Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1989 г., вып. 29

УДК 519.852

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА СОСТАВА СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОБЪЕМЫ ПРОИЗВОДСТВА

М.Г.Пащенко

Рассматриваемая в настоящей работе задача является обобщением исследуемых в [1, 2] задач оптимального выбора состава системы технических средств (ТС). Основная особенность рассматриваемой задачи заключается в наличии ограничений на объемы производства ТС на каждом единичном отрезке планового периода.

Для решения такой задачи может быть построен алгоритм типа ветвей и границ, аналогичный рассмотренному в [2]. Это предполагает построение алгоритма вычисления нижней границы с учетом наличия ограничений на объемы производства. Настоящая работа посвящена построению такого алгоритма. В основе алгоритма лежит идея лагранжевой релаксации [3] по части ограничений задачи и дальнейшая субградиентная оптимизация [4] по множителям Лагранжа. Основную часть процедуры вычисления нижней границы составляет эффективный алгоритм решения релаксированной задачи при фиксированных множителях Лагранжа.

1. Постановка задачи

Содержательная постановка задачи многократного оптимального выбора состава системы ТС заключается в отыскании такого варианта изменения состава системы в течение заданного промежутка планирования, состоящего из нескольких единичных отрезков времени, чтобы при условии выполнения на каждом единичном отрезке времени заданной совокупности работ (задач) и при условии выполнения ограничений по количеству производимых на каждом отрезке времени ТС каждого образца суммарные предстоящие затраты, складывающиеся из затрат на разработку ТС новых образцов, затрат на производство ТС и затрат на выполнение работ, были минимальными.

Для формальной записи введем следующие обозначения и допущения.

Единичные отрезки промежутка планирования занумеруем числами $1,\dots,T$. Область возможного выбора образцов ТС зададим множеством номеров $I=\{1,\dots,m\}$, связывая с i-м элементом этого множества некоторый образец (i -й образец). Начальный состав зададим величинами v_i^0, $i \in I$. Величина v_i^0 равняется количеству ТС i -го образца в составе системы на начало промежутка планирования. Ограничения на объемы производства ТС зададим величинами V_{it} , $i \in I$, $t = 1,\ldots,T$. Считаем, что объем производства ТС i -го образца на t -м единичном отрезке времени не может превышать величины V_{it} . Перечень работ, подлежащих выполнению на t -м единичном отрезке, зададим множеством номеров J_t . Считаем, что множества J_t , $t = 1,\ldots,T$, попарно не пересекаются и в объединении дают множества $J = \{1,\ldots,n\}$. С j -м элементом множества J связана некоторая работа (j -я работа). Для $j \in J$ через $t(j)$ обозначим такой номер t , что $j \in J_t$. Предполагаем, что на каждом отрезке времени соответствующие работы выполняются независимо и параллельно (одновременно). Считаем известными величины p_{ij} , $i \in I$, $j \in J$, равные количеству ТС i -го образца одновременно необходимых для выполнения j -й работы.

При вычислении суммарных затрат будем учитывать:

- затраты на разработку образцов ТС, для задания которых используем величины c_{it}^0 , $i \in I$, $t = 1,\ldots,T$. Величина c_{it}^0 равняется затратам на разработку ТС i -го образца к началу t -го отрезка времени;

- затраты на производство ТС, задаваемые величинами c_{it}^n , $i \in I$, $t = 1,\ldots,T$. Величина c_{it}^n равняется затратам на производство одного ТС i -го образца на t -м отрезке времени;

- затраты на эксплуатацию ТС (выполнение работ), определяемые величинами c_{ij} , $i \in I$, $j \in J$. Величина c_{ij} соответствует затратам на выполнение j -й работы ТС i -го образца.

Введем следующие переменные.

Переменные начала производства $z_{it} \in \{0, 1\}$, $i \in I$, $t = 1, \ldots, T$. Переменная z_{it} принимает значение 1, если ТС i -го образца разработано к началу t -го отрезка времени.

Переменные объемов производства $v_{it} \geq 0$, $i \in I$, $t = 1,\ldots,T$. Величина v_{it} равняется количеству ТС i -го образца производимых на t -м отрезке времени.

Переменные назначения (использования) ТС $x_{ij} \geq 0$, $i \in I$, $j \in J$. Величина x_{ij} указывает, какая доля j -й работы (единичных работ j -й разновидности) планируется к выполнению ТС i -го образца.

