Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 3.
УДК.519.1.

КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА НА ГРАФАХ С ВЕСОМ

В.А.Евстигнеев, Н.П.Мазурова

В работе [2] рассматривалась задача отыскания элементарного пути между двумя различными вершинами дерева G. Неудобство рассмотренного в [2] метода заключается в быстром возрастании функции $\varphi(x)$ с увеличением числа вершин G.

В настоящей работе предлагается другой метод решения этой задачи, свободный от этого недостатка и поэтому более удобный для практической реализации.

Заметим, что задачи, подобные рассматриваемой, возникают при управлении большими сетями /транспортными, коммуникационными и т.д./

В первом параграфе на множестве X вершин графа G определяется координатная система S_3 и изучаются ее основные свойства.

Во втором и третьем параграфах предлагаются алгоритмы отыскания элементарного пути между вершинами из G для случаев, когда G является деревом и произвольным связным графом.

Под графом мы всегда будем понимать произвольный неориентированный связный граф без петель и кратных ребер, каждому ребру $u \in U$ которого поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число $r(u)$, называемое его длиной.

В работе используется терминология теории графов [1], а также некоторые обозначения и определения, введенные в [2].

§ 1. Координаты на графе

Будем считать, что на множестве X вершин графа G задана координатная система S_n, $n > 0$, если

а/ для каждого $x \in X$ определен единственный вектор

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)),$$

б/ из того, что $\alpha(x) = \alpha(y)$, следует $x = y$.

Пусть $\bar{G} = (X, \bar{U})$ - некоторый остов [1] графа G. Известно /см. [1], стр. 134 /, что $\bar{G}$ - дерево. Перенумеруем все концевые вершины остова $\bar{G}$ в том порядке, в каком они встречаются при обходе остова, например, справа налево, начиная с некоторой вершины x_1, которая получает номер 1. Если x_1, x_2, ..., x_m - концевые вершины $\bar{G}$, то положим

$$\nu(x_l) = l, \qquad l = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\nu(x)$ - номер вершины x.

Определим теперь на множестве X вершин графа G систему S_3 векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ следующим образом.

Пусть множество X разбито на подмножества $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$, как это сделано в [2]. Напомним, что Γ_1 - множество концевых вершин дерева $\bar{G}$ а

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j \neq \Phi, \quad i \neq j.$$

Пусть $x \in \Gamma_i$, тогда $\alpha(x) = (\alpha_1'(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x))$,
где

$$\alpha_1(x) = \begin{cases} \nu(x), & x \in \Gamma_1, \\ \min\limits_{y \in M(x)} \alpha_1(y), & x \in \Gamma_i,\ 1 < i < N, \\ \min\limits_{y \in M(x)} \alpha_1(y), & x \in \Gamma_N,\ |\Gamma_N| = 1; \end{cases} \qquad /1/$$

$$\alpha_2(x) = \begin{cases} \nu(x), & x \in \Gamma_1, \\ \max\limits_{y \in M(x)} \alpha_2(y), & x \in \Gamma_i,\ 1 < i < N, \\ \max\limits_{y \in M(x)} \alpha_2(y), & x \in \Gamma_N,\ |\Gamma_N| = 1; \end{cases} \qquad /2/$$

где $M(x)$ - множество, определенное в [2] для каждого $x \in X$.

Случай $|\Gamma_N| = 2$ рассмотрим отдельно. Равенства /1/ - /2/ дают нам

$$\alpha'(x_1) = (\alpha_1'(x_1), \alpha_2'(x_1)),$$
$$\alpha'(x_2) = (\alpha_1'(x_2), \alpha_2'(x_2)).$$

Тогда

$$\alpha(x_1) = \alpha'(x_1), \qquad /3/$$
$$\alpha(x_2) = (\min\{\alpha_1'(x_1), \alpha_1'(x_2)\}, \max\{\alpha_2'(x_1), \alpha_2'(x_2)\}),$$

если $\alpha_2'(x_1) \leq \alpha_1'(x_2)$ и

$$\alpha(x_1) = (\min\{\alpha_1'(x_1), \alpha_1'(x_2)\}, \max\{\alpha_2'(x_1), \alpha_2'(x_2)\}), \qquad /3'/$$
$$\alpha(x_2) = \alpha'(x),$$

если $\alpha_2'(x_1) > \alpha_1'(x_2)$.

