Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.95.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ С ЛИМИТИРУЮЩИМИ ФАКТОРАМИ /Л - систем/ [1]

Г.И.Колесова, И.А.Полетаев

1. В процессе математического моделирования естественных или искуственных систем одним из первых возникает вопрос о выделении множества или набора существенных /в модели/ переменных. Выбор этого множества определяет структуру модели и те черты функционирования прообраза модели, которые в модели сохраняются.

Как правило, при этом выбранный набор существенных переменных оказывается удачным лишь в сравнительно узкой области их значений, а за ее пределами - теряет смысл.

Для пояснения сказанного воспользуемся примером. В моделях биоценозов, предложенных Вольтерра [2] , число жертв q , уничтожаемое в единицу времени хищниками, положено пропорциональным "числу встреч" хищник - жертва, то есть произведению поголовий хищников x_1 и жертв x_2 и равно

$$q = \alpha x_1 x_2 ,$$

где α - постоянный коэффициент.

При фиксированном значении q , малых значениях x_1 и соответственно больших x_2 предположение теряет смысл, ибо число встреч в этих условиях на одного хищника превышает его потребность в пище. В области малых x_1 и больших x_2 определяющим фактором является физиологическая потребность хищника, а не число доступных жертв.

В этом и в многочисленных подобных случаях возникает необходимость изменять набор существенных переменных в различных областях их значений, используя не одну модель /например, типа Вольтерра/,а совокупность совместных моделей, переходящих одна в другую на границах соседства.

Одним из способов для достижения этого в случае моделей,отображающих баланс веществ и кинетику процессов превращений веществ, является метод "лимитирующих факторов", пригодный для моделирования систем или объектов, включающих в себя "стехиометрические" или "квазихимические" процессы, то есть процессы со строго соблюдаемыми соотношениями долей участвующих веществ.

2. Представим себе систему, состоящую из неделимых элементов, отделенную от внешней среды границей /быть может, воображаемой/ и перечислим все виды различных физических объектов /или компонент/, наличие которых внутри системы представляется необходимым для того типа функционирования системы, которое мы намерены изучать. В раз-

личных по природе естественных системах это могут быть либо вещества /жидкости, газы,растворы/, либо изделия /полуфабрикаты, сырье, оборудование/, либо живые объекты /поголовье популяции, биомасса/ и т.п.

Снабдим каждую компоненту списка именем - индексом i , $i \in \{1,2,...,n\}$, единицей измерения и свяжем ее количество в системе или узле системы с действительным неотрицательным переменным $x_i \geqslant 0$. Совокупность переменных $\{x_i\}$, упорядоченную индексом компонент, назовем вектором состояния системы $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Будем следить за кинетикой компонент, то есть за изменением вектора состояния $\bar{X}(t)$ во времени. Для этого рассмотрим способы, которыми компоненты появляются в системе и исчезают из нее. Каждый из таких способов будем называть процессом и снабдим каждый из них индексом j, $j \in \{1,2,\ldots, N\}$.Основными типами процессов являются процессы производства-потребления, транспорта и распределения из хранилища.

Типичным прообразом процессов типа производства-потребления является химическая реакция на катализаторе и процесс промышленного производства. В процессах этих типов участвуют три рода компонент: входные компоненты /субстрат реакции, сырье/, фондовые компоненты /катализатор, оборудование/ и выходные компоненты / продукт реакции, изделия/. Процесс, при протекании которого количества всех участвующих компонент должны находиться в строго постоянных пропорциях, будем называть стехиометрическим, или процессом с лимитирующим фактором, или коротко Л-процессом.

В зависимости от количеств имеющихся в данный момент компонент Л - процесс может протекать с большей или меньшей интенсивностью. Установим /произвольно/ единицу интенсивности Л - процесса и будем выражать интенсивность ρ_j, $(\rho_j \geqslant 0)$ в числе этих единиц. Пусть при протекании процесса j с единичной интенсивностью потребляется количество α_{ij} каждой i -й компоненты на входе в единицу времени, требуется наличие количества β_{ij} каждой i -й фондовой компоненты и при этом производится количество δ_{ij} каждой i -й выходной компоненты. Пару векторов $\bar{A}_j$, $\bar{D}_j$:

$$\bar{A}_j = (\alpha_{ij}, \beta_{ij}) , \ \bar{D}_j = (\delta_{ij}), \ i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,N\}$$

будем называть сигнатурой Л - процесса j .