С учетом сказанного задача многократного оптимального выбора состава системы ТС с ограничениями на объемы производства записывается следующим образом:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i\in I} \Big\{ c^{o}_{it} z_{it} + c^{п}_{it} v_{it} + \sum_{j\in J_t} c_{ij} x_{ij} \Big\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \min_{(z_{it}),(v_{it}),(x_{ij})} ; \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j\in J; \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J_t} p_{ij} x_{ij} \le v^{o}_{i} + \sum_{\tau=1}^{t} v_{i\tau}, \quad i\in I, \quad t = 1,\dots,T; \tag{3}$$

$$v_{it} \le V_{it} \max_{\tau\le t} z_{i\tau}, \quad i\in I, \quad t = 1,\dots,T; \tag{4}$$

$$0 \le x_{ij} \le 1, \ v_{it} \ge 0, \ z_{it}\in\{0,1\}, i\in I, j\in J, t = 1,\dots,T. \tag{5}$$

Рассмотрим алгоритм вычисления нижней границы для целевой функции (1) задачи (1)-(6).

2. Алгоритм вычисления нижней границы

Под лагранжевой релаксацией задачи (1)-(5) с множителями $\lambda_j, j\in J$, будем понимать задачу с целевой функцией

$$\sum_{j\in J} \lambda_j + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i\in I} \Big\{ c^{o}_{it} z_{it} + c^{п}_{it} v_{it} +$$

$$+ \sum_{j\in J_t} (c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} \Big\} \longrightarrow \min \tag{1'}$$

и ограничениями (3)-(5). Оптимальное значение целевой функции этой задачи оценивает снизу [3] оптимальное значение целевой функции задачи (1)-(5). Более того при оптимальных множителях Лагранжа (множителях, максимизирующих (1')) получаемая оценка снизу будет не хуже, чем оценка, получаемая при решении задачи (1)-(5) как задачи линейного программирования.

Нетрудно заметить, что при фиксированных множителях Лагранжа λ задача (1'), (3)-(5) распадается на m независимых задач вида

$$\sum_{t=1}^{T} \Big\{ c^{o}_{t} z_{t} + c^{п}_{t} v_{t} + \sum_{j\in J_t} c_j x_j \Big\} \longrightarrow \min_{(z_t),(v_t),(x_j)} ; \tag{6}$$

$$\sum_{j\in J_t} p_j x_j \le v^0 + \sum_{\tau=1}^{t} v_\tau , \ t = 1,\dots,T ; \tag{7}$$

$$v_t \le V_t \max_{\tau \le t} z_\tau , \ t = 1,\dots,T ; \tag{8}$$

$$z_t \in \{0,1\},\ 0 \le x_j \le 1 ,\ v_t \ge 0,\ j\in J,\ t = 1,\dots,T , \tag{9}$$

где c_j могут быть отрицательными. Заметим также, что в этой задаче достаточно рассматривать только такие булевы векторы (z_t) , что

$$\sum_{\tau=1}^{T} z_\tau \le 1 ,$$

поэтому оптимальное решение задачи (6)-(9) может быть получено из решения $(T+1)$ задачи с различными векторами (z_t) . При фиксированном векторе (z_t) задача (6)-(9) переписывается следующим образом:

$$\sum_{t=1}^{T} \{c_t^n v_t + \sum_{j\in J_t} c_j x_j\} \longrightarrow \min_{(v_t),(x_j)} ; \tag{10}$$

$$\sum_{j\in J_t} p_j x_j \le v^0 + \sum_{\tau=1}^{t} v_\tau , \ t = 1,\dots,T ; \tag{11}$$

$$0 \le v_t \le \tilde{V}_t , \ t = 1,\dots,T ; \tag{12}$$

$$0 \le x_j \le 1 , \ j\in J . \tag{13}$$

Для решения данной задачи построим эффективный алгоритм решения двойственной задачи и, используя условия дополняющей нежесткости, восстановим оптимальное решение исходной задачи.

Двойственная задача имеет вид

$$-\sum_{t=1}^{T} \{\sum_{j\in J_t} \mu_j + \tilde{V}_t \lambda_t + v^0 y_t\} \longrightarrow \max_{(y_t),(\lambda_t),(\mu_j)} ; \tag{14}$$

$$-p_j y_t - \mu_j \le c_j ,\ j\in J_t ,\ t = 1,\dots,T ; \tag{15}$$

$$\sum_{\tau=t}^{T} y_\tau - \lambda_t \le c_t^n , \ t = 1,\dots,T ; \tag{16}$$

$$y_t , \mu_j , \lambda_t \ge 0 ,\ j\in J,\ t = 1,\dots,T . \tag{17}$$

Перепишем ее следующим образом:

$$\sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{j\in J_t} \mu_j + \tilde{V}_t \lambda_t + v^0 y_t \right\} \longrightarrow \min_{(y_t),(\lambda_t),(\mu_j)} ;$$