Определение I. Вершину $x_0 \in \Gamma_N$ будем называть корнем графа G относительно координатной системы S_3, если

$$\alpha_1(x_0) = \min_{y \in \Gamma_N} \alpha_1(y),$$

$$\alpha_2(x_0) = \max_{y \in \Gamma_N} \alpha_2(y).$$

Третью координату точки x определим как расстояние между x и x_0

$$\alpha_3(x) = \rho(x, x_0). \qquad /4/$$

Очевидно, $\alpha_3(x_0) = 0$.

Иллюстрацией приведенных построений служит рис. I.

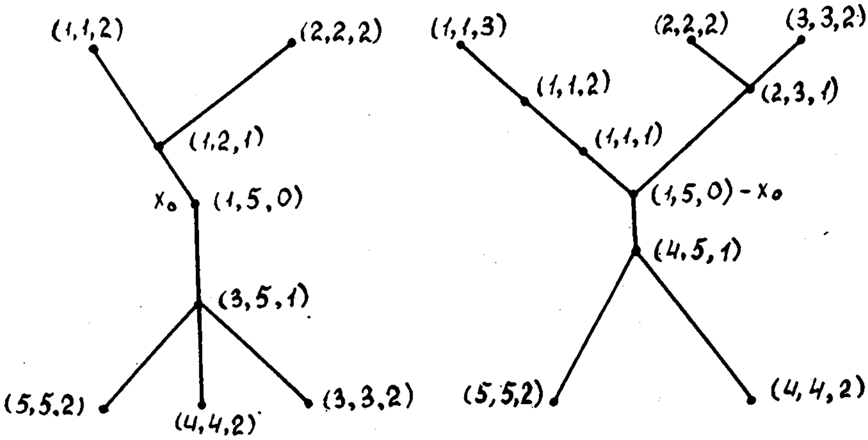

Рис. 1.

а/ $|\Gamma_N| = 1$, б/ $|\Gamma_N| = 2$.

ТЕОРЕМА 1. Система векторов $S_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, поставленная в соответствие вершинам графа G равенствами /1/ - /4/, является координатной системой, то есть она определена однозначно на X, и из того, что $x = y$, следует $\alpha(x) = \alpha(y)$, и наоборот.

Доказательство теоремы будет очевидным из определения $S_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и лемм, которые будут доказаны ниже.

ЛЕММА 1. Для любой вершины $x \in G$, $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x)$ Справедливость этого неравенства следует из определения α_1 и α_2.

ЛЕММА 2. Пусть $x \in G$ и $\mu(x, x_0) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ - некоторый элементарный путь в дереве $\bar{G}$ между корнем x_0 и x. Тогда для координат вершин этого пути, справедливы неравенства:

$$\alpha_1(x_i) \geqslant \alpha_1(x_j),$$

$$\alpha_2(x_i) \leq \alpha_2(x_j), \quad 1 \leq i \leq j \leq k. \qquad /5/$$

Доказательство очевидно.

Рассмотрим произвольную вершину $x \in G$, $x \neq x_0$. Определим множество $\Pi(x)$ как множество концевых вершин $y \in \Gamma_1$, для которых путь $\mu(y, x_0)$ содержит x.

$$\Pi(x) = \{ y : y \in \Gamma_1, x \in \mu(y, x_0) \}. \qquad /6/$$

Тогда из леммы 2 непосредственно следует, что для всех $y \in \Pi(x)$ справедливы неравенства:

$$\alpha_1(x) \leq \nu(y) \leq \alpha_2(x). \qquad /7/$$

Легко видеть, далее, что

$$\alpha_1(x) = \min_{y \in \Pi(x)} \nu(y),$$
$$\alpha_2(x) = \max_{y \in \Pi(x)} \nu(y). \qquad /8/$$

Отсюда непосредственно следует

ЛЕММА 3. Если x_0 - корень G относительно системы $S_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, то

$$\alpha_1(x_0)=\min_{y\in X}\alpha_1(y)=\min_{z\in\Gamma_1}v(z),$$
$$\alpha_2(x_0)=\max_{y\in X}\alpha_2(y)=\max_{z\in\Gamma_1}v(z). \qquad /9/$$

ЛЕММА 4. Пусть $x\in\Gamma_i, y\in\Gamma_i, 1\leqslant i\leqslant N, x\neq y$. Тогда

$$(\alpha_1(x),\alpha_2(x))\cap(\alpha_1(y),\alpha_2(y))=\emptyset.$$

/Здесь под пересечением понимается пересечение интервалов, концы которых определены значениями функций α /

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $i=1$ справедливость утверждения следует из определения S_3. Пусть $x\in\Gamma_k, y\in\Gamma_k, x\neq y, k>1$.

