Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1989 г., вып. 29

УДК 519.854.3

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

А.И.Ерзин

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача:

$$\min_{i=\overline{1,2}} \sum_{K=1}^{K} c_{Ki} x_K \longrightarrow \max_{\{x_K\}} ; \qquad (1)$$

$$\sum_{K=1}^{K} q_K x_K \leq Q ; \qquad (2)$$

$$x_K \in Z_0^+ , \ K = \overline{1,K} , \qquad (3)$$

где $q_K > 0, \ c_{Ki} \geqslant 0, \ K=\overline{1,K}, \ i=\overline{1,2}; \ Q>0, \ K \in Z^+, \ n \in Z^+$.

Очевидно, что рассматриваемая задача является NP-трудной, так как в частном случае, когда, например, $c_{K1}=c_{K2}, \ K=\overline{1,K}$, она является задачей о ранце, которая принадлежит классу NP-трудных проблем [1].

Предлагается подход к решению поставленной задачи, позволяющий эффективно находить приближенное решение с оценкой погрешности в наихудшем случае. При $q_K = 1$, $K=\overline{1,K}$, предложен полиномиальный алгоритм, строящий решение с относительной погрешностью, не превосходящей $1/\lceil Q \rceil$ ($\lceil Q \rceil$ - целая часть числа Q), т.е. алгоритм асимптотически точный при неограниченном росте Q. В общем случае удается псевдоэффективно построить допустимое решение с оценкой абсолютной погрешности, равной

$$C = \max_{\substack{K=\overline{1,K} \\ i=\overline{1,2}}} c_{Ki} ,$$

и эффективно - с оценкой, равной $2C$.

§ 2. Свойства задачи

Обозначим через $W(x)$ значение целевой функции (ЦФ) на допустимом решении $x=(x_1,\dots,x_K)$, а через W^* - оптимальное значение ЦФ.

Рассмотрим наряду с задачей (1)-(3) задачу

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(\lambda)=\max_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i I^i(x);\\ &\lambda_1+\lambda_2=1;\\ &\lambda_i\geqslant 0,\ i=\overline{1,2}, \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

где

$$\Omega=\left\{x=(x_1,\dots,x_K)/\sum_{K=1}^{K}q_K x_K\leq Q,\ x_K\in Z_0^+,\ K=\overline{1,K}\right\},$$

а

$$I^i(x)=\sum_{K=1}^{K}c_{Ki}x_K,\ x\in\Omega.$$

Справедлива

Л е м м а 1. Имеет место следующее неравенство: $\Phi(\lambda)\geqslant W(x)$, $x\in\Omega$, т.е. $\Phi(\lambda)$ - верхняя граница (ВГ) для W^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(\lambda)$ - решение задачи (I) при некотором фиксированном векторе λ, а x^* - оптимальное решение задачи (1)-(3). Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2}\lambda_i I^i(x(\lambda))\geqslant\sum_{i=1}^{2}\lambda_i I^i(x^*)\geqslant\\ &\geqslant\min_{i=\overline{1,2}}I^i(x^*)\cdot\sum_{i=1}^{2}\lambda_i=\\ &=\min_{i=\overline{1,2}}I^i(x^*)=W^*. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть в дальнейшем

$$\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=1-\lambda,\ \lambda\in[0,1];$$
$$a_K=c_{K1},\ b_K=c_{K2},\ K=\overline{1,K};\ C=\max_{\substack{K=\overline{1,K}\\ i=\overline{1,2}}}c_{Ki};$$

и

$$\Phi(\lambda) = \max_{x \in \Omega} \{\lambda I^1(x) + (1-\lambda) I^2(x)\}. \tag{4}$$

Нам понадобится

Л е м м а 2. Пусть $x(\lambda)$ – решение задачи (4) при фиксированном λ. Положим $\lambda' = \lambda + \varepsilon$, $-\lambda \leq \varepsilon \leq 1-\lambda$. Тогда если через x' обозначить решение задачи (4) с $\lambda = \lambda'$, то справедливы следующие утверждения:

1) если $\varepsilon \geq 0$, то $I^1(x') \geq I^1(x)$ и $I^2(x') \leq I^2(x)$;
2) если $\varepsilon \leq 0$, то $I^1(x') \leq I^1(x)$ и $I^2(x') \geq I^2(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\lambda I^1(x') + (1-\lambda) I^2(x') \leq \lambda I^1(x) + (1-\lambda) I^2(x)$$

и

$$(\lambda+\varepsilon) I^1(x) + (1-\lambda-\varepsilon) I^2(x) \leq (\lambda+\varepsilon) I^1(x') + (1-\lambda-\varepsilon) I^2(x'). \tag{5}$$

