Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.512.25/.26+519.3:330.115.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОИСКА НАИЛУЧШЕГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Ю.Г.Стоян /Харьков/

Пусть имеется замкнутая, ограниченная область D, определяемая неравенствами:

$$f_i(X) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad i = \overline{1, \eta}, \qquad /1/$$

и гладкая, ограниченная на D, если n конечно, функция

$$K(X) = K(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad /2/$$

Необходимо определить

$$\max_{X \in D} K(X) (\min_{X \in D} K(X)). \qquad /3/$$

В общем случае, если а/ область D не выпукла или б/ область D выпукла, а $K(X): X \in D$ не выпукла или условия а/ и б/ выполняются одновременно, то такая задача является многоэкстремальной. Если количество экстремумов достаточно велико, то поиск наилучшего значения функции $K(X): X \in D$ представляет серьезные трудности.

Проблеме поиска наилучшего решения в случае, если количество возможных экстремальных решений достаточно велико и функция /2/ удовлетворяет определенным требованиям, посвящена данная работа.

В работах [1,2] показано, что если найдется такая непрерывная строго монотонная функция $h_n = h_n(K)$, которую можно представить в виде суммы:

$$h_n(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad /4/$$

где

$$y_i = \begin{cases} y_i(x_i, \ldots, x_{i+r}), \text{ если } & i \leq n - r, \\ y_i(x_i, \ldots, x_{i+r}, x_1, \ldots, x_{i+r-n}), \text{ если } & i > n - r, \end{cases} \qquad /5/$$

то есть каждая $y_i (i = \overline{1, n})$ является функцией от r соседних переменных, расположенных циклически; $y_i (i = \overline{1, n})$ непрерывны и ограничены на D,

$$r = O(n^{1/16}) (r = O(n^{1/3})), \qquad /6/$$

то при $n \to \infty$ функция распределения значений функции $K(X): X \in D$ сходится к нормальной.

Будем различать локальные и относительные локальные экстремумы. В дальнейшем, говоря экстремум, будем понимать локальный экстремум, а если относительный экстремум, то - относительный локальный экстремум.

Под случайной выборкой объема n одного значения функции $K(X)$ в точке $\overline{X}$, в которой достигается экстремум или относительный экстремум, будем понимать экстремальное значение функции $K(X): X \in D$ при условии, что

$$F_{\bar{X}}(X) = \prod_{i=1} F_{\bar{X}_i}(x_i), \qquad /7/$$

где $\bar{X} = \bar{X}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n)$, $F_{\bar{X}}(X)$ - функция распределения.

Таким образом, все $\bar{X} \in D$ образуют некоторое подмножество $D_1 \subset D$ и такое, что во всех его точках $F(K(\bar{X}))$ соответствуют $P(D_1)$, где $K(\bar{X}) \leqslant K(X)$.

Если из t случайных выборок было получено t_1 значений функции $K(\bar{X}) \leqslant K(X)$, то статистическую функцию распределения значений $K(\bar{X})$ обозначим $F_t(K(\bar{X}))$.

Предположив, что функция $K(X)$ удовлетворяет условиям /4-6/ и, кроме того, число $\ell \to \infty$ всех экстремальных значений функции $K(X)$ на D при $n \to \infty$, то согласно центральной статистической теореме [3] получим, что:

$$P\left[\sup_{-\infty < t < \infty} |F_t(K(\bar{X})) - F(K(X))| \to 0\right] = 1, \qquad /8/$$

где $F(K(X))$ -функция распределения всех значений функции $K(X): X \in D$, то есть функция $F_t(K(\bar{X}))$ с вероятностью 1 равномерно по $K(X)$ сходится к нормальному закону распределения.

Пусть распределение $F_t(K(\bar{X}))$ с точностью до двух моментов характеризуется m - математическим ожиданием и σ^2 - дисперсией.

Обозначим число экстремумов функции $K(X): X \in D$ через ℓ_1, а относительных экстремумов - ℓ_2; очевидно, что $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

Будем полагать, что $X \in C^1$ и $\ell_1 \to \infty$ при $n \to \infty$.

Так как $h_n(x)$ - функция строго монотонная, то векторное произведение будет:

$$[\operatorname{grad} K(X), \operatorname{grad} h_n(X)] = 0. \qquad /9/$$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функцию $h_n(X)$ вместо $K(X)$.