$$\mu_j \geqslant -c_j - p_j y_t , \; j \in J_t , \; t = 1,\dots,T ;$$

$$\lambda_t \geqslant \sum_{\tau=t}^{T} y_\tau - c_t^{п} , \; t = 1,\dots,T ;$$

$$y_t , \lambda_t , \mu_j \geqslant 0 , \; j \in J , \; t = 1,\dots,T .$$

Если (y_t) , (λ_t) , (μ_j) - оптимальное решение этой задачи, то

$$\lambda_t = \lambda_t(y) = \max \left\{ 0, \sum_{\tau=t}^{T} y_\tau - c_t^{п} \right\},$$

$$\mu_j = \mu_j(y) = \max \left\{ 0, -c_j - p_j y_{t(j)} \right\} .$$

Таким образом, окончательно задача (14)-(17) примет вид

$$F(y) = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{j\in J_t} \mu_j(y) + \tilde{V}_t \lambda_t(y) + v^0 y_t \right\} \longrightarrow \min_{y \geqslant 0} . \quad (18)$$

Построение оптимального вектора y^* будем вести последовательно, начиная с нулевого вектора, и на каждом шаге, увеличивая одну из компонент рассматриваемого на данном шаге вектора y .

Введем прежде всего некоторые обозначения. Положим:

$$T(y, t_1, t_2) = \left\{ t / t_1 \leqslant t \leqslant t_2 , \sum_{i=t}^{T} y_i > c_t^{п} \right\} ,$$

$$\tilde{T}(y, t_1, t_2) = \left\{ t / t_1 \leqslant t \leqslant t_2 , \sum_{i=t}^{T} y_i \geqslant c_t^{п} \right\} ,$$

$$J_t(\omega) = \left\{ j \in J_t / \omega < -\frac{c_j}{p_j} \right\} ,$$

$$\tilde{J}_t(\omega) = \left\{ j \in J_t / \omega \leqslant -\frac{c_j}{p_j} \right\} .$$

Зафиксируем вектор $y^0 = (y_t^0)$ и найдем приращение функции $F(y^0)$ при увеличении компоненты $y_{t_1}^0$ на достаточно малую величину ε .

Слагаемое $\mu_j(y^0)$ может измениться только в том случае, когда $t(j) = t_1$. При этом, если $-c_j - p_j y_{t_1}^0 \leqslant 0$, то $\mu_j(y^0) = 0$ и, следовательно, $\Delta_{t_1} \mu_j(y^0) = 0$. Если же $-c_j - p_j y_{t_1}^0 > 0$, то $\Delta_{t_1}\mu_j(y^0) = max\{-p_j\varepsilon, c_j + p_j y^0_{t_1}\}$. Таким образом, при

$$\varepsilon \leq \min_{j\in J_{t_1}(y^0_{t_1})} \left\{-\frac{c_j}{p_j} - y^0_{t_1}\right\},$$

имеем

$$\Delta_{t_1}\mu_j(y^0) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \notin J_{t_1}(y^0_{t_1}); \\ -p_j\cdot\varepsilon \text{ при } j \in J_{t_1}(y^0_{t_1}) \end{cases}$$

Слагаемое $\lambda_t(y^0)$ может измениться только в том случае, когда $t \leq t_1$ и

$$\Delta_{t_1}\lambda_t(y^0) = \begin{cases} \varepsilon \quad \text{при} \quad c^n_t - \sum_{\tau=t}^{T} y^0_\tau \leq 0, \\ \varepsilon \dot{-} (c^n_t - \sum_{\tau=t}^{T} y^0_\tau) \quad \text{при} \quad c^n_t > \sum_{\tau=t}^{T} y^0_\tau. \end{cases}$$

Отсюда для любого

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{t_1} = \min\left\{\min_{j\in J_{t_1}(y^0_{t_1})}\left\{-\frac{c_j}{p_j} - y^0_{t_1}\right\},\right.$$

$$\left.\min_{\substack{\tau\leq t_1 \\ \tau\notin\tilde{T}(y^0,1,t_1)}} \left\{c^n_\tau - \sum_{i=\tau}^{T} y^0_i\right\}\right\}$$

получаем

$$\Delta_{t_1}F(y^0) = \sum_{t=1}^{T}\left\{\tilde{V}_t \cdot \Delta_{t_1}\lambda_t(y^0) + \sum_{j\in J_t}\Delta_{t_1}\mu_j(y^0)\right\} + v^0\cdot\varepsilon =$$

$$= \left\{v^0 + \sum_{t\in\tilde{T}(y^0,1,t_1)} \tilde{V}_t - \sum_{j\in J_{t_1}(y^0_{t_1})} p_j\right\}\cdot\varepsilon = d_{t_1}(y^0)\cdot\varepsilon.$$