Предположим, что

$$(\alpha_1(x),\alpha_2(x))\cap(\alpha_1(y),\alpha_2(y))\neq\emptyset.$$

Это означает, что $\Pi(x)\cap\Pi(y)\neq\emptyset$, т.е. существует хотя бы одна вершина $z\in\Pi(x)\cap\Pi(y)$. Для этой вершины

$$x\in\mu(z,x_0),\ y\in\mu(z,x_0),\ x\neq y.$$

Но тогда в дереве $\bar{G}$ существует цикл (z,x,x_0,y,z), что невозможно. Лемма доказана.

Из лемм 3,4 следует, что x_0 - единственная вершина в G, координаты которой удовлетворяют равенству /9/, т.е. любое дерево с координатами, определенными равенствами /1/ - /4/, обладает единственным корнем относительно этой системы координат.

ЛЕММА 5. Пусть $R=\{x_{\ell_1},x_{\ell_2},\ldots,x_{\ell_k}\}$ - множество всех вершин $x\in G$, для которых $\alpha_1(x_{\ell_i})=a_1, \alpha_2(x_{\ell_i})=a_2, i=1,2,\ldots,k$, и пусть $k\geqslant 2$. Тогда

1/ Эти вершины образуют простую цепь дерева $\bar{G}$,

2/ $x_0\in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\Pi(x)$ для $x\in R$. Из равенства /8/ следует, что

$$\Pi(x_{\ell_1})=\Pi(x_{\ell_2})=\ldots=\Pi(x_{\ell_k}).$$

Рассмотрим $z\in\Pi(x_{\ell_1})$ и $\mu(z,x_0)$. Очевидно, все вершины $x\in R$ являются вершинами этого пути. Пусть x_{ℓ_1} - первая вершина из R, которую мы встречаем, если идем по пути $\mu(z,x_0)$ от z к x_0.

$$\mu(z,x_0)=(z=x_1,x_2,\ldots,x_{\ell_1},x_{\ell_1+1},\ldots,x_0)$$

Но тогда x_{ℓ_1+1} тоже принадлежит R. Действительно, если хотя бы одно из неравенств

$$\alpha_1(x_{\ell_1})\geqslant\alpha_1(x_{\ell_1+1}),$$
$$\alpha_2(x_{\ell_1})\leqslant\alpha_2(x_{\ell_1+1})$$

является строгим, то в пути $\mu(z,x_0)$ нет ни одной вершины x_k, $k>\ell$, такой, что $\alpha(x_k)=\alpha(x_\ell)$. Это противоречит предположению $k\geqslant 2$. Значит, $x_{\ell_1+1}\in R$. Обозначим $x_{\ell_1+1}=x_{\ell_2}$. Далее, очевидно, что если $k\geqslant 3$, то $x_{\ell_2+1}\in R$ и так далее.

Из равенства $\Pi(x_{\ell_1})=\Pi(x_{\ell_2})=\ldots=\Pi(x_{\ell_k})$ следует, что для всех $x\in R$, $x\neq x_1$, $|U(x)|=2$ и множество R имеет в дереве $\bar{G}$ вид, обозначенный на рис. 2: $y\notin R$.

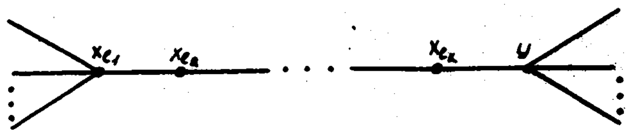

Рис. 2.

Тот факт, что $x_0 \notin R$, тривиален. Лемма доказана.

Обратное неверно /см.рис.3/.

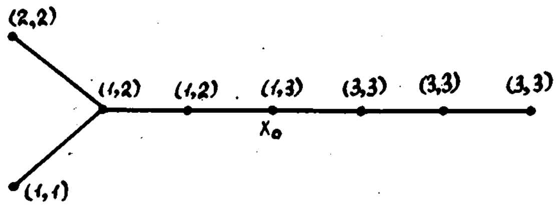

Рис. 3.

Заметим, что если $R = \{x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, \ldots, x_{\ell_r}\}$ - множество вершин, координаты α_1 и α_2 которых удовлетворяют условию леммы 6, то

$$\alpha_3(x_{\ell_1}) > \alpha_3(x_{\ell_2}) > \ldots > \alpha_3(x_{\ell_r}). \qquad /10/$$

Это следует из неравенства $r(u) > 0$.