Пусть теперь имеются фонды в количестве z_{ij} , а на вход процесса поступают потоки входных компонент, равные v_{ij} . Тогда по каждой из компонент будет обеспечена интенсивность процесса ρ_j , не превышающая величин z_{ij}/β_{ij} и v_{ij}/α_{ij} единиц. Фактически процесс будет, очевидно, протекать с интенсивностью, определяемой наименьшим их этих чисел, то есть интенсивность его будет равна:

$$\rho_j = \min_i \left\{ \frac{v_{ij}}{\alpha_{ij}} , \frac{z_{ij}}{\beta_{ij}} \right\}, \ i \in \{1,\ldots,n\}. \qquad /1/$$

Компонента с индексом i^* , на котором достигается минимум в /I/,называется "узким местом" процесса, или лимитирующим фактором,или коротко - Л-фактором данного процесса.

Фактически потребляемые в единицу времени количества входных компонент ξ_{ij} , фактически загруженные количества фондовых компонент ζ_{ij} и количества выходных компонент η_{ij} определяются соотношениями:

$$\xi_{ij}=\alpha_{ij}\rho_j \ , \ \zeta_{ij}=\beta_{ij}\rho_j \ , \ \eta_{ij}=\delta_{ij}\rho_j . \qquad /2/$$

Избыточная /непотребленная/ часть потока входных компонент и недогруженная часть фондов суть разности: $(\gamma_{ij} - \xi_{ij})$ и $(z_{ij} - \zeta_{ij})$; эти разности неотрицательны и равны нулю для компонент узкого места.

Процессы транспорта, если они протекают "активно" - с затратой энергии и веществ /наподобие, например, внутризаводского транспорта/, могут быть описаны аналогично. При этом в сигнатуру процесса войдет и транспортируемая компонента, в числе входных /в месте отправления/ и в число выходных / в месте назначения/. Компоненты могут перемещаться как внутри системы, так и через ее границы. Однако перемещение компонент может происходить не только посредством Л - - процессов, но и путем диффузии, свободного течения и т.п.

Систему или модель системы, в которую входят Л-процессы, будем называть "системой с лимитирующими факторами" или Л-системой. Для того, чтобы задать модель Л - системы ,необходимо иметь список компонент, сигнатуры всех процессов и схему передачи компонент между процессами /с выхода одного на вход следующего/.

3. Л - система является управляемым объектом. Управление можно формально ввести в модель различными путями, например, положив величины α_{ij} , β_{ij} , δ_{ij} в сигнатурах процессов заданными функциями времени или величинами, задаваемыми для каждого момента времени системой управления. Наиболее естественным и интересным нам представляется следующий.

Введем в сигнатуру каждого процесса неотрицательное действительное переменное $u_j \geqslant 0$ -"команду управления", которая может оказаться Л- фактором процесса наравне со входными и фондовыми компонентами. Величины u_j можно полагать либо заданными функциями времени, либо результатом работы алгоритма управления, на вход которого дается информация о структуре Л - системы и ее текущем состоянии. Посредством управления такого рода, оказывается возможно, например, частично или полностью выключить некоторые процессы и заставить, таким образом, Л - систему демонстрировать специфический род деятельности или активности [3] . Различные активности можно чередовать во времени, совмещать, координировать, добиваясь определенного поведения Л - системы /в частности, оптимального/. Л - систему, в которой управление полностью отсутствует, будем называть свободной.

Наличное в системе количество компоненты x_i можно считать хранящимся в некотором бункере или на складе, из которого она распределяется по потокам на входы процессов потребителей. Распределение компонент между конкурирующими процессами радикально влияет на функционирование системы и определяется системой управления. В случае свободной Л-системы поток v_{ij} компоненты i на вход процесса j можно полагать функцией заданного вида от величины запаса - компоненты x_i и, может быть, других компонент, в общем случае - функцией состояния системы - вектора $\bar{X}(t)$:

$$v_{ij} = F_{ij}(\bar{X}(t)).$$

Так например, поток лучистой энергии, поглощаемый биомассой зеленого растения ε в процессе фотосинтеза, по величине пропорционален плотности потока энергии, падающей на поверхность растения E , и величине поверхности, которую можно приближенно полагать пропорциональной $x^{2/3}$.