При $\varepsilon > \varepsilon_{t_1}$, по определению ε_{t_1}, либо существует $t \leq t_1$, $t \notin \tilde{T}(y^0, 1, t_1)$, для которого

$$\varepsilon > c^n_t - \sum_{\tau=t}^{T} y^0_\tau,$$

и следовательно, $\Delta_{t_1}\lambda_t(y^0) > 0$, либо существует $j \in J_{t_1}(y^0_{t_1})$, для которого $y^0_{t_1} + \varepsilon > -c_j/p_j$, и, следовательно, $\Delta_{t_1}\mu_j(y^0) > -p_j\varepsilon$. В обоих случаях получаем $\Delta_{t_1}F(y^0) > d_{t_1}(y^0)\cdot\varepsilon$.

Пусть $t^* = arg\min_t d_t(y^0)$ и $\varepsilon^* = \varepsilon_{t^*}$. Рассмотрим две задачи:

$$
\begin{aligned}
& F(y) \to \min_y ; \\
& y \geqslant y^0 ,
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

и

$$
\begin{aligned}
& F(y) \to \min_y ; \\
& y \geqslant y^0 , \\
& y_{t^*} \geqslant y^0_{t^*} + \varepsilon^* .
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Следующая теорема лежит в основе алгоритма построения оптимального решения задачи (18).

Т е о р е м а. Если $d_{t^*}(y^0) < 0$, то существует оптимальное решение задачи (19), являющееся оптимальным решением задачи (20). Если $d_{t^*}(y^0) \geqslant 0$, то оптимальным решением задачи (19) является решение y^0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $d_{t^*}(y^0) < 0$. Поскольку множество допустимых решений задачи (20) содержится в множестве допустимых решений задачи (19), то для доказательства первой части утверждения достаточно показать, что существует оптимальное решение задачи (19), допустимое для задачи (20). Среди оптимальных решений задачи (19) выберем решение y с максимальным значением y_{t^*}. Обозначим его через $\tilde{y}$ и будем рассматривать как искомое оптимальное решение.

Предположим противное и пусть $\tilde{y}_{t^*} < y^0_{t^*} + \varepsilon^*$. Покажем, что при этом условии $\tilde{y}_t = y^0_t$ при любом $t \neq t^*$. Допустим, что $\tilde{y}_t > y^0_t$ для некоторых $t = t^*$ и пусть t_1 – наибольший такой номер. Рассмотрим величины $\hat{y}_t$ такие, что

$$
\hat{y}_t = \begin{cases} \tilde{y}_t , & t \notin \{t_1, t^*\}, \\ \tilde{y}_{t^*} + \varepsilon , & t = t^*, \\ \tilde{y}_{t_1} - \varepsilon , & t = t_1 \end{cases}
$$

При $0 < \varepsilon \leqslant \tilde{y}_{t_1} - y^0_{t_1}$ величины $\tilde{y}_t$ образуют допустимое решение $\hat{y}$ задачи (19). Покажем, что $F(\hat{y}) \leqslant F(\tilde{y})$ при достаточно малом ε. Для этого убедимся прежде всего в справедливости следующих утверждений.

Л е м м а 1. Справедливы следующие соотношения:

$$
\sum_{j \in \bar{J}_{t_1}(\tilde{y}_{t_1})} p_j \leqslant \sum_{j \in J_{t_1}(y^0_{t_1})} p_j ,
$$

$$
\sum_{j \in J_{t^*}(\tilde{y}_{t^*})} p_j = \sum_{j \in J_{t^*}(y^0_{t^*})} p_j .
$$

Для доказательства первого неравенства покажем, что $\widetilde{J}_{t_1}(\widetilde{y}_{t_1}) \subset$ $\subset J_{t_1}(y^o_{t_1})$. Действительно, пусть $j \in \widetilde{J}_{t_1}(\widetilde{y}_{t_1})$, тогда $\widetilde{y}_{t_1} \leq -c_j/p_j$. Но $y^o_{t_1} < \widetilde{y}_{t_1}$, следовательно, $y^o_{t_1} < -c_j/p_j$ и $j \in J_{t_1}(y^o_{t_1})$. Второе соотношение непосредственно следует из равенства $J_{t^*}(y^o_{t^*} + \varepsilon) =$ $= J_{t^*}(y^o_{t^*})$ при $\varepsilon < \varepsilon^*$.