Согласно /4/ имеем:

$$\frac{\partial h_n(X)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad /10/$$

Откуда, учитывая /5/, получим:

$$\operatorname{grad} h_n(X) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_{n-r+1}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right)\ell_1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_{n-r+2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\right)\ell_2 +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{\partial y_{i+r}}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_{i+2r}}{\partial x_i}\right)\ell_i + \ldots + \left(\frac{\partial y_{r-2}}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)\ell_n, \qquad /11/$$

где $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ - система единичных векторов в n -мерном векторном пространстве, то есть каждая составляющая $\operatorname{grad} h_n(X)$ состоит не более чем из $r+1$ слагаемого и зависит не более чем от $2r+1$ переменной.

Обозначим составляющие $\operatorname{grad} h_n(X)$ через $\varphi_i\ (i = \overline{1,n})$;

$$\operatorname{grad} h_n(X) = \varphi_1 \ell_1 + \varphi_2 \ell_2 + \ldots + \varphi_n \ell_n. \qquad /12/$$

Пусть в точке $X^0 \in D$ достигается функцией $K(\bar{X}^0) = A_0$ экстремум.

Назовем экстремум A_0 исходным, а точку $\overline{X}_0$ - исходной.

Так как $grad\,h_n(\overline{X}^0)=0$, то $\varphi_i = 0\,(i=\overline{1,n})$.

Изменив произвольным образом значение только координаты x_j в исходной точке $\overline{X}^0$, получим точку X_0^{0j}; в общем случае

$$grad\,h_n(\overline{X}_0^{0j}) = 0.$$

На основании /II.12/ в точке X_0^{0j} не более чем $2r+1$ функция $\varphi_{k_1} \neq 0\,(k_1 = j-S_1^1,\ldots,j,\ldots,j+S_1^2;\ S_1^1+S_1^2 \leqslant 2r$, а остальные $n-2r-1$ функций $\varphi_i = 0$, так как они не зависят от x_j.

Тогда, очевидно, найдется такое $t_1 \neq 0$, что будет:

$$h_n(X_1^{0j}) = h_n(X_0^{0j} + t_1\,grad\,h_n(X_0^{0j})>h_n(X_0^{0j}), \qquad /13/$$

в результате чего изменят свои значения не более чем $2r+1$ независимая переменная $x_{k_1}(k_1 = j-S_1^1,\ldots,j,\ldots,S_{1+j}^2;\ S_1^1+S_1^2 \leqslant 2r$.

Тогда после m_1 шагов $t_\gamma(\gamma=\overline{1,q_1})$ изменят свои значения не более чем $2r\cdot q_1+1$ независимая переменная $x_\nu\,(\nu = j-S^1,\ldots,j,\ldots,j+S^2;\ S^1+S^2 \leqslant 4rq_1)$, а остальные $n-2rq_1-1$ будут иметь те же значения, что и в точке $\overline{X}^0$ и

$$|h_n(X_{q_1}^{0j}) - h_n(\overline{X}^{0j})| < \frac{\varepsilon}{2},\ \varepsilon>0, \qquad /14/$$

где $\overline{X}^{0j}$ - точка "ближайшего" экстремума.

Относительно шагов $t_\gamma(\gamma=\overline{1,q_1})$ будем предполагать, что движение /спуск/ всегда осуществляется к "ближайшему" экстремуму, то есть к тому, в зоне "притяжения" которого находилась начальная точка X_0^{0j}. Кроме того, будем полагать, что величина шага выбирается оптимально в смысле скорости движения к этому экстремуму.

Изменяя значения только одной переменной $x_j(j=\overline{1,n})$, в исходной точке $\overline{X}_0$ будут получены экстремумы функции $h_n(X): X\in D$ и их количество $\ell_1^0 \leqslant \ell_1$, а при $n\to\infty$ будет $\ell_1^0\to\infty$, так как по предположению $\ell_1\to\infty$.

Согласно центральной статистической теореме, можно сказать, что экстремальные значения функции $h_n(X)$, полученные таким образом из исходной точки $\overline{X}^0$, будут распределяться по закону, асимптотически сходящемуся к нормальному.

Пусть это распределение с точностью до двух моментов характеризуется m_0-математическим ожиданием и σ_0^2 - дисперсией.