Следовательно,

$$\lambda I^1(x') + (1-\lambda) I^2(x') \leq$$
$$\leq \lambda I^1(x') + (1-\lambda) I^2(x') + \varepsilon I^1(x') - \varepsilon I^2(x') - \varepsilon I^1(x) + \varepsilon I^2(x).$$

Пусть $\varepsilon \geq 0$. Тогда из предыдущего неравенства получим, что

$$I^1(x') + I^2(x) \geq I^1(x) + I^2(x'). \tag{6}$$

Нужно показать, что $I^1(x') \geq I^1(x)$. Предположим противное, т. е. $I^1(x') < I^1(x)$. Тогда из (6) вытекает, что $I^2(x) > I^2(x')$. Следовательно, используя (5), получаем $I^1(x) \leq I^1(x')$, что противоречит предположению. Значит, в случае, когда $\varepsilon \geq 0$, $I^1(x') \geq I^1(x)$.

Аналогично доказываются другие утверждения леммы.

В заключение этого параграфа отметим

С в о й с т в о 1. Пусть $x(\lambda)$ – решение задачи (4) при некотором $\lambda \in [0,1]$. Тогда если $I^1(x(\lambda)) = I^2(x(\lambda))$, то $x(\lambda)$ – оптимальное решение задачи (1)-(3).

Действительно,

$$W^* \leq \Phi(\lambda) = \lambda I^1(x(\lambda)) + (1-\lambda) I^2(x(\lambda)) = I^1(x(\lambda)) = I^2(x(\lambda)),$$

т.е. ВГ совпадает со значением ЦФ на этом решении. Следовательно, $x(\lambda)$ – оптимальное решение.

§ 3. Метод решения в однородном случае

Пусть $q_K = 1,\ K = \overline{1,K}$, а $N = \lceil Q \rceil$. Перепишем задачу в виде:

$$\min \left\{ \sum_{K=1}^{K} a_K x_K,\ \sum_{K=1}^{K} b_K x_K \right\} \longrightarrow \max_{\{x_K\}} ; \tag{7}$$

$$\sum_{K=1}^{K} x_K = N ; \tag{8}$$

$$x_K \in \mathbb{Z}_0^+ ,\ K = \overline{1,K} ; \tag{9}$$

Очевидно, что в этом случае задача остается NP -трудной, так как ее можно переписать в эквивалентном виде как двумерную задачу о ранце.

Обозначим

$$\Omega' = \left\{ x = (x_1, \dots, x_K) / \sum_{K=1}^{K} x_K = N,\ x_K \in \mathbb{Z}_0^+,\ K = \overline{1,K} \right\},$$

и рассмотрим задачу

$$\lambda I^1(x) + (1-\lambda) I^2(x) \longrightarrow \max_{x \in \Omega'} ,\quad \lambda \in [0,1] . \tag{10}$$

Из леммы 1 следует, что

$$\Phi(\lambda) = \max_{x \in \Omega'} (\lambda I^1(x) + (1-\lambda) I^2(x))$$

является ВГ для оптимального значения ЦФ при любом $\lambda \in [0,1]$. Значит, для получения наименьшей ВГ целесообразно минимизировать $\Phi(\lambda)$ по $\lambda \in [0,1]$. Так как $\Phi(\lambda)$ - выпуклая, то для ее минимизации можно воспользоваться, например, методами дихотомии или золотого сечения [2]. Если $\delta > 0$ – точность, с которой мы хотим найти точку минимума функции $\Phi(\lambda)$, то за $O(\log_2 1/\delta)$ шагов алгоритм дихотомии или золотого сечения найдет искомое λ .

Специфика задачи позволяет найти $\min\limits_{\lambda \in [0,1]} \Phi(\lambda)$ за $O(K^2)$ арифметических операций. Действительно, нетрудно заметить, что, решая задачу (10) для фиксированного λ , мы находим

$$\lambda a_\ell + (1-\lambda) b_\ell = \max_{K = \overline{1,K}} \{ \lambda a_K + (1-\lambda) b_K \}$$

и полагаем $x_\ell = N$, а $x_K = 0,\ K \neq \ell$.

Уравнениям $y = \lambda a_K + (1-\lambda) b_K,\ K = \overline{1,K}$, соответствуют на плоскости (λ, y) прямые линии. При решении задачи (10) для каждого фиксированного

λ будет выбран тот номер K, который соответствует самой "высокой" прямой. Следовательно, для нахождения минимума функции $\Phi(\lambda)$ достаточно найти минимум мажоранты семейства прямых мощности K на отрезке $[0, 1]$. Это можно сделать за $O(K^2)$ арифметических операций.