Л е м м а 2. Если $t_1 > t^*$, то

$$\sum_{t \in \widetilde{T}(y^o, t^*+1, t_1)} \widetilde{V}_t \leq \sum_{t \in T(\widetilde{y}, t^*+1, t_1)} \widetilde{V}_t$$

Если $t_1 < t^*$, то

$$\sum_{t \in \widetilde{T}(y^o, t_1+1, t^*)} \widetilde{V}_t = \sum_{t \in \widetilde{T}(\widetilde{y}, t_1+1, t^*)} \widetilde{V}_t .$$

Для доказательства первого неравенства достаточно показать, что $\widetilde{T}(y^o, t^*+1, t_1) \subseteq T(\widetilde{y}, t^*+1, t_1)$. Пусть $t \in \widetilde{T}(y^o, t^*+1, t_1)$, тогда

$$\sum_{i=t}^{T} y^o_i \geq c^n_t .$$

Но $\widetilde{y}_i \geq y^o_i$, $i = 1,\dots,T$ и $\widetilde{y}_{t_1} > y^o_{t_1}$, следовательно,

$$\sum_{i=t}^{T} \widetilde{y}_i > \sum_{i=t}^{T} y^o_i , \quad \sum_{i=t}^{T} \widetilde{y}_i > c^n_t$$

и, по определению, $t \in T(\widetilde{y}, t^*+1, t_1)$.

Для доказательства второго утверждения достаточно показать, что $\widetilde{T}(y^o, t_1+1, t^*) = \widetilde{T}(\widetilde{y}, t_1+1, t^*)$. Пусть $t \in \widetilde{T}(\widetilde{y}, t_1+1, t^*)$, тогда

$$\sum_{i=t}^{T} \widetilde{y}_i \geq c^n_t$$

Но по выбору t_1 имеем $\widetilde{y}_i = y^o_i$ при $i \geq t_1$ и $i \neq t^*$, поэтому

$$\sum_{i=t}^{T} \widetilde{y}_i = \sum_{i=t}^{T} y^o_i + (\widetilde{y}_{t^*} - y^o_{t^*}) ,$$

где $(\widetilde{y}_{t^*} - y^o_{t^*}) < \varepsilon^*$. В силу выбора ε^* для любого $t \notin \widetilde{T}(y^o, 1, t^*)$ и любого $\varepsilon < \varepsilon^*$ имеем

$$\sum_{i=t}^{T} y^o_i + \varepsilon < c^n_t ,$$

следовательно, $t \in \widetilde{T}(y^o, t_1+1, t^*)$. Обратное включение доказывается аналогично.

Оценим теперь разность $F(\hat{y}) - F(\tilde{y})$ при достаточно малом ε. Если $t_1 > t^*$, то с учетом лемм 1 и 2 можем написать

$$F(\hat{y}) - F(\tilde{y}) = \sum_{t=1}^{T} \{ \tilde{V}_t \cdot (\lambda_t(\hat{y}) - \lambda_t(\tilde{y})) + \sum_{j \in J_t} (\mu_j(\hat{y}) - \mu_j(\tilde{y})) \} +$$

$$+ v^0 \cdot \sum_{t=1}^{T} (\hat{y}_t - \tilde{y}_t) = \varepsilon \cdot (\sum_{j \in \tilde{J}_{t_1}(\tilde{y}_{t_1})} p_j - \sum_{j \in J_{t^*}(\tilde{y}_{t^*})} p_j -$$

$$- \sum_{t \in T(\tilde{y}, t^*+1, t_1)} \tilde{V}_t) \le \varepsilon \cdot (\sum_{j \in J_{t_1}(y^0_{t_1})} p_j - \sum_{j \in J_{t^*}(y^0_{t^*})} p_j -$$

$$- \sum_{t \in \tilde{T}(y^0, t^*+1, t_1)} \tilde{V}_t) = \varepsilon \cdot (d_{t^*}(y^0) - d_{t_1}(y^0)) \le 0.$$

Если $t_1 < t^*$, то получаем

$$F(\hat{y}) - F(\tilde{y}) = \sum_{t=1}^{T} \{ \tilde{V}_t (\lambda_t(\hat{y}) - \lambda_t(\tilde{y})) +$$

$$+ \sum_{j \in J_t} (\mu_j(\hat{y}) - \mu_j(\tilde{y})) \} + v^0 \sum_{t=1}^{T} (\hat{y}_t - \tilde{y}_t) =$$

$$= \varepsilon \cdot (\sum_{j \in \tilde{J}_{t_1}(\tilde{y}_{t_1})} p_j - \sum_{j \in J_{t^*}(\tilde{y}_{t^*})} p_j + \sum_{t \in \tilde{T}(\tilde{y}, t_1+1, t^*)} \tilde{V}_t) \le$$