$$\varepsilon = \alpha E x^{2/3} \quad \text{, где } x \text{ - биомасса.}$$

В простейших случаях имеет место распределение в "заданных пропорциях", и можно полагать $v_{ij} = c_{ij} x_i$, где $c_{ij} = Const$ /случай поглощения вещества из раствора поверхностью/. Если для всех компонент и всех процессов входные потоки имеют вид $v_{ij} = c_{ij} x_i$, то Л-систему мы будем называть линейной. Для линейных Л - систем представляет интерес матрица A :

$$A = \|a_{ij}\| , \quad \text{где } a_{ij} = \frac{c_{ij}}{\alpha_{ij}} .$$

4. Кинетика компонент Л - систем определяется решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x}_i = \sum_j \delta_{ij} p_j - \sum_j \alpha_{ij} p_j , \quad i \in \{1, \dots, n\}, \; j \in \{1, \dots, N\}. \qquad /3а/$$

Интегрирование системы /3/ требует определения значений $p_j(\bar{X})$ согласно /1/, для каждого момента времени t . Иначе,

$$\dot{\bar{X}} = Q\bar{p}(\bar{X}) , \qquad /3/$$

где $\bar{X}$ - вектор состояния Л-системы, $\dot{\bar{X}}$ -его производная по времени, $\bar{p}$ -вектор интенсивностей, $Q = \|q_{ij}\|$ - матрица, где $q_{ij} = \delta_{ij} - \alpha_{ij}$ -постоянные коэффициенты.

В случае свободной линейной Л-системы подстановка $\bar{p}(\bar{X})$ в /3/даст систему дифференциальных уравнений с линейной однородной правой частью в некоторой области $\varkappa$ пространства $\{\bar{X}\}$ $(\bar{X} \geqslant 0)$:

$$\dot{\bar{X}} = M_\varkappa \bar{X} , \qquad /4/$$

здесь $M_\varkappa = \| p_{ik} \|$ -матрица, элементы которой p_{ik} образуются из элементов q_{ij} матрицы Q и элементов a_{ij} матрицы A следующим образом:

Рассмотрим набор N индексов i_j^* Л- факторов всех процессов для данного значения $\overline{X}(t)$, то есть слово $u_\varkappa$:

$$u_\varkappa=(i^*_1, i^*_2,\dots,i^*_j,\dots, i^*_N),\ i^*_j\in\{1,\dots,n\}. \qquad /5/$$

Выпишем все индексы $j(1)$ тех процессов, для которых $i^*_{j(1)}=1$,/то есть для которых Л-фактором является I-я компонента/. Они образуют множество, которое мы обозначим $J_1=\{j_1(1), j_2(1),\dots,j_{k_1}(1)\}$.Аналогично образуем множества $J_1,J_2,\dots,J_n$ /некоторые из них могут быть пустыми/. Тогда элемент p_{ik} матрицы $M_\varkappa$ равен:

$$p_{ik}=\sum_{j\in J_k} q_{ij}\,a_{kj}\,. \qquad /6/$$

Матрица $M_\varkappa$ остается постоянной в области $\varkappa$ значений $\overline{X}$, в которой остается неизменным слово $u_\varkappa$ /5/, то есть набор индексов Л - - факторов всех процессов (i^*_j) . При изменении хотя бы одного i^*_j /вследствие изменения $\overline{X}(t)$ / меняется $u_\varkappa$ и $M_\varkappa$ в /4/. Вектор состояния $\overline{X}(t)$ при этом переходит в новую область $\varkappa_1$, причем сохраняется непрерывность как по $\overline{X}(t)$, так по $\dot{\overline{X}}(t)$.

Л-система оказывается, таким образом, как бы набором моделей. Каждая модель описывается системой вида /4/ со своим значением матрицы $M_\varkappa$ и соответствует определенной области значений вектора состояния $\{\overline{X}\}_\varkappa$, характеризуемой словом $u_\varkappa$ /5/. Таким образом, для каждой области - модели имеется свой набор существенных переменных. Модели непосредственно граничат друг с другом в пространстве $\{\overline{X}\}$, и переход от одной области - модели к другой осуществляется либо спонтанно, либо посредством управления в силу /I/.