Если же воспользоваться общими методами одномерной оптимизации, то в случае целочисленных C_{Ki}, $K=\overline{1,K}$, $i=\overline{1,2}$, можно найти $\min\limits_{\lambda\in[0,1]} \Phi(\lambda)$ за $O(K\log_2 C)$ операций.

Покажем это. Для этого достаточно заметить, что две соседние точки излома мажоранты не могут находиться на расстоянии меньшем $1/C^2$. Пусть λ и λ' - две соседние точки излома мажоранты. Причем $\lambda<\lambda'$, $b_1<b<b_2$, $a_2<a<a_1$ и пересечение прямых $\lambda a+(1-\lambda)b$ и $\lambda a_2+(1-\lambda)b_2$ происходит в точке λ, а прямых $\lambda a+(1-\lambda)b$ и $\lambda a_1+(1-\lambda)b_1$ - в точке λ'.

Оценим снизу разность $\lambda'-\lambda$. Заметим, что $\lambda a+(1-\lambda)b=\lambda a_2+(1-\lambda)b_2$ и $\lambda' a+(1-\lambda')b=\lambda' a_1+(1-\lambda')b_1$. Отсюда

$$\lambda=\frac{b_2-b}{a-a_2+b_2-b},\quad \lambda'=\frac{b_1-b}{a-a_1+b_1-b}.$$

Учитывая целочисленность C_{Ki}, $K=\overline{1,K}$, $i=\overline{1,2}$, получаем

$$\lambda'-\lambda=\frac{b-b_1}{a_1-a+b-b_1}-\frac{b_2-b}{a-a_2+b_2-b}=\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\delta_2}-\frac{\Delta_2}{\Delta_2+\delta_1},$$

где $\Delta_1=b-b_1$, $\Delta_2=b_2-b$, $\delta_1=a-a_2$, $\delta_2=a_1-a$. При этом $\Delta_1+\Delta_2\le C$ и $\delta_1+\delta_2\le C$. Так как $\lambda'-\lambda>0$, то

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\delta_2}-\frac{\Delta_2}{\Delta_2+\delta_1}>0.$$

Откуда $\Delta_1\delta_1\ge\Delta_2\delta_2+1$. Значит,

$$\lambda'-\lambda\ge\frac{1}{(\Delta_1+\delta_2)(\Delta_2+\delta_1)}\ge\frac{1}{(C-\Delta_2+\delta_2)(C+\Delta_2-\delta_1)}=$$

$$=\frac{1}{C^2-(\Delta_2-\delta_2)^2}\ge\frac{1}{C^2}.$$

Следовательно, в случае целочисленных C_{Ki} трудоемкость нахождения $\min\limits_{\lambda\in[0,1]}\Phi(\lambda)$ равна $O(K\min\{K,\log_2 C\})$.

Пусть в дальнейшем λ^* такое, что $\Phi(\lambda^*)\le\Phi(\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$. Из свойства 1 следует

Свойство 2. Если λ^* не единственно, т.е. минимум мажоранты достигается на отрезке, соответствующем, например, прямой $y=\lambda a_\ell+$

$+(1-\lambda)b_\ell$, где $a_\ell = b_\ell$, то $x=(x_1,\dots,x_K)$, $x_\ell = N$, а $x_k = 0$, $k \neq \ell$, является оптимальным решением задачи (7)-(9).

Свойство 3. Пусть $\lambda^* = 0$ $(\lambda^* = 1)$ и $y = \lambda a_\ell + (1-\lambda)b_\ell$ – составляющая мажоранты, пересекающаяся с осью $\lambda = 0$ $(\lambda = 1)$. Тогда решение $\tilde{x} = (\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_K)$, где $\tilde{x}_\ell = N$, а $x_k = 0$, $k \neq \ell$, является оптимальным для задачи (7)-(9).

Покажем это для $\lambda^* = 0$. Имеем $I^2(\tilde{x}) \geq W^*$. Но так как $\lambda^* = 0$, то $a_\ell > b_\ell$ и, следовательно, $I^1(\tilde{x}) \geq I^2(\tilde{x}) \geq W^*$. Свойство доказано.

Пусть $0 < \lambda^* < 1$ и притом единственно. Следовательно, точкой минимума мажоранты является точка пересечения по крайней мере двух прямых, т.е. при $\lambda = \lambda^*$ как минимум две величины из $\{\lambda^* a_k + (1-\lambda^*) b_k,\ k = \overline{1,K}\}$ имеют одинаковые (максимальные) значения. Пусть k_1 и k_2 – номера, на которых принимают максимальное значение величины $\lambda^* a_k + (1-\lambda^*) b_k$, $k = \overline{1,K}$; и $a_1 = a_{k_1}$, $b_1 = b_{k_1}$, $a_2 = a_{k_2}$, $b_2 = b_{k_2}$. Так как λ^* - единственная точка пересечения прямых $\lambda^* a_1 + (1-\lambda^*) b_1$ и $\lambda^* a_2 + (1-\lambda^*) b_2$ и $\lambda^* \in [0,1]$, то можно считать $a_1 > a_2$ и $b_2 > b_1$. Ниже опустим звездочку у λ^*.

