Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.3:51:62-50

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЯ ГРУППАМИ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Г.К.Захаров /г.Горький/

Рассматривается задача оптимального управления неавтономным объектом, поведение которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными по t правыми частями, а управление осущетсвляется с помощью двух или нескольких различных групп управлений, каждая из которых обладает присущей только ей одной функциональной спецификой, что непозволяет объединить их в один класс.

Предлагаемая в статье методика получения необходимых условий оптимальности пригодна для решения широкого класса оптимальных задач, когда система описывается интегральными, интегро-дифференциальными уравнениями, уравнениями с запаздыванием и др. с ограничениями различных типов.

I. Постановка задачи

Пусть уравнение движения управляемого объекта имеет вид /в векторной форме/:

$$\dot{x}=f(x,u,v,t),\quad x(t_0)=x_0\in E^n, \qquad /1/$$

где функция f и производные Фреше f'_x и f'_v непрерывны по аргументам x, u, v и кусочно-непрерывны по t, причем в точках разрыва непрерывны слева.

Управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$, как и в [1], принадлежат независимым классам управлений с различной функциональной структурой. Класс функций $u(t)$ /будем обозначать его через D / всегда допускает игольчатые вариации и может состоять из всех измеримых на отрезке $[t_0, t_1]$ функций со значениями из бикомпакта $U\subset E^r$. Класс управлений $v(t)$ -класс G, напротив, не допускает игольчатых вариаций и состоит из кусочно-непрерывных функций с ограниченным снизу интервалом непрерывности, заданных на отрезке $[t_0, t_1]$ x/, со значениями из выпуклого бикомпакта $V\subset E^m$. Примером класса G может служить множество релейных функций с ограниченным снизу интервалом постоянства. Частный случай векторов /параметров/ рассматривался в [2] - [4].

Критерием качества управления служит минимизируемый функционал

$$J_0[u,v,t_1]=\int_{t_0}^{t_1} g_0(x,u,v,t)\,dt+F_0(x(t_1),t_1). \qquad /2/$$

x/ В точках разрыва функции $v(t)$ предлагаются непрерывными слева.

Относительно функции g_0 предполагается, что она удовлетворяет тем же условиям, что и правые части /1/, а функция F_0 имеет непрерывные производные по x и по t.

При этом в конечный момент времени t_1 требуется выполнение соотношений:

$$\begin{cases} \mathcal{J}_j[u,v,t_1] \leq 0, & j = \overline{1,p}, \\ \mathcal{J}_j[u,v,t_1] = 0, & j = \overline{p+1,p+q}, \quad (q \leq n), \end{cases}$$

где $\mathcal{J}_j$, $j = \overline{1,p+q}$, -функционалы типа /2/.

Получим необходимые условия оптимальности для управлений $u(t)$, $v(t)$ и соответствующего им оптимального момента времени t_1.

2. Вариации управлений

Обозначим через $\tilde{u}_\varepsilon(t)$ и $\tilde{v}_\varepsilon(t)$ варьированные управления из классов D и G, соответственно, заданные на отрезке $[t_0, t_1 + \varepsilon|\alpha|]$, где α -любое действительное число, следующим образом:

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_\varepsilon(t), & t_0 \leq t \leq t_1, \\ u(t-\varepsilon|\alpha|) & t_1 < t \leq t_1 + \varepsilon|\alpha|, \end{cases}$$

$$\tilde{v}_\varepsilon(t) = \begin{cases} v_\varepsilon(t), & t_0 \leq t \leq t_1, \\ v_\varepsilon(t_1), & t_1 \leq t \leq t_1 + \varepsilon|\alpha|. \end{cases}$$

Управления $u_\varepsilon(t)$ определим, как и в [2], полагая

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_{ki} \in U, & t \in \ell_{ki}, \\ u(t), & t \bar{\in} \bigcup\limits_{k,i} \ell_{ki}, \end{cases}$$

где ℓ_{ki} -полуинтервал: $\tau_i - \varepsilon \sum\limits_{\nu=1}^{k} \alpha_{\nu i} < t \leq \tau_i - \varepsilon \sum\limits_{\nu=1}^{k-1} \alpha_{\nu i}$, $(1 \leq k \leq \nu_i)$;

$\tau_1, \ldots, \tau_s$ -набор различных точек Лебега из интервала (t_0, t_1) и $\alpha_{\nu i} \geq 0$, $(\nu = 1, \ldots, \nu_i;\ i = 1, \ldots, s)$. Очевидно, что при достаточно малом ε будет выполнено также неравенство $\max\limits_i \tau_i \leq t_1 - \varepsilon|\alpha|$.