ЛЕММА I. Если функция $h_n(X)$ удовлетворяет условиям /4-6/, $\ell_1\to\infty$ при $n\to\infty$, всегда выполняется неравенство /14/ и

$$q_1 = \frac{\delta\cdot n-1}{2\cdot O(n^{1/3})},\quad \frac{1+2\,O(n^{1/3})}{n} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}+\omega(\rho), \qquad /15/$$

где $\omega(\rho)$ - коэффициент корреляции $\rho\leqslant\frac{1}{4}$ [1], то $\sigma_0' < \sigma$.

Другими словами, дисперсия σ^2 распределения локальных экстремумов, полученных из исходной точки $\overline{X}^0$, функции $h_n(X)$ меньше дисперсии σ^2 распределения всех локальных экстремумов при выполнении условий леммы.

Так как всегда $q_1 \geqslant 1$, то $\frac{\delta \cdot n - 1}{20(n^{1/3})} \geqslant 1$, $\delta n - 1 \geqslant 20(n^{1/3})$, откуда $\delta \geqslant \frac{1 + 20(n^{1/3})}{n}$. Пусть $\delta = \frac{1}{3}$. Тогда в силу /15/ будет:

$$q_1 = \frac{1/3\, n - 1}{20(n^{1/3})}. \qquad /16/$$

Так как после q_1 шагов изменяет свои значения не более чем $2rq_1+1$ переменная, а $r = O(n^{1/3})$, то из /16/ получим, что после q_1 шагов изменяет свои значения не более чем $\frac{1}{3}n$ переменная.

В исходной точке $\bar{X}^0$ изменим произвольным образом значение координаты x_i, причем $|i-j| \geqslant 2(rq_2+1)$, где $q_2 \leqslant q_1$, что всегда можно предположить в силу произвольности выбора j-го индекса. В силу условий леммы I будем иметь:

$$|h_n(X^{oj}_{q_2}) - h_n(\bar{X}^{oi})| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad /17/$$

Учитывая /4/, /5/, а также /14/ и /17/, напишем:

$$\left|h_n(X^{oj}_{q_1}) - h_n(\bar{X}^{oj})\right| = \left|\left[\sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma\right] - \sum_{\gamma=i+q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad /18/$$

$$\left|h_n(X^{oi}_{q_2}) - h_n(X^{oi})\right| = \left|\sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma - \left[\sum_{\gamma=i+q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma\right]\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где

$$h_n(X^{oj}_{q_1}) = \sum_{\gamma=1}^{j-q_1 r-1} y_\gamma + \left[\sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma\right] + \ldots + \sum_{\gamma=i-q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma + \sum_{\gamma=i+q_2 r+1}^{n} y_\gamma, \qquad /19/$$

$$h_n(X^{oj}_{q_2}) = \sum_{\gamma=1}^{i-q_1 r-1} y_\gamma + \sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma + \ldots + \left[\sum_{\gamma=i-q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma\right] + \sum_{\gamma=i+q_2 r+1}^{n} y_\gamma,$$

$i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$,

в квадратных скобках правых частей уравнений /18 - 19/ стоят те слагаемые, которые имеют значения, отличные от значений соответствующих слагаемых функции $h_n(X)$ в точке $\bar{X}^0$.

Из /19/ можно написать:

$$h_n(X^{oij}_{q_1}) = \sum_{\gamma=1}^{j-q_1 r-1} y_\gamma + \left[\sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma\right] + \ldots + \left[\sum_{\gamma=i-q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma\right] + \sum_{\gamma=i+q_2 r+1}^{n} y_\gamma, \qquad /20/$$

и, учитывая /18/, будем иметь:

$$\left|h_n(X^{oij}_{q_1}) - h_n(\bar{X}^{oij})\right| = \left|\left[\sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma + \sum_{\gamma=i+q_2 r}^{j+q_2 r} y_\gamma\right] - \sum_{\gamma=j-q_1 r}^{i+q_1 r} y_\gamma - \sum_{\gamma=i-q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma\right| < \varepsilon. \qquad /21/$$

Определим:

$$\Delta h_j = h_n(X^{oj}_{q_1}) - h_n(\bar{X}^0) = \left[\sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma\right] - \sum_{\gamma=j-q_1 r}^{j+q_1 r} y_\gamma, \qquad /22/$$

$$\Delta h_i = h_n(X^{oi}_{q_2}) - h_n(\bar{X}^0) = \left[\sum_{\gamma=i-q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma\right] - \sum_{\gamma=i-q_2 r}^{i+q_2 r} y_\gamma,$$

$$\Delta h_{ij} = h_n(X^{oij}_{q_1}) - h_n(\bar{X}^0) = \Delta h_i + \Delta h_j, \quad i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}.$$