§ 2. Алгоритм отыскания пути в дереве с координатами

Пусть G - дерево с координатной системой $S_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, удовлетворяющей равенствам /1/ - /4/. Требуется найти в этом дереве элементарный путь между двумя различными вершинами x и y графа G.

Введем оператор $\Delta = \Delta_x(y)$, ставляющий в соответствие каждой паре x и y различных вершин из G вершину $z \in U(x)$ такую, что z является вершиной элементарного пути $\mu(x, y)$. Обозначим через $W(x)$ для любой вершины $x \in G$ множество

$$W(x) = \{y : \alpha_1(y) \leq \alpha_1(x), \alpha_2(y) \geq \alpha_2(x)\}. \qquad /11/$$

Легко видеть, что $x \in W(x)$ и $x_0 \in W(x)$ для всех $x \in G$, где x_0 - корень G относительно S_3. Следовательно, если $x \neq x_0$, $|W(x)| \geq 2$.

Определим оператор Δ следующим образом: $z = \Delta_x(y)$, где

1/ $\alpha_3(z) = \max\limits_{z_i \in U(x) \cap W(y)} \alpha_3(z_i)$, если $x \in \mu(y, x_0)$ и ;

2/ $\alpha_3(z) = \min\limits_{z_i \in U(x)} \alpha_3(z_i)$, если $x \notin \mu(y, x_0)$

ЛЕММА 6. Оператор Δ, заданный равенствами 1 и 2, определен и однозначен на множестве X вершин дерева $\bar{G}$ с координатной системой S_3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \mu(y, x_0)$, то $U(x) \cap W(y) \neq \phi$. Действительно, пусть

$$\mu(y, x_0) = (y = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x, x_{n+1}, \ldots, x_0)$$

Здесь $W(y) = \{x_2, x_3, \ldots, x_0\}$. Поэтому $U(x) \cap W(y) = \{x_{n-1}, x_{n+1}\}$ и $z = \Delta_x(y) = x_{n-1}$. Пусть теперь $z \notin \mu(y, x_0)$. Рассмотрим путь

$$\mu(x, x_0) = (x = x_1, x_2, \ldots, x_0)$$

и подграф, порожденный множеством $\{x \cup U(x)\}$. В силу того, что $\bar{G}$ - дерево, этот подграф имеет вид, изображенный на рис. 4.

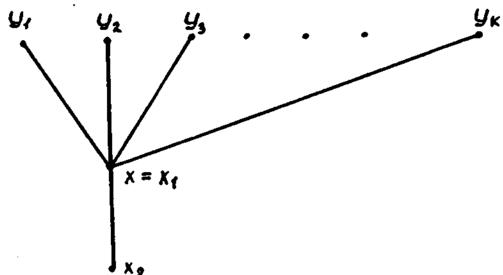

Рис. 4.

Очевидно, что здесь $\alpha_3(y_i) > \alpha_3(x) > \alpha_3(x_1)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Действительно, если для некоторого i_0 $\alpha_3(y_{i_0}) < \alpha_3(x)$, тогда $y_{i_0} \in \mu(x, x_0)$, т.к. если $y_{i_0} \notin \mu(x, x_0)$, то $x \in \mu(y, x_0)$ и $\alpha_3(x) < \alpha_3(y_{i_0})$. Если же $y_{i_0} \in \mu(x, x_0)$, то мы имеем в дереве цикл $(x, y_{i_0}, x_0, x_1, x)$, что невозможно. Следовательно, и в случае 2 оператор Δ определен однозначно, причем

$$z = \Delta_x(y) = x_2.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G - дерево с координатной системой $S_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и Δ - оператор, определенный равенствами I и 2. Тогда путь

$$x, x_1 = \Delta_x(y), x_2 = \Delta_{x_1}(y), \ldots, x_s = \Delta_{x_{s-1}}(y), \ldots, x_n = \Delta_{x_{n-1}}(y)$$