Естественно, возникает вопрос о числе K областей $\varkappa_1,\varkappa_2,\dots$ для Л-системы с n компонентами и N процессами, который мы и рассмотрим.

5. Рассмотрим слова $u_1,u_2,\dots,u_\nu$ /5/. Для n компонент и N процессов всего возможно составить $u_\varkappa$ различных слов в числе $\nu=n^N$. Однако если задана матрица A , то из этого числа могут одновременно реализоваться для данной Л-системы лишь $K<\nu$. Назовем словарем T_A данной Л-системы с матрицей A полный набор допустимых слов, каждое из которых соответствует реальной области $\varkappa\sim\{\overline{X}\}_\varkappa$.

Нас интересует верхняя оценка длины K словаря T_A для всех допустимых матриц A .

Область $\varkappa$ существует, и соответствующее ей слово $u_\varkappa$, $u_\varkappa = (i_1,\dots,i_N)$, входит в словарь T_A тогда и только тогда, когда существует положительный вектор $\overline{X}=(x_1,\dots,x_n)$, /внутренний для области $\varkappa$ /, такой, что выполняются строгие неравенства:

$$a_{i_j j}x_{i_j}<\min_{i\neq i_j}\{a_{ij}\,x_i\},\ \text{где}\ i_j\in u_\varkappa\,, \qquad /7/$$

$$a_{ij}>0,\ x_i>0,\ i\in\{1,\dots,n\},\ j\in\{1,\dots,N\}.$$

Два слова - u_1 и v_2 , если $u_1\neq v_2$, определяют два непересекающихся множества векторов $\{\overline{X}\}_1$ и $\{\overline{X}\}_2$, удовлетворяющих /7/.

Образуем два слова $u_1=(i_1^{(1)}, i_2^{(1)},\dots, i_j^{(1)},\dots, i_N^{(1)})$ и $V_2=(i_1^{(2)},\dots,i_j^{(2)},\dots,i_N^{(2)})$ посредством следующей процедуры. Выделим некоторое подмножество разрядов $(j_\alpha, j_\beta,\dots, j_\omega)$ и упорядочим их произвольным образом, например: $(j_1, j_2,\dots,j_k), k\leq N, j_s\in\{1,\dots,N\}$. Выпишем две последовательности k попарно различных индексов i, полученных одна из другой циклической перестановкой:

$$\bar{l}=(l_{j_1}, l_{j_2},\dots, l_{j_k}), \bar{m}=(m_{j_1}, m_{j_2},\dots, m_{j_k}), m,l\in\{1,\dots,n\}$$

$$m_{j_a}\neq m_{j_b}, l_{j_a}\neq l_{j_b} \quad \text{при } a\neq b,$$

при этом $l_{j_1}=m_{j_2},\ l_{j_2}=m_{j_3},\dots, l_{j_{k-1}}=m_{j_k}, l_{j_k}=m_{j_1}$. Подставим теперь последовательности $\bar{l}$ и $\bar{m}$ соответственно в слова u_1 и V_2 в разряды, соответствующие индексам j_s. Остальные разряды слов u_1 и V_2 заполним произвольным образом, быть может, различным для различных слов. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА. Если существует $\bar{X}_u$, удовлетворяющий /7/ при $i_j^{(1)}\in u_1$, $j\in\{1,\dots,N\}$, то не существует такого $\bar{Y}_v$ $(\bar{Y}_v=\bar{X}_u)$, который удовлетворял бы /7/ при $i_j^{(2)}\in V_2$, $j\in\{1,\dots,N\}$.

Иначе: оба слова – u_1 и V_2 не могут одновременно войти в один и тот же словарь T_A.

Предположим противное. Тогда для $\bar{X}_u$ и $\bar{Y}_v$ $(\bar{X}_u\neq\bar{Y}_v)$ должны совместно выполняться следующие неравенства, вытекающие из /7/: /для упрощения записи положим: $j_1=1; j_2=2,\dots; j_k=k$ /:

$$\begin{aligned} &a_{i_2 1}y_{i_2} < a_{i_1 1}y_{i_1}; && a_{i_1 1}x_{i_1} < a_{i_2 1}x_{i_2};\\ &a_{i_3 2}y_{i_3} < a_{i_2 2}y_{i_2}; && a_{i_2 2}x_{i_2} < a_{i_3 2}x_{i_3};\\ &\dots && \dots\\ &a_{i_1 k}y_{i_1} < a_{i_k k}y_{i_k}; && a_{i_k k}x_{i_k} < a_{i_1 k}x_{i_1}; \end{aligned} \qquad /8/$$