Очевидно, что подмножеством решений задачи (10) при таком λ является

$$\{x^\ell = (0,\dots,0,\underset{k_1}{N-\ell},0,\dots,0,\underset{k_2}{\ell},0,\dots,0),\ \ell = \overline{0,N}\}.$$

При этом ВГ равна

$$\Phi(\lambda) = \lambda((N-\ell)a_1 + \ell a_2) + (1-\lambda)((N-\ell)b_1 + \ell b_2),\ \ell = \overline{0,N}.$$

В частности,

$$\Phi(\lambda) = N(\lambda a_1 + (1-\lambda) b_1) = N(\lambda a_2 + (1-\lambda) b_2). \tag{11}$$

Заметим, что

$$I^1(x^\ell) = (N-\ell)a_1 + \ell a_2 \tag{12}$$

убывает с ростом ℓ, а

$$I^2(x^\ell) = (N-\ell)b_1 + \ell b_2 \tag{13}$$

возрастает с ростом ℓ. Следовательно, можно найти $\bar{\ell}$, при котором $(N-\bar{\ell})a_1 + \bar{\ell} a_2 = (N-\bar{\ell}) b_1 + \bar{\ell} b_2$ или

$$N(a_1 - b_1) = (a_1 - a_2 + b_2 - b_1)\bar{\ell}. \tag{14}$$

Из (11) следует, что

$$\lambda(a_1 - x_2) = (1-\lambda)(b_2 - b_1) \tag{15}$$

и

$$\lambda(a_1 - a_2 + b_2 - b_1) = b_2 - b_1.$$

Из (14) и последнего равенства получаем

$$N(a_1 - b_1) = (b_2 - b_1)\bar{l}/\lambda = (a_1 - a_2)\bar{l}/(1-\lambda)$$

или

$$\bar{l} = \frac{N(a_1 - b_1)\lambda}{b_2 - b_1} = \frac{N(a_1 - b_1)(1-\lambda)}{a_1 - a_2} \tag{16}$$

Так как $a_1 > b_1$, то $\bar{l} > 0$. Если $\bar{l} > N$, то можно положить $l = N$. Тогда $I^1(x^N) \geqslant I^2(x^N) = b_2 N \geqslant \Phi(\lambda)$ Значит, x^N - оптимальное решение.

Пусть $0 < \bar{l} < N$ Рассмотрим два решения:

$$x' = (0, \dots, 0, \underset{K_1}{N - \lceil \bar{l} \rceil}, 0, \dots, 0, \underset{K_2}{\lceil \bar{l} \rceil}, 0, \dots, 0), \tag{17}$$

$$x'' = (0, \dots, 0, \underset{K_1}{N - \rceil \bar{l} \lceil}, 0, \dots, 0, \underset{K_2}{\rceil \bar{l} \lceil}, 0, \dots, 0), \tag{18}$$

где $\lceil \bar{l} \rceil$ $(\rceil \bar{l} \lceil)$ - меньшее (большее) ближайшее целое число к $\bar{l}$. Обозначим $\delta = \bar{l} - \lceil \bar{l} \rceil$. Из (11)-(13) и (16) имеем

$$I^1(x') = N a_1 - (a_1 - a_2)(\bar{l} - \delta) = \Phi(\lambda) + \delta(a_1 - a_2);$$

$$I^2(x') = N b_1 + (b_2 - b_1)(\bar{l} - \delta) = \Phi(\lambda) - \delta(b_2 - b_1);$$

$$I^1(x'') = N a_1 - (a_1 - a_2)(\bar{l} + (1-\delta)) = \Phi(\lambda) - (1-\delta)(a_1 - a_2);$$

$$I^2(x'') = N b_1 + (b_2 - b_1)(\bar{l} + (1-\delta)) = \Phi(\lambda) + (1-\delta)(b_2 - b_1).$$

Пусть $\bar{x}$ - наилучшее из решений x' и x''. Его относительную погрешность $\varepsilon(\bar{x}) = (W^* - W(\bar{x}))/W^*$ можно оценить сверху следующей цепочкой неравенств:

$$\varepsilon(\bar{x}) \leq \frac{\Phi(\lambda) - max\{\Phi(\lambda) - \delta(b_2 - b_1), \Phi(\lambda) - (1-\delta)(a_1 - a_2)\}}{\Phi(\lambda)} \leq$$

$$\leq min\left\{\frac{\delta b_2}{\Phi(\lambda)}, \frac{(1-\delta)a_1}{\Phi(\lambda)}\right\} \leq$$

$$\leq min\left\{\frac{\delta b_2}{N(1-\lambda)b_2}, \frac{(1-\delta)a_1}{N\lambda a_1}\right\} = \frac{1}{N} min\left\{\frac{\delta}{1-\lambda}, \frac{1-\delta}{\lambda}\right\}$$

Максимум по λ последнего выражения достигается при $\lambda = 1 - \delta$. Следовательно, $\varepsilon(\bar{x}) \leq 1/n$.