$$\le \varepsilon \cdot (\sum_{j \in J_{t_1}(y^0_{t_1})} p_j - \sum_{j \in J_{t^*}(y^0_{t^*})} p_j + \sum_{t \in \tilde{T}(y^0, t_1+1, t^*)} \tilde{V}_t) =$$

$$= \varepsilon \cdot (d_{t^*}(y^0) - d_{t_1}(y^0)) \le 0 .$$

Таким образом, в обоих случаях получаем, что $\hat{y}$ – оптимальное решение задачи (19), но это противоречит выбору решения $\tilde{y}$. Следовательно, $\tilde{y}_t = y^0_t$ при любом $t = t^*$. Но тогда при любом ε, $0 \le \varepsilon \le$ $\le y^0_{t^*} + \varepsilon^* - \tilde{y}_{t^*}$, для решения $\hat{y}$, где

$$\hat{y}_t = \begin{cases} y^0_t , & t \ne t^*, \\ \tilde{y}_t + \varepsilon , & t = t^*, \end{cases}$$

имеем $F(\hat{y}) - F(\tilde{y}) = d_{t^*}(y^0) \cdot \varepsilon \le 0$, что противоречит выбору оптимального решения $\tilde{y}$. Следовательно, принятое предположение $\tilde{y}_{t^*} < y^0_{t^*} + \varepsilon^*$

неверно и первая часть утверждения теоремы доказана.

Для доказательства второй части утверждения рассмотрим произвольное решение $y \geq y^0$ задачи (19) и построим последовательность решений $y^0 \leq \leq y^1 \leq \ldots \leq y^T = y$, где $y^t = (y_1, \ldots, y_t, y^0_{t+1}, \ldots, y^0_T)$.

Лемма 3. Если $y^1 \leq y^2$, то $d_t(y^1) \leq d_t(y^2)$ для любого $t = 1, \ldots, T$.

По определению,

$$d_t(y) = v^0 + \sum_{t \in \tilde{T}(y,1,T)} \tilde{V}_t - \sum_{j \in J_t(y_t)} p_j .$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что $\tilde{T}(y^1, 1, t) \subset \subset \tilde{T}(y^2, 1, t)$ и $J_t(y^2_t) \subset J_t(y^1_t)$. Пусть $t_1 \in \tilde{T}(y^1, 1, t)$, тогда

$$\sum_{\ell = t_1}^{T} y^1_\ell \geq c^n_t ,$$

но $y^2 \geq y^1$, следовательно,

$$\sum_{\ell = t_1}^{T} y^2_\ell \geq c^n_t$$

и $t_1 \in \tilde{T}(y^2, 1, t)$. Пусть $j \in J_t(y^2_t)$, тогда $y^2_t < -c_j/p_j$, но $y^2_t > y^1_t$, следовательно, $y^1_t < -c_j/p_j$ и $j \in J_t(y^1_t)$.

Как было показано выше, $F(y^t) - F(y^{t-1}) \geq d_t(y^{t-1})(y^t_t - y^{t-1}_t)$ для любого $t = 1, \ldots, T$, поэтому

$$F(y^T) \geq F(y^{T-1}) + d_T(y^{T-1})(y_T - y^0_T) \geq$$
$$\geq F(y^0) + \sum_{t=1}^{T} d_t(y^{t-1})(y_t - y^0_t) .$$

Применяя лемму 3, получаем

$$F(y^T) \geq F(y^0) + \sum_{t=1}^{T} d_t(y^0)(y_t - y^0_t) \geq F(y^0) .$$

В качестве следствия из доказанной теоремы получаем следующий алгоритм решения задачи (18).

Алгоритм состоит из однотипных шагов, на каждом из которых рассматривается некоторое решение y. На первом шаге в качестве такого решения рассматривается нулевое решение. Если $d_t(y) \geq 0$ при любом t, то алгоритм заканчивает свою работу и y - оптимальное решение. Если $d_{t^*}(y) < 0$, то строим новое решение y, полагая $y_{t^*} = y_{t^*} + \varepsilon^*$, и переходим к следующему шагу. Вспомним, что ε^* выбирается таким образом, что на каждом шаге либо уменьшается множество $J_{t^*}(y_{t^*})$, либо увеличивается множество $\widetilde{T}(y, 1, T)$. Так что описанный алгоритм заканчивает работу через конечное число шагов, не превосходящее $(n + T)$.