Из первой строки неравенства /8/ следует:

$$\frac{y_{i_2}}{y_{i_1}} < \frac{a_{i_1 1}}{a_{i_2 1}} < \frac{x_{i_2}}{x_{i_1}}, \qquad /9/$$

из второй:

$$\frac{y_{i_3}}{y_{i_2}} < \frac{a_{i_2 2}}{a_{i_3 2}} < \frac{x_{i_3}}{x_{i_2}},\dots$$

и из последней:

$$\frac{y_{i_1}}{y_{i_k}} < \frac{a_{i_k k}}{a_{i_1 k}} < \frac{x_{i_1}}{x_{i_k}}.$$

Перемножая отдельно левые и правые части последних неравенств, получаем противоречие, которое и доказывает теорему $(1<1)$.

6. Рассмотрим набор из n целых неотрицательных чисел $\Omega=(k_1,\dots,k_n)$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = N,\quad k_i\in\{0,1,\dots,N\}. \qquad /10/$$

Каждое число k_i из набора Ω равно числу процессов Л-системы, которые в данной области $\varkappa$, отвечающей слову $u_\varkappa$, лимитированы компонентой i. Очевидно, что

$$k_i = \sum_{\ell=1}^{N} \delta_{i\ell}, \text{ где } \delta_{i\ell} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = i^*_\ell, \\ 0, \text{ если } i \neq i^*_\ell. \end{cases} \qquad /11/$$

где i^*_ℓ -индекс Л-фактора ℓ -го процесса.

ТЕОРЕМА 2. В словарь T_A области $\varkappa$ входит не более чем одно слово с заданным значением набора Ω .

В самом деле, пусть два различных слова u и v имеют одно и то же значение набора Ω . Тогда слово v может быть получено из слова u циклической перестановкой индексов i^*_j длины $m \leq n-1$.

В силу теоремы I оба слова u и v не могут одновременно входить в состав словаря T_A .

Поскольку ограничение, накладываемое на выбор слов для словаря T_A теоремой I, является единственным, то оценка длины словаря K сводится, таким образом, к подсчету числа возможных попарно различных наборов неотрицательных целых чисел Ω , для которых выполняется /10/. Известно[4], что число таких наборов равно числу сочетаний с повторениями из n элементов по N . Таким образом,

$$K \leq C^N_{N+n-1} = C^{n-1}_{N+n-1} . \qquad /12/$$

Верхняя оценка неулучшаема, то есть существуют неотрицательные матрицы A порядка $(n \times N)$, для которых $K = C^N_{N+n-1}$.

Примером такой матрицы может служить матрица A , элементы которой удовлетворяют неравенствам: $a_{ij} > 0$,

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} < \frac{a_{12}}{a_{22}} < \ldots < \frac{a_{1N}}{a_{2N}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a_{i1}}{a_{k1}} < \frac{a_{i2}}{a_{k2}} < \ldots < \frac{a_{iN}}{a_{kN}},\ i<k,\ i,k \in \{1,\ldots,n\},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{a_{(n-1)1}}{a_{n1}} < \frac{a_{(n-1)2}}{a_{n2}} < \ldots < \frac{a_{(n-1)N}}{a_{nN}} .$$

Для такой матрицы произвольное слово $u_\varkappa = (i_1,\ldots,i_N) \in T_A$,если $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_N$, /таких слов C^N_{N+n-1} /.

Для доказательства этого достаточно найти по крайней мере один неотрицательный $\overline{X} = (x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющий /7/.

Пусть в слове $u_\varkappa$:

$$i_1 = i_2 = \ldots = i_{\ell_1} = q_1 < i_{\ell_1+1},$$
$$i_{\ell_1+1} = i_{\ell_1+2} = \ldots = i_{\ell_2} = q_2 < i_{\ell_2+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$i_{\ell_{s-1}+1} = i_{\ell_{s-1}+2} = \ldots = i_N = q_s .$$

Если $s = 1$, то достаточно положить $x_{q_s} = 0$, остальные компоненты равными I.