Если σ_{01}^2 и σ_{02}^2 - дисперсии распределений $h_n(X_{q_1}^{oj})$ и $h_n(X_{q_2}^{oi})$ $(i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n})$, соответственно, то, как известно [4], параметры σ_{01}^2 и σ_{02}^2 будут определять распределения значений Δh_i и Δh_j, соответственно и, учитывая /22/, будет:

$$\sigma_{012}^2 = \sigma_{01}^2 + \sigma_{02}^2 + 2\rho\sigma_{01}\sigma_{02}, \qquad /23/$$

где σ_{012} - дисперсия распределения значений $\Delta h_{ij}\,(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$.

Легко заметить, что если $\delta \leq \frac{1}{2}$, то $\rho = 0$, следовательно, $\sigma_{012} > \sigma_{01}$ и $\sigma_{012} > \sigma_{02}$, откуда вытекает справедливость леммы I.

Таким образом, данная лемма будет справедлива при таких $\delta=\frac{1}{2}+\omega(\rho)$, пока будут выполняться неравенства:

$$\sigma_{012} > \sigma_{01}, \quad \sigma_{012} > \sigma_{02}.$$

Так как на практике [6] оказывается, что $\sigma_{01} \approx \sigma_{02}$, и, как известно, $|\rho| \leq 1/4$ [I], то лемма I справедлива, когда $\delta > 1$.

ЛЕММА 2. Если функция $h_n(X)$ удовлетворяет условиям /4-6/, область D определяется системой неравенств:

$$f_i = \begin{cases} f_i(x_i,\dots,x_{i+r}), & \text{если } i \leq \eta - r, \\ f_i(x_i,\dots,x_n,x_1,\dots,x_{i+r-n}), & \text{если } i > \eta - r, \end{cases} \qquad /24/$$

$$i=\overline{1,\eta};\ \eta \geq n;$$

$f_i(X) \in C_D^1$ $(i=\overline{1,\eta})$, $\ell_2 \to \infty$ при $n \to \infty$ и выполняются неравенства /I4-I5/, то $\sigma_0'' < \sigma$.

Другими словами, дисперсия $\sigma_0^{\prime\prime 2}$ распределения относительных экстремумов, полученных из исходной точки $\overline{X}^0$, функции $h(X)$ меньше дисперсии σ^2 распределения всех локальных экстремумов при выполнении условий леммы.

Если в точке $\overline{X}_0$ достигается относительный экстремум $h_n(\overline{X}^0)=A_0$, то не найдется такой вектор [9]

$$Z(\overline{X}^0) = Z_1\ell_1 + Z_2\ell_2 + \dots + Z_n\ell_n \neq 0, \qquad /25/$$

чтобы одновременно выполнялись строгие неравенства:

$$(grad f_k(\overline{X}^0), Z(\overline{X}_0)) > 0,$$
$$(grad\, h_n(\overline{X}^0), Z(\overline{X}_0)) > 0,\quad k=\overline{1,\eta}, \qquad /26/$$

Изменим произвольным образом только значение координаты x_j исходной точки $\overline{X}^0$. В общем случае найдется вектор $Z(X_0^{oj}) \neq 0$ и шаг t_1 [8,9], что будет выполняться:

$$h_n(X_1^{oj}) = h_n[X_0^{oj} + t_1 \cdot Z(X_0^{oj})] > h(\overline{X}_0^{oj}). \qquad /27/$$

Так как через точку $\overline{X}^0$ проходят только поверхности, определяемые равенствами $f_k(\overline{X}^0) - f_k(X) = 0$ $(k=\overline{1,\eta_1};\ \eta_1 < \eta)$, то в результате шага t_1 изменят свои значения не более чем $2r+1$ переменная, а остальные $n-(2r+1)$ - сохранят те же значения, что и в точке X^0. Очевидно, что через q_1 шагов изменят свои значения не более чем $2rq_1+1$ переменная.

Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству леммы I.

На основании лемм I и 2 можно сформулировать следующее:

ТЕОРЕМА 1. Если $l \to \infty$ при $n \to \infty$, при выполнении условий лемм 1 и 2, то распределения, получаемые из исходных точек, в которых достигаются либо экстремумы, либо относительные экстремумы, имеют дисперсии, удовлетворяющие неравенствам:

$$\sigma_\nu^2 < \sigma^2, \quad \nu = 1, 2, \ldots \qquad /28/$$

Пусть из исходной точки $\bar{X}^0$, $h_n(\bar{X}^0) = A^0$, получено распределение с параметрами m_1 и σ_1. Будем считать, что количество испытаний и размерность пространства позволяют считать такое распределение нормальным с любой наперед заданной точностью.