Доказано следующее

Утверждение 1. Пусть λ такое, что $\Phi(\lambda) \le \Phi(\lambda')$, $\lambda' \in [0,1]$. Тогда для $\bar{x}$ – наилучшего из решений x' и x'', определенных выражениями (17), (18), справедлива оценка

$$\varepsilon(\bar{x}) \le 1/N.$$

Опишем алгоритм построения $\bar{x}$ по шагам.

Алгоритм A_1

Шаг 1. Находим минимум $\Phi(\lambda)$, $\lambda \in [0,1]$, т.е. минимум мажоранты семейства прямых $\{\lambda a_K + (1-\lambda) b_K,\ K = \overline{1,K}\}$ на отрезке [0, 1]. Пусть

$$\Phi(\lambda^*) = \min_{\lambda \in [0,1]} \Phi(\lambda).$$

Шаг 2. Если $\lambda^* = 0$ или $\lambda^* = 1$, или λ^* не единственно, то оптимальное решение находится с использованием свойств 2 и 3. Иначе находим $\bar{\ell}$ и x', x'', $\bar{x}$.

Шаг 3. Стоп.

Оценим трудоемкость описанного алгоритма. Очевидно, что самым трудоемким является шаг 1 - нахождение минимума мажоранты. На это нужно затратить $O(K^2)$ арифметических операций в общем случае и $O(K \min\{K, \log_2 C\})$ в случае целых C_{Ki}, $K = \overline{1,K}$, $i = \overline{1,2}$. При этом в памяти достаточно хранить $O(K)$ чисел.

§ 4. Решение задачи в общем случае

Будем рассматривать задачу (1)-(3), которую перепишем в следующем виде:

$$\min\left\{\sum_{K=1}^{K} a'_K y_K,\ \sum_{K=1}^{K} b'_K y_K\right\} \to \max_{\{y_K\}}; \tag{19}$$

$$\sum_{K=1}^{K} y_K \le Q; \tag{20}$$

$$y_K \in \{0, q_K, 2q_K, \dots\},\quad K = \overline{1,K}, \tag{21}$$

где $a'_K = a_K / q_K$, $b'_K = b_K / q_K$, $K = \overline{1,K}$.

Аналогично, как в § 3, будем рассматривать задачу

$$\Phi(\lambda)=\max_{y\in\Omega}\left\{\lambda I^1(y)+(1-\lambda)I^2(y)\right\}, \qquad (22)$$

где

$$\Omega=\left\{y=(y_1,\dots,y_K)/\sum_{k=1}^{K}y_k\le Q,\ y_k\in\{0,q_k,2q_k,\dots\},\ k=\overline{1,K}\right\},$$

$$I^1(y)=\sum_{k=1}^{K}a_k' y_k,\quad I^2(y)=\sum_{k=1}^{K}b_k' y_k .$$

Выше было показано, что решение задачи (22) дает ВГ значения ЦФ исходной задачи при любых $\lambda\in[0,1]$. Решение же задачи (22) – сложная проблема, так как она принадлежит классу NP-трудных задач. В случае же целочисленности q_k, $k=\overline{1,K}$, ее можно решить псевдоэффективно с трудоемкостью, равной $O(KQ)$, и памятью $O(Q+K)$ методом динамического программирования (ДП).

Для получения минимума $\Phi(\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$, можно воспользоваться, например, методом золотого сечения. Если $\delta'>0$ – точность, с которой мы хотим найти λ^* такое, что

$$\Phi(\lambda^*)=\min_{\lambda\in[0,1]}\Phi(\lambda),\ \text{т.е.}\ |\lambda^*-\bar\lambda|\le\delta',$$

то за $O(\log_2 1/\delta')$ шагов алгоритма золотого сечения мы найдем $\Phi(\bar\lambda)$. Если учесть, что на каждом шаге одномерной оптимизации по λ приходится решать задачу о ранце, то суммарную трудоемкость построения ВГ можно оценить величиной $O(KQ\log_2 1/\delta')$.

Если Q большое, то иногда целесообразно получать ВГ решением соответствующей матричной игры или приближенным решением задачи о ранце.