Зная оптимальное решение $(\mu_j), (\lambda_t), (y_t)$ двойственной задачи, построим оптимальное решение прямой задачи (10)-(13). Для этого воспользуемся уравнениями, называемыми условиями дополняющей нежесткости:

$$y_t \Big(\sum_{j \in J_t} p_j x_j - v^0 - \sum_{\tau=1}^{t} v_\tau \Big) = 0, \quad t = 1, \dots, T; \tag{21}$$

$$\mu_j (1 - x_j) = 0, \quad j \in J; \tag{22}$$

$$\lambda_t (\widetilde{V}_t - v_t) = 0, \quad t = 1, \dots, T; \tag{23}$$

$$x_j (\mu_j + c_j + p_j y_{t(j)}) = 0, \quad j \in J; \tag{24}$$

$$v_t \Big(\lambda_t + c_t^п - \sum_{\tau=t}^{T} y_\tau \Big) = 0, \quad t = 1, \dots, T. \tag{25}$$

Введем некоторые обозначения. Положим:

$$\widetilde{J}_t = \{ j \in J_t / -c_j = p_j y_t \},$$

$$\widetilde{T} = \Big\{ t / 1 \le t \le T, \widetilde{V}_t > 0, \sum_{\tau=t}^{T} y_\tau = c_t^п \Big\},$$

$$\widetilde{T}(t) = \{ \tau \in \widetilde{T} / \tau \le t \},$$

$$T_+ = \{ t / y_t > 0 \}$$

При $j \notin \bigcup_{t=1}^{T} \widetilde{J}_t$ значение x_j однозначно определяется из (22), (24):

$$x_j = \begin{cases} 0, & c_j + p_j y_{t(j)} > 0, \\ 1, & c_j + p_j y_{t(j)} < 0. \end{cases}$$

При $t \notin \widetilde{T}$ значение v_t однозначно определяе..ся из (23), (25), (12):

$$v_t = \begin{cases} 0, & \tilde{V}_t = 0, \\ 0, & \sum_{\tau=t}^{T} y_\tau - c_t^n < 0, \\ \tilde{V}_t, & \sum_{\tau=t}^{T} y_\tau - c_t^n > 0. \end{cases}$$

Положим

$$A_t = v_0 + \sum_{\substack{\tau=1 \\ \tau \notin \tilde{T}}}^{t} v_\tau - \sum_{j \in J_t \setminus \tilde{J}_t} p_j x_j$$

В качестве оптимальных значений переменных x_j, $j \in \bigcup_{t=1}^{T} \tilde{J}_t$, и v_t, $t \in \tilde{T}$, можно в силу теоремы дополняющей нежесткости [5] взять любое решение системы:

$$0 \le x_j \le 1, \quad j \in \bigcup_{t=1}^{T} \tilde{J}_t; \tag{26}$$

$$0 \le v_t \le \tilde{V}_t, \quad t \in \tilde{T}; \tag{27}$$

$$\sum_{j \in \tilde{J}_t} p_j x_j \le A_t + \sum_{\tau \in \tilde{T}(t)} v_t, \quad t = 1, \dots, T; \tag{28}$$

$$\sum_{j \in \tilde{J}_t} p_j x_j = A_t + \sum_{\tau \in \tilde{T}(t)} v_t, \quad t \in T_+, \tag{29}$$

которое существует по теореме двойственности [5].

Поскольку $x_j \le 1$, то левая часть уравнений (29) не превосходит $\sum_{j \in \tilde{J}_t} p_j$, $t \in T_+$, и, следовательно,

$$\sum_{\tau \in \tilde{T}(t)} v_\tau \le \sum_{j \in \tilde{J}_{t_1}} p_j - A_{t_1}, \; t \in \tilde{T}, \; t_1 \in T_+, \; t \ge t_1. \tag{30}$$

Положим

$$\omega(t) = \min_{t_1 \in T_+, \, t_1 \ge t} \Big\{ \sum_{j \in \tilde{J}_{t_1}} p_j - A_{t_1} \Big\}, \quad t \in \tilde{T},$$

и пусть $\tilde{T} = \{t_1, \dots, t_s\}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_s$. Положим

$$v_{t_1} = \min\{\omega(t_1), \tilde{V}_{t_1}\},$$

$$v_{t_i} = \min\{\omega(t_i) - \sum_{\tau\in\tilde{T}(t_{i-1})} v_\tau , \tilde{V}_{t_i}\}, \quad i = 2,\dots,s.$$

