Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.I.

К ГИПОТЕЗЕ ВАН ДЕР ВАРДЕНА О ПЕРМАНЕНТЕ ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Г.А.Векишев, А.Е.Иванов

Известная гипотеза Ван дер Вардена утверждает, что если A - произвольная дважды стохастическая матрица порядка n, то ее перманент удовлетворяет неравенству

$$per(A) \geq \frac{n!}{n^n}, \qquad /1/$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$A = J_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Частичное решение проблемы Ван дер Вардена было дано Маркусом и Ньюманом [I], рассмотревшими класс симметрических положительно полуопределенных дважды стохастических матриц.

В настоящей заметке доказывается, что если A -произвольная дважды стохастическая матрица, а H - дважды стохастическая квазидиагональная матрица вида $H = 1 \dot{+} J_{n-1}$, то перманент матрицы HA /или AH / удовлетворяет неравенству /I/. Иначе говоря, перманент любой дважды стохастической матрицы порядка n, содержащей $n-1$ одинаковых строк /столбцов/, удовлетворяет предположению Ван дер Вардена.

Пусть $A = (a_{ik})_1^n$ - произвольная дважды стохастическая матрица. Умножая A на $H = 1 \dot{+} J_{n-1}$ и разлагая $per(AH)$ по элементам I-го столбца, получим

$$per(AH) = \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} a_{k1} \prod_{i \neq k} (1 - a_{i1}) \qquad /2/$$

Утверждение Ван дер Вардена для матриц AH будет доказано, если мы покажем, что минимум выражения /2/ на симплексе

$\Delta : \sum_{k=1}^{n} a_{k1} = 1, \; a_{k1} \geq 0,$ равен $\frac{n!}{n^n}$ и достигается в единственной точке $\left\langle \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right\rangle$.

Пусть p_r - среднее членов r-й элементарной симметрической функции переменных $x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим функцию $f_n(x_1, \dots, x_n) = p_{n-1} - p_n$ в области

$$\Omega : \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = n-1, \\ 0 \leq x_i \leq 1. \end{cases}$$

Покажем, что

$$\min_{\Omega} f_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}, \qquad /3/$$

причем равенство достигается в единственной точке

$$\bar{x} = \left\langle \frac{n-1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\right\rangle \in \Omega .$$

Нетрудно убедиться, что внутренние стационарные точки функции $f_n(x_1,\ldots,x_n)$, принадлежащие области Ω, удовлетворяют системе условий:

$$\begin{cases} (x_n - x_i)\left\{ f_n(x_1,\ldots,x_n) - x_1\ldots x_n \dfrac{x_i + x_n}{n x_i x_n}\right\} = 0, \\ \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n-1, \\ x_1 + \ldots + x_n = n-1, \\ 0 < x_j < 1,\ j = 1,\ldots,n. \end{cases} \qquad /4/$$

Очевидно точка $\bar{x} = \langle \frac{n-1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\rangle$ удовлетворяет /4/.

Предположим, что точка $\tilde{x} = \langle \tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\rangle$ также удовлетворяет /4/. Пусть при этом $i_1,\ldots,i_t (0\leq t\leq n-1)$ - номера уравнений в /4/, в которых круглая скобка равна 0, а $j_1,\ldots,j_s(0\leq s\leq n-1)$- номера уравнений, в которых фигурная скобка равна 0.

Тогда

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_{i_1} = \ldots = \tilde{x}_{i_t} = \tilde{x}_n \equiv a, \\ &\tilde{x}_{j_1} = \ldots = \tilde{x}_{j_s} \equiv b. \end{aligned} \qquad /5/$$

Очевидно, $t+s \geq n-1$. При $t+s > n-1$ имеем $\tilde{x} = \bar{x}$. Поэтому считеем $t+s = n-1$. Покажем, что $t = n-1$. Допустим, что $t < n-1$. Подставляя координаты точки /5/ в /4/, напишем систему 2-х уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} a(t+1) + b(n-t-1) = n-1, \\ a(n-t-2) + bt - nab = 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем два решения:

$$a_1 = \frac{n-1}{n} - \sqrt{\frac{n-t-1}{t+1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{n},\quad b_1 = \frac{n-1}{n} + \sqrt{\frac{t+1}{n-t-1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{n},$$

$$a_2 = \frac{n-1}{n} + \sqrt{\frac{n-t-1}{t+1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{n},\quad b_2 = \frac{n-1}{n} - \sqrt{\frac{t+1}{n-t-1}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{n}.$$

Из условия $b_1 < 1$ следует $t < 0$, а из условия $a_2 < 1$ вытекает, что $t > n-2$. Следовательно, $t = n-1$. Мы показали, таким образом, что функция $f_n = p_{n-1} - p_n$ имеет единственную внутреннюю стационарную точку $\bar{x} = \langle \frac{n-1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\rangle$ в области Ω. Исследуем теперь граничные значения f_n в области Ω. С точностью до порядка координат граничная точка имеет вид $x^0 = \langle \underbrace{1,\ldots,1}_{k}, x^0_{k+1},\ldots,x^0_n\rangle$, где $1\leq k\leq n-1,\ \sum_{j=k+1}^{n} x^0_j = n-k-1$. Нетрудно понять, что

$$f_n(\underbrace{1,\ldots,1}_{k}, x^0_{k+1},\ldots,x^0_n) = \frac{n-k}{n} f_{n-k}(x^0_{k+1},\ldots,x^0_n).$$

При $n = 2$ формула /3/, очевидно, справедлива. Поэтому по индукции можно считать, что

$$\frac{n-k}{n} f_{n-k}(x^0_{k+1}, \ldots, x^0_n) \geqslant \frac{n-k}{n} \frac{(n-k-1)^{n-k-1}}{(n-k)^{n-k}} = \frac{1}{n}\left(\frac{n-k-1}{n-k}\right)^{n-k-1}.$$

В силу того, что последовательность $\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right\}$ монотонно убывает, имеем

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n-k-1}{n-k}\right)^{n-k-1} > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Таким образом,

$$f_n(x^0) > \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = f_n\left(\frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right).$$

Тем самым справедливость /3/ доказана.

Вернемся теперь к выражению для $per(AH)$. С этой целью рассмотрим функцию

$$\Phi_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (1 - x_k) \prod_{i \neq k} x_i$$

в области Ω.

Имеем

$$\Phi_n(x_1, \ldots, x_n) = n(p_{n-1} - p_n) = n f_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Следовательно, по доказенному

$$\min_{\Omega} \Phi_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1},$$

причем этот минимум достигается в точке $\left\langle \frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n} \right\rangle$ области Ω и только в ней. Но тогда ясно, что минимум функции /2/ на симплексе Δ равен $\frac{n!}{n^n}$, причем точка $\left\langle \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right\rangle \in \Delta$, в которой он достигается, единственна.

Поступила в редакцию 26.9.1969г.

Литература

1. M. Marens, M. Newman, Inequalities for the permanent function. Annals of Math., N1, 1962, 47–62.