Что касается приближенного решения, то его можно построить, используя утверждения леммы 2. Например, пусть $y(\lambda)$ – решение задачи (22) и $I^1(y)<I^2(y)$. Тогда, увеличив λ, т.е. положив $\lambda'=\lambda+\mu$, $\mu>0$, можно решить задачу (22) при новом λ. При этом в силу леммы 2 значение I^1 может только возрасти, а I^2 – уменьшиться. Если сохраняется неравенство $I^1(y(\lambda'))<I^2(y(\lambda'))$, то можно еще увеличить λ на некоторое μ'. В противном случае выполняется неравенство $I^1(y')>I^2(y')$, $y'=y(\lambda')$. (Если $I^1(y')=I^2(y')$, то, по свойству 1, y' оптимально.) Тогда следует уменьшить λ, например, на $\mu/2$. При этом I^2 может только возрасти, а I^1 – уменьшиться, и т.д. В результате получим $\lambda\in[0,1]$, при котором для некоторого $\delta>0$ выполняются неравенства

$$I^1(y(\lambda-\delta)) < I^2(y(\lambda-\delta)),\ I^1(y(\lambda+\delta)) > I^2(y(\lambda+\delta)).$$

Обозначим $y^1 = y(\lambda+\delta)$, $y^2 = y(\lambda-\delta)$. Очевидно, что $\Phi(\bar\lambda) \le \min\{I^1(y^1), I^2(y^2)\}$. Для построения приближенного решения используем

Алгоритм A_2

Шаг 0. Упорядочим q_K, $K=\overline{1,K}$, по неубыванию, т.е. $q_K \le q_{K+1}$, $K=\overline{1,K-1}$.

Пусть $V_1 = \{K / y_K^1 < y_K^2\}$, $V_2 = \{K / y_K^1 > y_K^2\}$,

$V = V_1 \cup V_2$; $\Delta_i = Q - \sum\limits_{K=1}^{K} y_K^i$, $i=\overline{1,2}$, и $\bar y = (\bar y_1, \ldots, \bar y_K)$

такое, что $W(\bar y) \ge W(y^i)$, $i=\overline{1,2}$.

Шаг 1. Пусть $\ell \in V$ такое, что $\ell \le K$, $K \in V$. Положим

$$i = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell \in V_1; \\ 2, & \text{если } \ell \in V_2; \end{cases}$$

$$y_K = y_K^i,\quad K=\overline{1,K};$$
$$y_\ell = y_\ell + q_\ell;$$
$$\beta = 0.$$

Шаг 2. Найдем $m \in V_{\bar i}$, для которого $\beta q_m + \Delta_i \ge q_\ell$, где

$$\bar i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 2; \\ 2, & \text{если } i = 1. \end{cases}$$

Если такого m не существует, то полагаем $\beta = \beta + 1$ и переходим на шаг 2. Иначе переходим на шаг 3.

Шаг 3. Полагаем

$$y_m = y_m - \beta q_m;$$
$$\Delta_i = \Delta_i + \beta q_m - q_\ell.$$

Если $\min\{I^1(\bar y), I^2(\bar y)\} < \min\{I^1(y), I^2(y)\}$, то полагаем

$$\bar y_K = y_K,\quad K=\overline{1,K}.$$

Пересчитываем V_1, V_2 и V. Если $V = \emptyset$, то переходим на шаг 4. Иначе полагаем

$$y_l^i = y_l\,;$$
$$y_m^i = y_m$$

и переходим на шаг 1.

Шаг 4. Стоп.

Очевидно, что решение $\bar{y}$, построенное по описанному выше алгоритму, не хуже решений y^1 и y^2.

Утверждение 2. Справедливо следующее неравенство:

$$W^* - W(\bar{y}) \leq C\,. \tag{23}$$

Доказательство. На каждом шаге перехода от одного решения y^i к другому величина I^1 изменяется на число, ограниченное по модулю $|a_l - \rceil q_l/q_m \lceil a_m|$, а I^2 – на число, ограниченное $|b_l - \rceil q_l/q_m \lceil b_m|$. Заметим, что для W^* справедливо соотношение

$$\max\{I^1(y^2), I^2(y^1)\} \leq W^* \leq \min\{I^1(y^1), I^2(y^2)\}\,.$$

Следовательно, с учетом $q_l \leq q_m$ получаем, что для $\bar{y}$ справедлива оценка

$$W^* - W(\bar{y}) \leq \max_{\{l,m\}} \max\{|a_l - a_m|, |b_l - b_m|\} \leq C\,.$$

Утверждение доказано.