Очевидно, что определенные таким образом значения v_t, $t\in\tilde{T}$, удовлетворяют ограничениям (27). Покажем, что

$$\sum_{\tau\in\tilde{T}(t)} v_\tau + A_t \geqslant 0$$

для любого $t = 1,\dots,T$. Пусть это не так, т.е. для некоторого t^* имеем

$$\sum_{\tau\in\tilde{T}(t^*)} v_\tau + A_{t^*} < 0 .$$

По определению, $\tilde{T}(t^*) = \{t_1,\dots,t_K\}$, где K - максимальный номер, для которого $t_K \leqslant t^*$, следовательно,

$$\sum_{\tau\in\tilde{T}(t^*)} v_\tau + A_{t^*} = \sum_{i=1}^{K} v_{t_i} + A_{t^*} .$$

По определению v_t, $t\in\tilde{T}$, либо

$$\sum_{i=1}^{K} v_{t_i} = \sum_{i=1}^{K} \tilde{V}_{t_i},$$

либо существует номер $\ell \leqslant K$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{K} v_{t_i} = \omega(t_\ell) + \sum_{i=\ell+1}^{K} \tilde{V}_{t_i} .$$

Пусть $\tilde{v}_t$, $t\in\tilde{T}$, $\tilde{x}_j$, $j\in\bigcup_{t=1}^{T}\tilde{J}_t$ - произвольное решение (26)-(29). Для него, в частности, верно неравенство

$$0 \leqslant \sum_{j\in\tilde{J}_{t^*}} p_j \tilde{x}_j \leqslant A_{t^*} + \sum_{\tau\in\tilde{T}(t^*)} \tilde{v}_\tau . \tag{31}$$

Но из (27) и (30) заключаем, что

$$\sum_{i=1}^{K} \tilde{v}_{t_i} = \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{v}_{t_i} + \sum_{i=\ell+1}^{K} \tilde{v}_{t_i} \leqslant \omega(t_\ell) + \sum_{i=\ell+1}^{K} \tilde{V}_{t_i}$$

для любого $\ell \leqslant K$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{K} \tilde{v}_{t_i} \leqslant \sum_{i=1}^{K} v_{t_i} < -A_t ,$$

что противоречит (31).

Заметим далее, что

$$0 \leq A_t + \sum_{\tau \in \tilde{T}(t)} v_\tau \leq \sum_{j \in \tilde{J}_t} p_j$$

для любого $t \in T_+$ и нетрудно подобрать значения $x_j \in [0,1]$, $j \in \tilde{J}_t$, так, что

$$\sum_{j \in \tilde{J}_t} p_j x_j = A_t + \sum_{\tau \in \tilde{T}(t)} v_\tau$$

Оценим трудоемкость построенного алгоритма решения задачи (1′), (3)-(5). На каждом шаге алгоритма решения задачи (18) вычисляются величины $d_t(y)$, t^*, ε^*. Вспомним, что

$$d_t(y) = v^0 + \sum_{\tau \in \tilde{T}(y,1,t)} \tilde{V}_t - \sum_{j \in J_t(y_t)} p_j$$

и на каждом шаге либо увеличивается множество $\tilde{T}(y,1,T)$, либо уменьшается множество $J_t(y_t)$. Поэтому, если множество J_t упорядочено по возрастанию c_j/p_j, то новые значения d_t, $t = 1,\dots,T$, вычисляются за T операций. Для нахождения t^* и ε^* тоже требуется порядка T операций. А поскольку шагов не более чем $(n+T)$, то трудоемкость решения задачи (18) оценивается величиной $O(nT)$. Трудоемкость решения задачи (10)-(13) определяется трудоемкостью решения двойственной задачи и также оценивается величиной $O(nT)$. При решении задачи (6)-(9) упорядочивается вектор (c_j/p_j), $j \in J$, и затем $(T+1)$ раз решаются задачи вида (10)-(13). Таким образом, для задачи (6)-(9) получаем оценку трудоемкости

$$O(nT^2 + n\ln n) = O(n(T^2 + \ln n)).$$

Поскольку при решении задачи (1), (3)-(5) задача (6)-(9) решается m раз, то для предложенного алгоритма окончательно получаем оценку трудоемкости

$$O(mn(T^2 + \ln n)).$$

Поступила в ред.-изд. отдел
10 ноября 1988 г.

Литература

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. - Новосибирск: Наука, 1978. - 333 с.

2. Береснев В.Л., Ибрагимов Г.И., Кочетов Ю.А. Алгоритмы решения задачи оптимального выбора динамического ряда изделий // Задачи поиска оптимальных решений (Управляемые системы). - Новосибирск, 1984. - Вып. 24. - С. 3-19.

3. Geoffrion A.M. Lagrangian relaxation for integer programming // Math. Programming Study, - 1974. - V 2. - P. 82-114.

4. Held M., Wolfe P., Crowder H.O. Validation of subgradient optimization // Math. Programing. - 1974. - V 6. - P. 62-88.

5. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. - М.: Мир, 1974. - 519 с.