Заметим, что значение A^0 также входит в это распределение. В этом распределении, очевидно, всегда найдется такое значение $h_n(\bar{X}^{0j}) = A^{0j}$, что $A^{0j} > A^0$. Приняв точку $\bar{X}^{0j}$ за исходную, получим новое распределение с параметрами m_2 и σ_2.

Ограничимся случаем, когда количество экстремумов $l^{(j)}$, полученное при различных значениях переменной x_j исходных точек $\bar{X}^0$, $\bar{X}^{0j}$ и т. д., есть величина конечная, то есть $l^{(j)} = const$ при $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Если $l^{(j)} = const$, $A^{0j} > A^0$, $q = O(l^{1/2})$, $q = max\{q_1, q_2, \ldots\}$, $l \to \infty$, $n \to \infty$, $l > n$, то $m_2 > m_1$.

В исходной точке X^0 и точке $\bar{X}^{0j}$ имеем:

$$A^0 = h_n(\bar{X}^0) = \sum_{\gamma=1}^{j-qr-1} y_\gamma + \sum_{\gamma=j-qr}^{j+qr} y_\gamma + \sum_{\gamma=j+qr+1}^{n} y_\gamma, \qquad /29/$$

$$A^{0j} = h_n(X_q^{0j}) = \sum_{\gamma=1}^{j-qr-1} y_\gamma + \left[\sum_{\gamma=j-qr}^{j+qr} y_\gamma\right] + \sum_{\gamma=j+qr+1}^{n} y_\gamma, \qquad /30/$$

где в квадратных скобках стоят те слагаемые, которые изменили свои значения.

Рассмотрим попарно экстремальные значения, полученные при изменении x_j $(j = \overline{1,n})$ в исходных точках $\bar{X}^0$ и $\bar{X}_q^{0j}$ соответственно:

$$A_\nu^{0j} = h_n(X_\nu^{0j}) = \sum_{\gamma=1}^{j-qr-1} y_\gamma + \left[\sum_{\gamma=j-qr}^{j+qr} y_\gamma\right] + \ldots + \sum_{\gamma=i-qr}^{i+qr} y_\gamma + \sum_{\gamma=i+qr+1}^{n} y_\gamma,$$

$$A_\nu^{0ji} = h_n(X_\nu^{0ji}) = \sum_{\gamma=1}^{j-qr-1} y_\gamma + \left[\sum_{\gamma=j-qr}^{j+qr} y_\gamma\right] + \ldots + \left[\sum_{\gamma=i-qr}^{i+qr} y_\gamma\right] + \sum_{\gamma=i+qr+1}^{n} y_\gamma, \qquad /31/$$

$$j = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{1, l^{(j)}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда

$$A_\nu^{0ji} - A_\nu^{0j} = \begin{cases} \left[\sum\limits_{\gamma=i-qr}^{i+qr} y_\gamma\right] - \sum\limits_{\gamma=i-qr}^{i+qr} y_\gamma = \Delta_{j\nu} = \Delta, \text{если } i+qr < j < i-qr, \\ \left[\sum\limits_{\gamma=i-qr}^{i+qr} \tilde{y}_\gamma\right] - \left[\sum\limits_{\gamma=i-qr}^{i+qr} y_\gamma\right] = \Delta_{j\nu}, \text{если } i-qr \le j \le i+qr, \end{cases} \qquad /32/$$

где $\tilde{y}_\gamma$ - то слагаемое, которое изменяло свое значение и при получении A_ν^{0j} и A_ν^{0ji}.

Так как A_ν^{oji} и A_ν^{oj} $(j=\overline{1,n})$ распределяется по законам, асимптотически сходящимся к нормальному с параметрами m_2 и m_1 соответственно, то $\Delta_{j\nu}$ также распределяются по тому же закону с первым моментом, равным /приближенно/:

$$m_\Delta = m_2 - m_1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\ell^{(j)}} \Delta_{j\nu} \cdot P_{j\nu}. \qquad /33/$$

Учитывая, что $A^{oj} > A^o$ и /31,32/, будем иметь, что и не более чем $\sum\limits_{\gamma=t-qr}^{t+qr} \ell^{(j)}$ значений $\Delta_{j\nu} < 0$.

