delta_k}}\varphi(x,(2s-1)\Delta_{k+1}),$$

причем $\theta_0=1$, $\theta_{|Y_k|\Delta_k}\leqslant p$.

Отсюда следует, что

$$L^s_{k+1}=\theta_{s\Delta_k}-\theta_{(s-1)\Delta_k}+1.$$

Тогда

$$L_{k+1}=\sum_{s=1}^{|Y_{k+1}|}L^s_{k+1}=\sum_{s=1}^{|Y_{k+1}|}(\theta_{s\Delta_k}-\theta_{(s-1)\Delta_k}+1)=|Y_{k+1}|+\theta_{|Y_{k+1}|\Delta_k}-1.$$

На последнем $(r+1)$-м шаге алгоритма заполняются элементы таблицы T с нечетными номерами. На вычисление множества всех решений затрачивается количество операций

$$L=\sum_{k=1}^{r+1}L_k=\sum_{k=1}^{r+1}|Y_k|+\sum_{k=1}^{r+1}(\theta_{|Y_k|\Delta_k}-1)\leqslant q+\sum_{k=1}^{r+1}(p-1)=(p-1)(r+1)+q.$$

Наконец, делается еще q операций для преобразования таблицы решений $\{\theta_y,\ y=1,2,\ldots,q\}$ в искомую таблицу T.

Работа алгоритма B закончена. При этом использовано q ячеек памяти и затрачено количество операций

$$K=L+q\leqslant(p-1)([\lg_2 q]+1)+2q.$$

Лемма доказана.

3.2. Оценим максимальное значение функции

$$F(z_1,z_2,\ldots,z_n)=\sum_{i=1}^{n-1}z_i\ln(z_{i+1}+\delta),\ n\geqslant 2, \qquad /17/$$

в области $D_n(C)$, определяемой условиями

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i = c;\ z_i \geqslant 0,\ i=\overline{1,n} \right\}.$$

Здесь δ - константа, не меньшая I.

Обозначим

$$\psi_n(C) = \max_{\{D_n(C)\}} F(z_1,z_2,\dots,z_n) = F(z_1^*,z_2^*,\dots,z_n^*).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 2. Максимум функции /17/ при $n\geqslant 2,\ \delta\geqslant 1,\ (z_1,z_2,\dots,z_n)\in D_n(C)$ удовлетворяет соотношению:

$$0{,}75\,c\ln\left(\frac{c}{4}+\delta\right) \leqslant \psi_n(C) \leqslant c\ln\left(\frac{c}{4}+\delta\right). \qquad /18/$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нижняя оценка получается сразу, если положить

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{для } i\leqslant n-2, \\ 0{,}75c & \text{для } i=n-1, \\ 0{,}25c & \text{для } i=n. \end{cases}$$

Докажем верхнюю оценку. Выпишем очевидное соотношение:

$$\psi_n(C) \leqslant \psi_n(C) + z_n^*\ln\delta = \ln\left[(z_2^*+\delta)^{z_1^*}(z_3^*+\delta)^{z_2^*}\dots(z_n^*+\delta)^{z_{n-1}^*}\delta^{z_n^*}\right]$$

Воспользовавшись теоремой о среднем геометрическом и среднем арифметическом [II], получим неравенство:

$$(z_2^*+\delta)^{z_1^*}\dots(z_n^*+\delta)^{z_{n-1}^*}\delta^{z_n^*} \leqslant \left(\frac{z_1^*(z_2^*+\delta)+\dots+z_{n-1}^*(z_n^*+\delta)+z_n^*\delta}{z_1^*+z_2^*+\dots+z_n^*}\right)^{z_1^*+\dots+z_n^*} =$$

$$= \left(\frac{z_1^*z_2^*+z_2^*z_3^*+\dots+z_{n-1}^*z_n^*+\delta c}{c}\right)^c \leqslant \left(\frac{\sigma_n(c)}{c}+\delta\right)^c,$$