В качестве управления $v_\varepsilon(t)$ возьмем допустимую на отрезке $[t_0, t_1]$ функцию вида: $v_\varepsilon(t) = v(t) + \varepsilon \delta v(t)$.

Траекторию системы /1/, соответствующую управлениям $\tilde{u}_\varepsilon(t)$ и $\tilde{v}_\varepsilon(t)$, будем обозначать через $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ и через $x_\varepsilon(t)$ -траекторию, соответствующую управлениям $u_\varepsilon(t)$ и $v_\varepsilon(t)$. Заметим, что в силу теоремы Каратеодори о непрерывной зависимости решения дифференциального управления от параметров в случае измеримых по t правых частей /см. [5]/, варьированные траектории $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ и $x_\varepsilon(t)$ равномерно сходятся к оптимальной траектории $x(t)$ при $\varepsilon \to 0$.

3. Формула для приращения функционалов

Приращения $\Delta \mathcal{J}_j = \mathcal{J}_j[\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon, t_1 + \varepsilon\alpha] - \mathcal{J}_j[u,v,t]$, $j = \overline{0,p+q}$ которые вычисляются с помощью линеаризованного дифференциального уравнения относительно приращения траектории $\Delta x(t) = x_\varepsilon(t) - x(t)$ и вспомогательных сопряженных уравнений, выражаются формулой:

$$\Delta \mathcal{J}_j = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta_{u,v} g_j - (\Delta_{u,v} f, \varphi^j)]\, dt + \operatorname{sign}\alpha \int_{t_1 - \varepsilon|\alpha|}^{t_1} [(f, \varphi^j) - g_j]\, dt -$$

$$- \varepsilon\alpha \frac{\partial F_j(x(t_1), t_1)}{\partial t} + o(\varepsilon), \quad j = \overline{0, p+q}. \qquad /3/$$

Здесь $\Delta_{u,v} y = y(x, u_\varepsilon, v_\varepsilon, t) - y(x, u, v, t)$;

φ^j -решения соответствующих сопряженных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot\varphi^j = -A_f^* \varphi^j + \nabla_x g_j, \\ \varphi^j(t_1) = -\nabla_x F_j(x(t_1), t_1), \; j = \overline{0, p+q}, \end{cases} \qquad /4/$$

где A_f -производная Фреше функции f по x / в нашем случае - матрица частных производных/.

4. Вывод необходимых условий оптимальности

ЛЕММА I. Пусть $\chi(t)$ -измеримая ограниченная функция в окрестности точки $t = T$. Тогда для любого действительного числа α существует последовательность $\{\varepsilon_k(\alpha) \to 0\}$ при $k \to \infty$ такая, что

$$\lim \frac{1}{|\alpha|\varepsilon_k(\alpha)} \int_{T - |\alpha|\varepsilon_k(\alpha)}^{T} \chi(t)\, dt$$

существует и не зависит от α.

Для доказательства леммы достаточно потребовать, чтобы последовательность $\{\varepsilon_k(\alpha)\}$ удовлетворяла при любом действительном α условию $|\alpha|\varepsilon_k(\alpha) = \eta_k$ где $\left\{\begin{matrix}\eta_k \to 0 \\ k \to \infty\end{matrix}\right\}$ -независящая от α, фиксированная последовательность, для которой выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\eta_k} \int_{T-\eta_k}^{T} \chi(t)\, dt = c.$$

Существование такой последовательности $\{\eta_k\}$ вытекает из принципа Больцана-Вейерштрасса.

Следовательно, по лемме I существует последовательность $\left\{\begin{matrix}\varepsilon_k \to 0 \\ k \to \infty\end{matrix}\right\}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\alpha|\varepsilon_k} \int_{t_1 - |\alpha|\varepsilon_k}^{t_1} [(f, \varphi^j) - g_j]\, dt = \beta^j, \; j = \overline{0, p+q}. \qquad /5/$$

В пространстве R^{p+q+1} которое будем называть пространством вариаций функционалов /минимизируемого и ограничивающих/, рассмотрим

множество K , образуемое векторами $a(\delta\mathcal{I}_j,\ j=\overline{0,p+q})$.
Компоненты вектора a опрделим следующим образом:

$$\delta\mathcal{I}_j=\sum_i\sum_k\alpha_{ki}[\delta^k_u q_j(\tau_i)-(\delta^k_u f(\tau_i),\varphi^j(\tau_i))]+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_\sigma\frac{\partial q_j}{\partial v^\sigma}\delta v^\sigma-\Big(\sum_\sigma\frac{\partial f}{\partial v^\sigma}\delta v^\sigma,\varphi^j\Big)\Big]dt-$$
$$-\alpha\,\frac{\partial F_j(x(t_1),t_1)}{\partial t}+\alpha\beta^j,\quad j=\overline{0,p+q},\qquad /6/$$

где $\delta^k_u\,y(\tau_i)=y(x(\tau_i),u_{ki},v(\tau_i),\tau_i)-y(x(\tau_i),u(\tau_i),v(\tau_i),\tau_i)$;
β^j - постоянные, определяемые условием /5/.