является элементарным путем между x и y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $x \in \mu(y, x_0)$. Тогда оператор Δ определяется равенством I. В лемме I показано, что если $x \in \mu(y, x_0)$, то $x_1 \in \mu(y, x_0)$ и $\alpha_3(x_1) > \alpha_3(x)$. Но тогда и $x_i \in \mu(y, x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим

$$\mu(y, x_0) = (y = y_1, y_2, \ldots, y_s = x, y_{s+1}, \ldots, y_t = x_0).$$

По лемме 6. $x_1 = y_{s-1}$, $x_2 = y_{s-2} \ldots$ Значит, $x_n = y$, и путь, определенный оператором Δ, действительно соединяет x и y. Элементарность следует из того, что $\alpha_3(x_i) > \alpha_3(x_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть теперь $x \notin \mu(y, x_0)$. Тогда по лемме I $z = \Delta_x(y) = x_2$, где $x_2 \in U(x)$ и $x_2 \in \mu(x, x_0)$. Пусть x_n - первая вершина, такая, что $x_n \in \mu(x, x_0)$ и $x_n \in \mu(y, x_0)$. Такая вершина обязательно существует, ибо $x_0 \in \mu(x, x_0)$, $x_0 \in \mu(y, x_0)$. Путь $x_{n+1} = \Delta x_n(y)$, $x_{n+2} = \Delta_{x_{n+1}}(y), \ldots, y$ по доказанному выше является элементарным. Элементарность пути $\mu(x, x_n)$ следует из неравенства

$$\alpha_3(x_i) > \alpha_3(x_{i+1}),\ i = 1,2,\dots,r-1,$$

доказанного в лемме 6.

Итак, мы показали, что для любых x и y из G оператор Δ выбирает путь

$$\mu(x,y) = \mu(x,x_r) + \mu(x_r,y),$$

где каждый из слагаемых путей является элементарным и оба пути имеют лишь одну общую вершину x_r. Следовательно, $\mu(x,y)$ - также элементарный путь. Если $x \in \mu(y,x_0)$, то $x = x_r$, а если $y \in \mu(x,x_0)$, то $x_r = y$. Теорема доказана.

§ 3. Алгоритм нахождения элементарного пути в графе с координатами

Пусть на остове $\bar{G} = \bar{G}(X,\bar{U})$ графа $G = G(X,U)$ определена координатная система S_3. Оператор Δ, рассмотренный в § 2, позволяет строить элементарный путь $\mu(x,y)$ между любыми двумя вершинами x и y из G, причем дугами этого пути будут только дуги остова. На каждом шаге i выбора пути этим оператором рассматривается $U_{\bar{G}}(x_i)$, что неудобно, т.к. тут надо специально иметь некоторый метод выделения в $U_G(x)$ подмножества $U_{\bar{G}}(x)$. /Здесь под $U_G(x)$ понимается первая окрестность /см. [2]/вершины x в графе G, а под $U_{\bar{G}}(x)$ - первая окрестность x в графе $\bar{G}$ /.

Рассмотрим оператор $\bar{f}$, аналогичный Δ, но выбирающей вершину $z = \bar{f}_x(y)$ из всего множества $U_G(x)$ смежных с x в G вершин. $\bar{f}_x(y) = z$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_3(z) = \begin{cases} \max\limits_{z_i \in U(x)\cap W(y)} \alpha_3(z_i), & \text{если } U(x)\cap W(y) \neq \phi, \quad /1'/ \\ \min\limits_{z_i \in U(x)\cap W(y)} \alpha_3(z_i), & \text{если } U(x)\cap W(y) = \phi. \quad /2'/ \end{cases}$$

Очевидно, что если $G = \bar{G}$, то $\Delta \equiv \bar{f}$.

ЛЕММА 7. Оператор $\bar{f}$, заданный равенствами 1', 2', определен и однозначен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $U(x)\cap W(y) \neq \phi$, то оператор определен. Если $U(x)\cap W(y) = \phi$, то определенность $\bar{f}$ следует из того, что $U(x)\cap W(x) \neq \phi$ для всех $x \neq x_0$. Если же $x = x_0$, то $U(x_0)\cap W(y) \neq \phi$ для всех $y \in G$, $y \neq x_0$.

Однозначность следует из того факта, что в случае 1 все элементы множества $U(x)\cap W(y)$ являются вершинами пути $\mu(y,x_0)$, а для элементов $y_1, y_2, \dots, y_r = x_0$ такого пути $\alpha_3(y_i) > \alpha_3(y_j)$ для $1 \leqslant i < j \leqslant r$. Элементы же пересечения $U(x)\cap W(x)$ являются вершинами пути $\mu(x,x_0)$, следовательно, в случае 2' однозначность также имеет место, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Покажем, что операторы Δ и $\bar{f}$ вообще говоря, различны.

Для этого рассмотрим граф, изображенный на рис. 5. Сплошные дуги в этом графе являются дугами остова, разрывные не входят в остов. Длина каждой дуги здесь для нас безразлична, положим ее равной I.