где

$$\sigma_n(C) = \max_{\{D_n(C)\}} (z_1z_2+z_2z_3+\dots+z_{n-1}z_n)$$

Таким образом,

$$\psi_n(C) \leqslant c\ln\left(\frac{\sigma_n(C)}{c}+\delta\right)$$

и утверждение /18/ будет доказано, если мы покажем, что для $n\geqslant 2$

$$\sigma_n(C) = \frac{c^2}{4}. \qquad /19/$$

Заметим прежде всего, что при всех $n\geqslant 2$

$$\sigma_n(C) \geqslant \frac{c^2}{4}. \qquad /20/$$

Действительно, полагая

$$z_i = \begin{cases} 0{,}5c & \text{для } i\leqslant 2, \\ 0 & \text{для } i>2 \end{cases}$$

получим оценку /20/.

Для $n=3$ имеем

$$\sigma_3(C) = \max_{\{D_3(C)\}}(z_1z_2+z_2z_3) = \max_{(z_1+z_3)+z_2=c}(z_1+z_3)z_2 = \max_{\hat z_1+z_2=c}\hat z_1z_2 = \sigma_2(C) = \frac{c^2}{4}.$$

Для $n<4$ формула /19/, а следовательно, и утверждение /18/ доказаны.

Докажем справедливость формулы /19/ для $n \geqslant 4$. Доказательство проведем методом индукции по n.

Обозначим

$$\hat{\sigma}_n(C) = \max_{\{D_n(C)\}} (z_1 z_2 + \ldots + z_{n-1} z_n + z_n z_1).$$

Очевидно,

$$\hat{\sigma}_n(C) \geqslant \sigma_n(C) \geqslant \frac{C^2}{4}. \qquad /21/$$

Для $n=4$ получим:

$$\hat{\sigma}_4(C) = \max_{\{D_n(C)\}} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_4 + z_4 z_1) = \max_{(z_1+z_3)+(z_2+z_4)=C} (z_1+z_3)(z_2+z_4) = \max_{\hat{z}_1+\hat{z}_2=C} \hat{z}_1 \hat{z}_2 = \frac{C^2}{4}. \qquad /22/$$

Из /21/ и /22/ следует, что для $n=4$ формула /19/ выполняется.

Допустим, что формула /19/ справедлива для произвольного целого $n \geqslant 4$. Покажем, что тогда она выполняется и для $(n+1)$.

Пусть $\hat{\sigma}_{n+1}(C) = z_1^0 z_2^0 + \ldots + z_n^0 z_{n+1}^0 + z_{n+1}^0 z_1^0$.

Предположим, что все $z_i^0 > 0$, $i=\overline{1,n}$. Тогда, применяя метод множителей Лагранжа, получим, что точка $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_{n+1}^0)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z_1^0 + z_3^0 &= \lambda, \\ z_2^0 + z_4^0 &= \lambda, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot \\ z_n^0 + z_1^0 &= \lambda, \\ z_{n+1}^0 + z_2^0 &= \lambda \end{aligned}\right\} \qquad /23/$$

Просуммировав левые и правые части системы /23/, получим

$$\lambda = \frac{2C}{n+1}. \qquad /24/$$

Далее делаем тождественные преобразования:

$$\hat{\sigma}_{n+1}(C) = \frac{1}{2}(z_1^0 z_2^0 + z_1^0 z_2^0 + z_2^0 z_3^0 + z_2^0 z_3^0 + \ldots + z_n^0 z_{n+1}^0 + z_n^0 z_{n+1}^0 + z_{n+1}^0 z_1^0 + z_{n+1}^0 z_1^0) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[z_1^0(z_{n+1}^0 + z_2^0) + z_2^0(z_1^0 + z_3^0) + \ldots + z_{n+1}^0(z_n^0 + z_1^0)\right],$$

откуда с учетом /23/ и /24/ получим

$$\hat{\sigma}_{n+1}(C) = \frac{1}{2}\lambda C = \frac{C^2}{n+1} < \frac{C^2}{4}, \quad n \geqslant 4.$$

Предположение, что $z_i^0 > 0$, $i=\overline{1,n+1}$, привело нас к противоречию с неравенством /20/.