Нетрудно заметить, что если, поделив обе части /4/ на ε , перейти затем к пределу по подпоследовательности $\{\varepsilon_k(\alpha)\}$ при $k\to\infty$, то получим равенство

$$\delta\mathcal{I}_j=\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta\mathcal{I}_j}{\varepsilon_k},\quad j=\overline{0,p+q},$$

или, что то же самое, $\Delta\mathcal{I}_j=\delta\mathcal{I}_j\,\varepsilon_k+O(\varepsilon_k)$, $j=\overline{0,p+q}$,

Из равенства /6/ видно, что компоненты вектора a линейны по α_{ki}, α и δv . Следовательно, множество K есть выпуклый конус в пространстве R^{p+q+1} при всевозможных α_{ki} , α и допустимых δv . Далее, в пространстве вариаций функционалов построим выпуклый угол $L=\{e_j<0,\ j=\overline{0,p};e_j=0,j=\overline{p+1,p+q}\}$, где e_j -орт, соответствующий вариации $\delta\mathcal{I}_j$.

Оказывается, что справедлива следующая теорема об отделимости выпуклых конусов.

ТЕОРЕМА I. В пространстве R^{p+q+1} существует гиперплоскость, определяемая нетривиальным набором $\{\lambda_j\}$, $j=\overline{0,p+q}$, разделяющая конус K и угол L , т.е. имеет место неравенство:

$$\sum_j\lambda_j\,\delta\mathcal{I}_j\geqslant 0,\qquad /7/$$

где $\lambda_j\geqslant 0$, $j=\overline{0,p}$; λ_j, $j=\overline{p+1,p+q}$, могут иметь любой знак, но $\sum_j|\lambda_j|>0$.

Подставляя в /7/ выражение для $\delta\mathcal{I}_j$ в форме /6/ и обозначив через ψ линейную комбинацию $\sum_j\lambda_j\varphi^j$, получим неравенство

$$\sum_i\sum_k\alpha_{ki}[\sum_j\lambda_j\delta^k_u q_j(\tau_i)-(\delta^k_u f(\tau_i),\psi(\tau_i))]+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\Big\{\sum_j\lambda_j\Big[\sum_\sigma\frac{\partial q_j}{\partial v^\sigma}\delta v^\sigma\Big]-\Big(\sum_\sigma\frac{\partial f}{\partial v^\sigma}\delta v^\sigma,\psi\Big)\Big\}dt-$$
$$-\alpha\sum_j\lambda_j\,\frac{\partial F_j(x(t_1),t_1)}{\partial t}+\alpha\sum_j\lambda_j\beta^j\geqslant 0,\qquad /8/$$

где ψ -решение дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A_f^*\psi + \sum_j \lambda_j \nabla_x g_i, \\ \psi(t_1) = -\sum_j \lambda_j \nabla_x F(x(t_1), t_1). \end{cases}$$

Из неравенства /8/, которое справедливо при любых неотрицательных α_{ki}, при любом α, при допустимых δV и при почти всех $\tau_i = \tau$ из отрезка $[t_0, t_1]$ можно получить полный набор необходимых условий в форме принципа максимума. Так, положив $\alpha = 0; \delta V(t) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_1]$; $s = 1$; $\nu = 1$; $\alpha_{11} = 1$, будем иметь

$$\sum_j \lambda_j \delta_u g_j(\tau) - (\delta_u f(\tau), \psi(\tau)) \geqslant 0 \tag{9}$$

для любых правильных τ из интервала (t_0, t_1).

Введя функцию

$$H = (f, \psi) - \sum_j \lambda_j g_j,$$

неравенство /9/ можно записать в виде:

$$H(\psi(t), x(t), u, V(t), t) \leqslant H(\psi(t), x(t), u(t), V(t), t)$$

при почти всех t из отрезка $[t_0, t_1]$ и любого $u \in U$. Откуда следует принцип максимума для функции H.

$$\max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, V(t), t) = H(\psi(t), x(t), u(t), V(t), t) \tag{10}$$

при почти всех t из отрезка $[t_0, t_1]$.