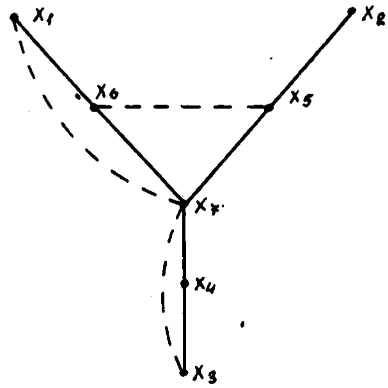

Рис. 5.

Координаты вершин здесь:

$$\alpha(x_1)=(1,1,2),\quad \alpha(x_2)=(2,2,2),\quad \alpha(x_3)=(3,3,2),$$
$$\alpha(x_4)=(3,3,1),\quad \alpha(x_5)=(2,2,1),\quad \alpha(x_6)=(1,1,1),$$
$$\alpha(x_7)=(1,3,0),$$

x_7 – корень G относительно системы S_3.

Сравним некоторые значения операторов Δ и $\bar{f}$:

$$\Delta_{x_1}(x_2)=x_6,\qquad \bar{f}_{x_1}(x_2)=x_7,$$
$$\Delta_{x_1}(x_7)=x_6,\qquad \bar{f}_{x_1}(x_7)=x_7,$$
$$\Delta_{x_6}(x_2)=x_7,\qquad \bar{f}_{x_6}(x_2)=x_5.$$

Рассмотрим несколько путей, выбранных операторами Δ и $\bar{f}$:

$$\mu_\Delta(x_1,x_2)=(x_1,x_6,x_7,x_5,x_2),$$
$$\mu_{\bar{f}}(x_1,x_2)=(x_1,x_7,x_5,x_2),$$
$$\mu_\Delta(x_6,x_2)=(x_6,x_7,x_5,x_2),$$
$$\mu_{\bar{f}}(x_6,x_2)=(x_6,x_5,x_2),$$
$$\mu_\Delta(x_3,x_1)=(x_3,x_4,x_7,x_6,x_1),$$
$$\mu_{\bar{f}}(x_3,x_1)=(x_3,x_7,x_1).$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x\in X, y\in X, x\neq y$ – вершины графа $G=G(X,U)$. Тогда последовательность

$$x=x_1,\ x_2=\bar{f}_{x_1}(y),\ldots,x_k=\bar{f}_{x_{k-1}}(y),\ldots,x_n=\bar{f}_{x_{n-1}}(y)$$

вершин графа G, определяемая оператором $\bar{f}$, есть элементарный путь, соединяющий x и y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершенно аналогично доказательству теоремы 2 показывается, что такой путь есть сумма не более чем трех путей:

$$\mu(x,y)=\mu(x,x_k)\ +\ (x_k,x_{k+1})+\mu(x_{k+1},y).$$

При этом все вершины $x_1,x_2,\ldots,x_k$ принадлежат пути $\mu(x,x_0)$ в дереве

$\bar{G}$, а все вершины $x_{k+1},\dots,x_n$ пути $\mu(y,x_0)$ в $\bar{G}$. Элементарность первого и третьего слагаемых следует как и в теореме 2, из строгих неравенств

$$a_3(x_i) > a_3(x_j)\,, \quad 1 \le i < j \le k,$$
$$a_3(x_i) < a_3(x_j)\,, \quad k+1 \le i < j \le n.$$

справедливость которых очевидна.

Дуга (x, x_{k+1}) либо не принадлежит $\bar{G}$, либо входит в первое или третье слагаемое. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Количество вершин пути $\mu_f(x,y)$ не превосходит количества вершин пути $\mu_\Delta(x,y)$.

Доказательство тривиально.

Из следствия легко видеть, что если все дуги графа имеют равную длину, то длина пути, выбираемая оператором $\bar{f}$, не превосходит длины пути, выбираемой Δ . Но при неравных длинах дуг этого, конечно, может и не быть. Действительно, положив в изложенном выше примере $r(x_6,x_5)=4$, $r(x_6,x_7)=r(x_6,x_5)=r(x_5,x_2)=1$, получим

$$R(\mu_\Delta(x_6,x_2))=3, \qquad R(\mu_f(x_6,x_2))=5.$$

Поступила в редакцию 24.7.1969г.

Литература

1. О.Оре. Теория графов. "Наука", М., 1968.

2. Н.П.Мазурова. Об алгоритме нахождения элементарных путей в конечном дереве. "Управляемые системы", вып.2 /в печати/.