Отсюда следует, что хотя бы один из z_i^0 равен нулю. В силу симметрии предположим, что $z_{n+1}^0 = 0$. Тогда

$$\hat{\sigma}_{n+1}(C) = z_1^0 z_2^0 + \ldots + z_{n-1}^0 z_2^0 \leqslant \sigma_n(C) = \frac{C^2}{4}. \qquad /25/$$

Из /21/ и /25/ следует, что формула /19/ справедлива для $n \geq 4$ и, следовательно, для всех $n \geq 2$.

Тем самым лемма доказана.

4. Алгоритм A решения основной задачи и оценка трудоемкости алгоритма

Из доказанных выше теорем и вспомогательных лемм следует возможность построения для решения основной задачи I эффективного вычислительного алгоритма A, трудоемкость которого существенно меньше по сравнению с методом динамического программирования.

Трудоемкость оценивается в предположении, что на отрезке $[a,b]$ построена ε-сеть мощностью M, а функция f определена в точках, соответствующих узлам ε-сети.

Для n - оптимального набора $x^n=(x_1,\ldots,x_n)$ введем следующие обозначения:

q_i -число точек ε-сети, принадлежащих отрезку $[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n+1}$. При этом, очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i = M+n.$$

T_n^i - упорядоченный список /таблица/ значений $S_i(a,x)$, вычисленных для узловых точек ε-сети, принадлежащих области $[x_i,x_{i+1})$;

$\hat{T}_n^i$ - аналогичная таблица для замкнутой области $[x_i,x_{i+1}]$;

T_n - совокупность таблиц $\{T_n^i,\ i=0,1,\ldots,n\}$;

k_n^i - количество операций, затраченное для вычисления таблицы $\hat{T}_n^i$;

k_n - количество операций, затраченное для заполнения таблицы T_n.

Под одной операцией при вычислении, например, значения $S_i(a,y)\in\hat{T}_n^i$ мы будем понимать совокупность действий, состоящую из выборки некоторого значения $S_{i-1}(a,x)$ из соответствующей таблицы, вычисления функции $f(x,y)$, сложения величин $S_{i-1}(a,x)$ и $f(x,y)$ и сравнения полученного результата с некоторым числом.

Опишем алгоритм A и оценим количество операций K_A и память Π_A, затрачиваемые для его работы.

На первом шаге определим решение $\theta_1(b)$ функционального уравнения

$$S_1(a,b)=f(a,\theta)+f(\theta,b),\ \theta\in[a,b].$$

Решение $\theta_1(b)$ фактически есть I-оптимальный набор x^1. Очевидно, на его поиск затрачивается q_1 операций.

Предположим, что в результате n шагов алгоритма $(1\leq n<N)$ получен n - оптимальный набор $x^n=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Для поиска $(n+1)$-оптимального набора $x^{n+1}=(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})$ делается следующий шаг, состоящий из двух этапов - построения таблицы T_n и нахождения набора

x^{n+1} .

ПЕРВЫЙ ЭТАП начинается с заполнения таблицы $\hat{T}_n^0=\{f(a,x),x\in[a,x_1]\}$. При этом, очевидно, $k_n^0=q_1$.

Допустим, что мы уже получили совокупность таблиц $\{T_n^0,T_n^1,\dots,\hat{T}_n^{i-1}\}$, $i\leq n$. Найдем таблицу $\hat{T}_n^i=\{s_i(a,y),y\in[x_i,x_{i+1}]\}$. Согласно теореме 4 для произвольного $y\in[x_i,x_{i+1}]$ найдется такое решение функционального уравнения

$$s_i(a,y)=s_{i-1}(a,\theta)+f(\theta,y),$$

что $\theta_i(y)\in[x_{i-1},x_i]$. Отсюда следует, что для вычисления любого элемента таблицы $\hat{T}_n^i$ достаточно уже имеющейся таблицы $\hat{T}_n^{i-1}=\{s_{i-1}(a,x)$, $x\in[x_{i-1},x_i]\}$.