Оценим трудоемкость получения решения $\bar{y}$. Оптимизация по λ в этом случае хоть и желательна, но не обязательна. Достаточно решить задачу (22) при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. В случае, если выполнится хотя бы одно из неравенств

$$I^1(y(0)) \geq I^2(y(0)),\ I^2(y(1)) \geq I^1(y(1)),$$

то оптимальное решение задачи (19)-(21) построено. В противном случае имеем $I^1(y(0)) < I^2(y(0))$, т.е. $y^2 = y(0)$ и $I^2(y(1)) < I^1(y(1))$, т.е. $y^1 = y(1)$.

Трудоемкость получения решений y^1 и y^2 в случае целочисленных q_k, $k = \overline{1,K}$, равна $O(QK)$ при памяти $O(Q+K)$. В алгоритме A_2 трудоемкость шага 0 равна $O(K\log_2 K)$ (упорядочивание q_k, $k = \overline{1,K}$), а шаг 1 может повторяться не более Q раз. Учитывая, что его трудоемкость равна $O(K)$, можно заключить, что трудоемкость построения $\bar{y}$ равна $O(KQ + K\log_2 K)$ при памяти, равной $O(K+Q)$. При этом абсолютная погрешность построенного решения не превосходит максимального элемента матрицы $\|c_{ki}\|$, $k = \overline{1,K}$, $i = \overline{1,2}$.

З а м е ч а н и е 1. В случае нецелочисленных q_K, $K=\overline{1,K}$, метод ДП неприменим для решения задачи о ранце. С другой стороны, при целочисленных q_K, но больших Q, метод ДП может оказаться нереализуем из-за большой трудоемкости и памяти. В этом случае целесообразно решать задачу (22) приближенно. Например, следующим способом.

Если в задаче (22) отказаться от требования дискретности переменных (21), то решение задачи

$$\mathcal{F}(\lambda)=\max_{y\in\bar\Omega}\{\lambda I^1(y)+(1-\lambda)I^2(y)\}, \tag{24}$$

где

$$\bar\Omega=\{y=(y_1,\dots,y_K)/\sum_{K=1}^{K}y_K\le Q,\ y_K\ge 0,\ K=\overline{1,K}\},$$

также дает ВГ для W^* (так как $\Omega\subset\bar\Omega$). Решить же задачу (24) проще. Достаточно при фиксированном λ найти максимальное из чисел $\lambda a'_K+(1-\lambda)\,b'_K$, $K=\overline{1,K}$, и положить соответствующую переменную равной Q.

Минимизация же $\mathcal{F}(\lambda)$ по $\lambda\in[0,1]$ совпадает с решением $(2\times K)$-матричной игры, которое связано с нахождением минимума мажоранты семейства прямых (см. § 3).

Если λ^* - точка минимума $\mathcal{F}(\lambda)$ совпадает с 0, 1 или неединственна, то в качестве приближенного решения задачи (19)-(21) можно взять $y=(y_1,\dots,y_K)$, где $y_p=\lceil Q/q_p\rceil q_p$; $y_K=0$, $K\neq p$; а p такое, что $\lambda^*a'_p+(1-\lambda^*)b'_p\ge\lambda^*a'_K+(1-\lambda^*)b'_K$, $K=\overline{1,K}$. В этом случае $W^*-W(y)\le C$. Покажем это, например, для $\lambda^*=0$.

Пусть $I^2(y(0))=b'_2Q$, а $I^1(y(0))=a'_2Q$. В качестве допустимого (в смысле ограничения (21)) решения можно взять $y=(y_1,\dots,y_K)$, $y_2=\lceil Q/q_2\rceil q_2$; $y_K=0$, $K\neq 2$. Тогда

$$W^*-W(y)\le$$

$$\le\max\{a_2(\frac{Q}{q_2}-\lceil\frac{Q}{q_2}\rceil),\ b_2(\frac{Q}{q_2}-\lceil\frac{Q}{q_2}\rceil)\}\le C.$$

Пусть теперь $0<\lambda^*<1$ и притом единственно. Тогда можно проделать выкладки, аналогичные проведенным в § 3 (у λ^* звездочку опустим), взяв вместо $\Phi(\lambda)$ функцию $\mathcal{F}(\lambda)$, а вместо a_1, b_1, a_2, b_2 последовательность a'_1, b'_1, a'_2, b'_2. При этом нетрудно убедиться, что

$$\bar{l}=\frac{Q(a'_1-b'_1)\lambda}{b'_2-b'_1}=\frac{Q(a'_1-b'_1)(1-\lambda)}{a'_1-a'_2}.$$

Определим допустимые решения:

$$y' = (0,\dots,0,\underset{k_1}{\ell_1'},0,\dots,0,\underset{k_2}{\ell_2'},0,\dots,0),$$

$$y'' = (0,\dots,0,\underset{k_1}{\ell_1''},0,\dots,0,\underset{k_2}{\ell_2''},0,\dots,0),$$

где ℓ_2' - ближайшее к $\bar{\ell}$ слева кратное q_2 целое число, т.е. $\ell_2' = \rho q_2$ (ρ - целое положительное число, для которого выполняется соотношение $\rho q_2 \le \bar{\ell} \le (\rho+1) q_2$). А ℓ_2'' - ближайшее к $\bar{\ell}$ справа кратное q_2 целое число, т.е. $\ell_2'' = (\rho+1) q_2$.