Пусть

$$|\bar\Delta| = \max_{\substack{t-qr \le j \le t+qr \\ 1 \le \nu \le \ell^{(j)}}} \{|\Delta_{j\nu}|\}, \quad \ell^o = \max_{t-qr \le j \le t+qr} \{\ell^{(j)}\}. \qquad /34/$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\ell^{(j)}} \Delta_{j\nu} \cdot P_{j\nu} \geq \Delta \sum_{j=t-qr-1}^{t+qr+1} \sum_{\nu=1}^{\ell^{(j)}} P_{j\nu} - \Delta \sum_{j=t-qr}^{t+qr} \sum_{\nu=1}^{\ell^{(j)}} P_{j\nu} \geq \Delta \frac{\ell-\bar\ell}{\ell} - \bar\Delta \frac{\bar\ell}{\ell}, \qquad /35/$$

где

$$\ell = \sum_{j=1}^{n} \ell^{(j)}, \quad \bar\ell = \ell^o(2 \cdot qr + 1). \qquad /36/$$

Учитывая, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\gamma=1}^{\ell^{(j)}} P_{j\nu}$, а также условия теоремы и соотношения /36/, имеем

$$B = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar\ell}{\ell-\bar\ell} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell^o[2O(\ell^{1/2})O(n^{1/3})+1]}{\ell - \ell^o[2O(\ell^{1/2})(n^{1/3})+1]} < 1. \qquad /37/$$

Таким образом, правая часть неравенства /35/ при достаточно большом n будет положительной, а следовательно, $m_2 > m_1$.

На основании теорем I и 2 можно утверждать следующее: если в распределении, полученном из исходной точки $\bar X^o$ и $h_n(\bar X^o) = A^o$, взять точку X^{oi} , в которой выполняется неравенство $h_n(\bar X^o) = A^{oi} > A^o$, далее в распределении, полученном из исходной точки X^{oi} , взять точку X^{oij} , в которой $h_n(\bar X^{oij}) = A^{oij} > A^{oi} > A^o$, и так далее, то вероятность получения "слишком" плохих экстремальных значений с увеличением количества выбранных исходных точек будет уменьшаться, то есть процесс будет сходиться к наибольшему значению функции $h_n(X)(K(X))$. Сходимость указанного способа решения к наибольшему значению функции цели не представляет трудностей, если воспользоваться схемой доказательства, разработанной в работе [IO] .

Предлагаемый способ решения, очевидно, справедлив и для нахождения наименьших значений целевых функций.

Эффективность такого способа решения проверена на ряде задач размещения геометрических объектов [5,7] и на задачах минимизации длины сети, связывающей геометрические объекты.

Проверка показала хорошую сходимость уже при $n > 50$. Кроме того, сходимость процесса резко возрастает, если соотношение $\frac{\sigma}{\sigma_0} > 2$. Сравнение велось с результатами, полученными методом равновероятной выборки начальных точек в комбинации с детерминированным поиском.

Поступила в редакцию 16.9.1969 г.

Литература

1. И.Б.Моцкус. Многоэкстремальные задачи в проектировании. М.,1967.

2. И.Б.Моцкус. О некоторых асимптотических свойствах функций многих переменных. Сб. "Автоматика и вычислительная техника" Рига, 1965, вып. 13.

3. М.Лоэв. Теория вероятностей. М. 1962.

4. С.Уилкс. Математическая статистика. М. 1967.

5. А.Я.Галата, Ю.Г.Стоян, В.М.Черепахин. К вопросу об оптимальном проектировании. УП научно-технич.конференция проф.-преп.состава ХИРЭ. Харьков, 1969.

6. Ю.Г.Стоян, В.М.Черепахин. Алгоритм рационального размещения геометрических объектов. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1969

7. А.Г.Глушко, Ю.Г.Стоян, В.М.Черепахин. Алгоритм рационального размещения плоских фигур сложной формы на материале. Сб. "Вычислительная техника в машиностроении", АН БССР, Минск, 1969, № 10.

8. С.И.Зуховицкий, Л.И.Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. М., 1964.

9. Г.Зонтендейк. Методы возможных направлений. М., 1963.

10. А.И.Никитин. Один алгоритм решения задач нелинейного программирования. Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Киев. 1963.

Работа доложена на Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике /Новосибирск, 1969/.