Из теорем I и 2 вытекает, что функция $\varphi_i(\theta,y)=s_{i-1}(a,\theta)$ такова, что выполняются условия I°– 2° вспомогательной леммы I для задачи вычисления таблицы $\hat{T}_n^i$. Отсюда следует, что

$$k_n^i\leq(q_i-1)(lg_2q_{i+1}+1)+2q_{i+1}$$

При этом, ввиду того, что таблицы $\hat{T}_n^{i-1}$ и $\hat{T}_n^i$ пересекаются в точке x_i , вычисление значения $s_i(a,x_i)\in\hat{T}_n^i$ заканчиваем в последнюю очередь.

I-й этап $(n+1)$ -го шага заканчивается вычислением таблицы $\hat{T}_n^n$. В результате будет получена таблица T_n за количество операций

$$k_n=\sum_{i=0}^{n}k_n^i\leq q_i+\sum_{i=1}^{n}\left[(q_i-1)(lg_2q_{i+1}+1)+2q_{i+1})\right]\leq$$

$$\leq 3M+2n+\sum_{i=1}^{n}(q_i-1)\,lg_2q_{i+1}\leq 3M+2n+\frac{1}{\ln 2}\varphi_{n+1}(M-1).$$

Воспользовавшись утверждением /18/ леммы 2, получаем следующую оценку для k_n :

$$k_n\leq 3M+2n+(M-1)\,lg_2\left(\frac{M-1}{4}+1\right). \qquad /26/$$

ВТОРОЙ ЭТАП $(n+1)$ -го шага - поиск $(n+1)$ - оптимального набора x^{n+1} . Так как $y_{n+1}=\theta_{n+1}(b)$, то согласно следствию I ищем y_{n+1} на отрезке $[x_n,b]$ как решение функционального уравнения

$$s_{n+1}(a,b)=s_n(a,\theta)+f(\theta,b).$$

Для этого достаточно проделать q_{n+1} операций с элементами таблицы $\hat{T}_n^n$. Запоминаем найденное значение y_{n+1} .

Пусть мы нашли поднабор $(y_{i+1},\dots,y_n,y_{n+1})$, такой, что

$$x_i\leq y_{i+1}\leq x_{i+1}\leq\dots\leq y_{n+1}\leq x_{n+1}=b.$$

Согласно теореме 4 значение $y_i=\theta_i(y_{i+1})$ может быть найдено на отрезке $[x_{i-1},x_i]$ как решение функционального уравнения

$$s_i(a,y_{i+1})=s_{i-1}(a,\theta)+f(\theta,y_{i+1})$$

для чего достаточно проделать q_i операций с элементами таблицы T_n^{i-1}. Найденное значение y_i запоминаем на месте хранения x_i .

2-й этап $(n+1)$ -го шага заканчивается вычислением значения $y_1\in[a,x_1]$, запоминаем его на месте x_1 .

На этом таблица T_n может быть забыта.

В результате количества операций, равного

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i = M+n, \qquad /27/$$

$(n+1)$ -оптимальный набор X^{n+1} найден полностью. На 2-м этапе N -го шага алгоритма A мы получим решение задачи I - N -оптимальный набор X^N, минимизирующий целевую функцию $S(x_1,x_2,\dots,x_N)$.

Из описания алгоритма следует, что для его работы на каждом шаге достаточно иметь память $\sim M$ ячеек для последовательного хранения совокупности таблиц $\{T_n^i, i=0,1,\dots,n\}$ и не более N ячеек для хранения соответствующих n -оптимальных наборов, $n=\overline{1,N}$.