Пусть $s > 1$. Определим $x_1,\ldots,x_n$ из следующих неравенств:

$$\frac{a_{q_1\ell_1}}{a_{q_2\ell_1}} < \frac{x_{q_2}}{x_{q_1}} < \frac{a_{q_1(\ell_1+1)}}{a_{q_2(\ell_1+1)}}, \qquad x_m > \frac{\max\limits_{ij} a_{ij}}{\min\limits_{ij} a_{ij}}$$

$$\frac{a_{q_2\ell_2}}{a_{q_3\ell_2}} < \frac{x_{q_3}}{x_{q_2}} < \frac{a_{q_2(\ell_2+1)}}{a_{q_3(\ell_2+1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \text{если } m \neq q_1, q_2, \ldots, q_s$$

$$\frac{a_{q_{(s-1)}l(s-1)}}{a_{q_s l(s-1)}} < \frac{x_{q_s}}{x_{q(s-1)}} < \frac{a_{q_{(s-1)}(l_{(s-1)}+1)}}{a_{q_s(l_{(s-1)}+1)}} ,$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для так построенного $\overline{X}=(x_1,\ldots,x_n)$ выполняются неравенства /7/.

Следующим вопросом,подлежащим выяснению, является вопрос о числе различных допустимых словарей для Л-системы с n компонентами и N процессами. Вопрос этот не решен и лишь прямым подсчетом установлено, что для $n=3$ и $N=3$ это число равно 108.

7. В заключение коснемся вкратце вопроса о соотношении Л-систем и линейных моделей экономики Леонтьева [5].Опуская строгие обоснования и подробности, укажем, что модели Леонтьева с матрицей разномерности $(n\times n)$ могут быть сопоставлены с линейными Л-системами с n компонентами и n процессами посредством дробления шага модели Леонтьева и перехода к пределу.

Пусть имеем модель Леонтьева, заданную квадратной неотрицательной технологической матрицей $A=\|\alpha_{ij}\|_{n\times n}$. Время дискретно: $t\in\{0,1,2,\ldots\}$ и состояние модели в момент времени t определяется n-мерным неотрицательным вектором $\overline{X}(t)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Тогда состояние ее в следующий момент $(t+1)$ определяется из равенства:

$$A\overline{X}(t+1)=\overline{X}(t). \qquad /13/$$

Пусть $\det A\neq 0$ и существует матрица $B=A^{-1}$, обратная A ,тогда $\overline{X}(t+1)=B\overline{X}(t)$, соответственно $\overline{X}(t+2)=B^2\overline{X}(t)$ и вообще:

$$\overline{X}(t+k)=B^k\overline{X}(t). \qquad /14/$$

Покажем, что можно построить дифференциальный оператор D такой, что

$$\dot{\overline{X}}(t)=D\overline{X}(t), \qquad /15/$$

причем траектория системы /15/ будет проходить через точки последовательности /14/.

Пусть спектр матрицы B есть $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n),\lambda_l\neq\lambda_m\,/\,l\neq m$. Представим матрицу B в виде [6] :

$$B=T\Lambda T^{-1}, \qquad /16/$$

где Λ - диагональная матрица,

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n\end{pmatrix}, \qquad /17/$$

T - матрица, строки которой суть собственные векторы матрицы B , T^{-1} - ей обратная, столбцы которой есть система векторов, сопряженная T , то есть собственные векторы матрицы $\widehat{B}$, транспортированной B ; строки T и столбцы T^{-1} упорядочены индексами соответствующих характеристических чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ в матрице Λ .

Тогда нетрудно заметить, что

$$B^2=T\Lambda^2T^{-1}$$

и вообще

$$B^k = T\Lambda^k T^{-1} = TMT^{-1} = C.$$

Очевидно, что для матрицы C справедливо:

$$C^{1/k} = TM^{1/k}T^{-1} = T\Lambda T^{-1} = B.$$

Для того, чтобы обеспечить однозначность результатта извелечения корня, условимся сохранять лишь корень с главным значением аргумента комплексного числа.

Рассмотрим матрицу $B^{\omega} = T\Lambda^{\omega}T^{-1}$, где ω - действительное положительное число, а

$$\Lambda^{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\omega} & & & 0 \\ & \lambda_2^{\omega} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^{\omega} \end{pmatrix}.$$

Будем считать, аналогично /14/, что

$$\bar{X}(t+\omega) = B^{\omega}\bar{X}(t) = T\Lambda^{\omega}T^{-1}\bar{X}(t). \qquad /18/$$

Заметим, что при $\omega = 1,2,\ldots,k$, $\bar{X}(t+k) = B^k\bar{X}(t)$, как в /14/.