Если положить все $\alpha_{ik} = 0$ и $\delta V(t) \equiv 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$, то получим неравенство:

$$\alpha \sum_j \lambda_j \beta^j \geqslant \alpha \sum_j \lambda_j \frac{\partial F_j(x(t_1), t_1)}{\partial t}. \tag{11}$$

Но поскольку α может быть как положительным, так и отрицательным, то из /11/ вытекает равенство:

$$\sum_j \lambda_j \beta^j = \sum_j \lambda_j \frac{\partial F_j(x(t_1), t_1)}{\partial t}. \tag{12}$$

Далее, в силу необходимого условия /10/ с учетом требований, предъявляемых к функциям f, g_i и классу допустимых управлений G, справедлива лемма.

ЛЕММА 2. Функция

$$M(\psi(t), x(t), V(t), t) = \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, V(t), t)$$

кусочно-непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$ и непрерывна слева в точках разрыва.

Следовательно, левая часть /12/ может быть преобразована следующим образом

$$\sum_j \lambda_j \beta^j = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|\alpha| \varepsilon_k} \int_{t_1 - |\alpha| \varepsilon_k}^{t_1} H(\psi(t), x(t), u(t), V(t), t)\, dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\alpha|\varepsilon_k} \int\limits_{t_1-|\alpha|\varepsilon_k}^{t_1} M(\psi(t),x(t),v(t),t)dt = M(\psi(t_1),x(t_1),v(t_1),t_1).$$

И второе необходимое условие оптимальности запишется как

$$M(\psi(t_1),x(t_1),v(t_1),t_1) = \sum \lambda_j \frac{\partial F_j(x(t_1),t_1)}{\partial t}. \qquad /13/$$

В частном случае, когда функции F_j не зависят от t , условие/13/ принимает вид:

$$M(\psi(t_1),x(t_1),v(t_1),t_1) = 0.$$

Пусть далее $\alpha = 0$ и все $\alpha_{ik} = 0$. Тогда неравенство /8/ запишется в виде:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_j \lambda_j \left[\sum_\sigma \frac{\partial g_j}{\partial v^\sigma} \delta v^\sigma \right] - \left(\sum \frac{\partial t}{\partial v^\sigma} \delta v^\sigma, \psi \right) \right\} dt \geqslant 0. \qquad /14/$$

Поскольку /14/ справедливо при любом

$$\delta v(t) = \frac{1}{\varepsilon}[v_\varepsilon(t) - v(t)],$$

где $v_\varepsilon(t)$ - допустимое управление, $(\varepsilon > 0)$, то из /14/ следует интегральный принцип максимума:

$$\max_{W(t)\in G} \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial v^\sigma} W^\sigma, \psi \right) - \sum_j \lambda_j \left[\sum_\sigma \frac{\partial g_i}{\partial v^\sigma} W^\sigma \right] \right\} dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial v^\sigma} v^\sigma, \psi \right) - \sum_j \lambda_j \left[\sum_\sigma \frac{\partial g_j}{\partial v^\sigma} v^\sigma \right] \right\} dt. \qquad /15/$$

Для нахождения стационарного управления, удовлетворяющего условию /15/, которое является третьим необходимым условием, можно использовать один из алгоритмав аппроксимационных методов, предлагаемых в [6], [7].

Поступила в редакцию 18.7.1969г.

Литература

1. Г.К.Захаров, В.И.Плотников. Линейные оптимальные быстродействия с двумя группами управляющих параметров. Ж.В.М. и М.Ф. 8,№ 6, /1968/, 1195-1207.

2. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.

3. В.Г.Болтянский. Математические методы оптимального управления М., Изд-во "Наука", 1969.

4. E.Hofer, P.Sagirow. Optimal systems depending on parameters,"AIAA Journal". 6,N5,1968, 953-956.

5. Э.А.Коддинктон, Н.Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во ИЛ., 1958.

6. В.Ф.Демьянов. К решению оптимальных задач в нелинейных системах управления. Ж.В.М. и М.Ф., 6, № 2, /1966/, 218-228.

7. В.Ф.Демьянов. К решению оптимальных задач в нелинейных системах управления. Ж.В.М. и М.Ф., 6, № 2, /1966/, 218-228

8. V.F.Dem'yanov. The solution of some optimal control problems. SIAM J. Control. Vol.6,NI, 1968, 59-72.

Работа доложена на Всесоюзной конференции по теоретической кибернетике /Новосибирск, 1969/.