Складывая количества операций, затрачиваемых на каждом шаге алгоритма, и учитывая /26/-/27/, оценим сверху суммарное количество операций:

$$K_A = M + \sum_{n=2}^{N}(k_n+M+n-1) \leqslant \sum_{n=1}^{N}(M+n-1) + \sum_{n=2}^{N}\left[3M+2n+(M-1)\lg_2\left(\frac{M-1}{4}+1\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant M + \sum_{n=2}^{N}\left(4M+3n-1\right)+\left(N-1\right)\left[(M-1)(\lg_2 M-2)+\frac{3}{\ln 2}\right] \leqslant (NM\lg_2 M)\left(1+\frac{2+\frac{3N}{2M}}{\lg_2 M}\right).$$

Окончательно

$$K_A \leqslant (NM\lg_2 M)(1+O_M),$$

где

$$O_M \leqslant \frac{3,5}{\lg_2 M} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая

ТЕОРЕМА 5. Для решения задачи I достаточно затратить количество операций $K_A \simeq NM\lg_2 M$ и память Π_A не более $(M+N)$ ячеек.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Трудоемкость алгоритма A может быть еще уменьшена, если воспользоваться фактом чередования наборов X^n и X^{n+1}:

$$a = x_0^n \leqslant x_1^{n+1} \leqslant x_1^n \leqslant \dots \leqslant x_i^{n+1} \leqslant x_i^n \leqslant x_{i+1}^{n+1} \leqslant x_{i+1}^n \leqslant \dots \leqslant x_{n+1}^{n+1} \leqslant x_{n+1}^n = b. \qquad /28/$$

Действительно, из /28/ следует, что пересечение таблиц T_n^i и $\hat{T}_{n+1}^i$ непусто, а именно:

$$T_n^i \cap \hat{T}_{n+1}^i = \left\{S_i(a,x),\ x\in[x_i^n, x_{i+1}^{n+1}]\right\}$$

если $x_{i+1}^{n+1} < x_{i+1}^n$. Тогда для заполнения таблицы достаточно вычислить только значения $S_i(a,x)$ в области $[x_i^{n+1}, x_i^n] \subset [x_i^{n+1}, x_{i+1}^{n+1}]$. При этом, разумеется, в памяти надо хранить одновременно оба набора X^n и X^{n+1} т.е. экономия числа операций достигается здесь за счет некоторого увеличения памяти / $\sim$ на N ячеек/.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в процессе поиска набора X^{n+1} окажется, что значение x_i^{n+1} совпало со значением $x_i^n \in X^n$, $(1<i\leqslant n)$, то в силу принципа оптимальности можно сразу положить $x_j^{n+1} = x_j^n$ для всех $j=\overline{1,i}$. При этом совокупность таблиц $\{T_{n+1}^0, T_{n+1}^1, \dots, T_{n+1}^{i-1}\}$ пересчитывать так-

же не надо, так как она совпадает с совокупностью таблиц

$$\{T_n^0, T_n^1, \dots, T_n^{i-1}\}.$$

В заключение статьи считаю своим долгом выразить признательность Н.И.Глебову за постоянное внимание и помощь при написании настоящей работы.

Поступила в редакцию 13.II.1969 г.

Литература

1. Н.И.Глебов. О выпуклых последовательностях. Дискретный анализ. Новосибирск, 1965, вып. 4., стр. 10-22.

2. В.Т.Дементьев. Об одной задаче оптимального размещения точек на отрезке. Там же, стр. 23-27.

3. Young,Henry A. On the optimum location of checking station. Oper. Res.,YII, № 5.

4. C.H.Dowker. An minimum circumscribed polygons. Bull.Amer. Soc.,50,1944.

5. J. Molnar. On inscribed and circumscribed polygons of convex regions. Math. Lapok., 6, 1955.

6. М.М.Беркович. Задачи стандартизации и некоторые методы их решения. Экономика и математические методы., 1969, т.У, вып.2,285-299.

7. М.М.Беркович. Решение одной комбинаторной задачи.Там же,1968, т.IУ, вып.2.

8. С.И.Зуховицкий, Р.А.Поляк, М.Е.Примак. Об одном классе задач вогнутого программирования. Там же. 1968, т.IУ, вып.3.

9. С.И.Зуховицкий, Р.А.Поляк, М.Е.Примак. Об одной задаче вогнутого программирования. ДАН. СССР, 1968, т. 179, № 4.

10. Р.Беллман. Динамическое программирование, ИЛ, 1960.

11. Г.Г.Харди, Д.Е.Литтлвуд и Т.Полиа, Неравенства. ИЛ, 1948, Москва, стр. 29.