Разложим Λ^{ω} в ряд по ω :

$$\lambda_i^{\omega} = \lambda_i^0 + (\omega \ln \lambda_i)\lambda_i^0 + \omega^2(\ln \lambda_i)^2\lambda_i^0 + \ldots = 1 + \omega \ln \lambda_i + \ldots,$$

откуда

$$\Lambda^{\omega} = E + \omega\Gamma + \ldots,$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & & 0 \\ & \ln \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ln \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Здесь мы снова ограничиваемся значениями $\ln \lambda_i$ лишь с главными значениями аргумента, как и выше. Тогда

$$\bar{X}(t+\omega) = TET^{-1}\bar{X}(t) + \omega T\Gamma T^{-1}\bar{X}(t) + \ldots = \bar{X}(t) + \omega D\bar{X}(t) + \ldots,$$

откуда

$$\frac{\bar{X}(t+\omega) - \bar{X}(t)}{\omega} = D\bar{X}(t), \quad D = T\Gamma T^{-1}.$$

Пусть теперь ω стремится к нулю $(\omega \to 0)$, тогда,

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\bar{X}(t+\omega) - \bar{X}(t)}{\omega} = \frac{d}{dt}\bar{X}(t) = D\bar{X}(t), \qquad /19/$$

где время t, в отличие от /14/, изменяется непрерывно.

Из изложенного следует, в частности, что если имеет место /15/:

$$\dot{\bar{X}}(t) = D\bar{X}(t),$$

где D - постоянная невырожденная матрица, то значение интеграла системы /15/ для конечного отрезка времени τ и начального значения $\bar{X}(0)$ дается выражением:

$$\bar{X}(\tau) = TLT^{-1}\bar{X}(0),$$

где T и T^{-1} совпадают с соответствующими матрицами в представлении матрицы D : $D=T\Gamma T^{-1}$, а матрица $L=\| e^{\gamma_{ij}} \|$, где γ_{ij} суть элементы матрицы $\Gamma=\| \gamma_{ij} \|$.

Поскольку система дифференциальных уравнений для линейной Л-системы имеет вид, аналогичный /15/, а последний получен путем редукции конечного оператора модели Леонтьева к дифференциальному оператору D, то для заданной модели Леонтьева может быть построена линейная Л- система, траектории которой проходят через точки $\bar{X}(t)$, $\bar{X}(t+1),\ldots$ модели Леонтьева.

Из большого числа вопросов, подлежащих дальнейшему исследованию в этой области, укажем лишь на один, представляющий, по нашему мнению, особый интерес: сопоставление Л-систем с моделями Леонтьева открывает путь к перенесению на Л-системы понятий равновесия, равновесных цен и оптимальных траекторий и, следовательно, позволит оценить в некотором смысле "удаленность" режима развития естественной Л-системы /организма, биогеоценоза/ от оптимального режима и даже, быть может, наметить пути "оптимизирующих" мероприятий для моделей естественных объектов, описанных как свободная линейная Л-система.

Аннотация

Приводится описание систем с "лимитирующим фактором" /Л-систем/ [1]. Ставится и решается задача о подсчете числа областей Л-системы с n компонентами и N процессами. Указана связь между Л-системами с линейными моделями Леонтьева [5].

Поступила в редакцию 4.II.1969 г.

Литература

1.Ю.И.Гильдерман, К.Н.Кудрина, И.А.Полетаев. Модели Л-систем, в сб.: "Исследования по киберентике" Сов.радио, М.,1970.

2.V. Volterra, U.d'Ancona. Les associations biologiques au point de vue mathematique. Paris, 1935.

3.И.А.Полетаев О математических моделях элементарных процессов в биогеоценозах, в сб.: "Проблемы Кибернетики" вып.16.Наука, 1966.

4.Н.Я.Виленкин. Комбинаторика. Наука, М., 1969.

5.Д.Гейл.,в сб., "Линейные неравенства и смежные вопросы" Замкнутая модель производства. ИИЛ., М., 1959.

6.К.Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Гиз. Физ. мат. лит., М., 1961.