Тогда в качестве ℓ_1' можно взять

$$\ell_1' = \left\lceil \frac{Q - \ell_2'}{q_1} \right\rceil q_1 = \left\lceil \frac{Q - \rho q_2}{q_1} \right\rceil q_1 ,$$

а в качестве ℓ_1'' величину

$$\ell_1'' = \left\lceil \frac{Q - \ell_2''}{q_1} \right\rceil q_1 = \left\lceil \frac{Q - (\rho+1) q_2}{q_1} \right\rceil q_1 .$$

Очевидно, что y' и y'' удовлетворяют ограничению (21) и, следовательно, являются допустимыми решениями задачи (19)-(21). Пусть $\delta = \bar{\ell} - \ell_2'$. Тогда $\ell_2' = \bar{\ell} - \delta,\ \ell_2'' = \bar{\ell} + q_2 - \delta,\ 0 < \delta < q_2$. При этом

$$I^1(y') = \ell_1' a_1' + \ell_2' a_2' = a_1 \left\lceil \frac{Q - \ell_2'}{q_1} \right\rceil + \ell_2' \frac{a_2}{q_2} \geq$$

$$\geq a_1' Q - a_1 - (a_1' - a_2') \ell_2' = \mathcal{F}(\lambda) - a_1 + (a_1' - a_2') \delta \geq \mathcal{F}(\lambda) - C ;$$

$$I^2(y') = \ell_1' b_1' + \ell_2' b_2' \geq b_1' Q - b_1 + (b_2' - b_1') \ell_2' =$$

$$= \mathcal{F}(\lambda) - b_1 - (b_2' - b_1') \delta \geq \mathcal{F}(\lambda) - C \left(1 + \frac{\delta}{q_2}\right) ;$$

$$I^1(y'') = \ell_1'' a_1' + \ell_2'' a_2' \geq a_1' Q - a_1 - (a_1' - a_2')(\bar{\ell} + q_2 - \delta) =$$

$$= \mathcal{F}(\lambda) - a_1 - (a_1' - a_2')(q_2 - \delta) \geq \mathcal{F}(\lambda) - C\left(1 + \frac{q_2 - \delta}{q_1}\right) ;$$

$$I^2(y'') = \ell_1'' b_1' + \ell_2'' b_2' \geq \mathcal{F}(\lambda) - b_1 + (b_2' - b_1')(q_2 - \delta) \geq$$

$$\geq \mathcal{F}(\lambda) - C .$$

Следовательно,

$$W^* - W(\bar{y}) \le C \min\left\{1 + \frac{\delta}{q_2},\ 1 + \frac{q_2 - \delta}{q_1}\right\} \le$$

$$\le C\left(1 + \frac{q_2}{q_1 + q_2}\right) \le 2C,$$

где $\bar{y}$ - наилучшее из решений y' и y''.

Утверждение 3. Описанным выше методом с трудоемкостью, равной $O(K^2)$ (а в случае целочисленных c_{ki} и q_k, $k = \overline{1,K}$, $i = \overline{1,2}$, трудоемкостью $O(K \min\{K, (\log_2 C + \log_2 Q)\})$, строится решение $\bar{y}$, для которого абсолютная погрешность

$$W^* - W(\bar{y}) \le 2C. \tag{25}$$

Доказательство. Оценку для абсолютной погрешности мы получили. Что касается трудоемкости, то она, как и прежде, определяется трудоемкостью нахождения минимума мажоранты. В случае перебора точек излома мажоранты потребуется $O(K^2)$ арифметических операций. Если же воспользоваться обшими методами одномерной оптимизации, то в случае целочисленных c_{ki}, q_k, $k = \overline{1,K}$, $i = \overline{1,2}$, трудоемкость нахождения λ^* равна $O(K \min\{K, (\log_2 C + \log_2 Q)\})$. Для доказательства этого достаточно показать, что две соседние точки излома мажоранты λ и λ' не могут находиться на расстоянии меньше чем $1/(Q^3 C^2)$.

Пусть $\lambda' > \lambda$ и $b_1' < b' < b_2'$, $a_2' < a' < a_1'$. Кроме того $\lambda a' + (1-\lambda) b' = \lambda a_2' + (1-\lambda) b_2'$ и $\lambda' a' + (1-\lambda') b' = \lambda' a_1' + (1-\lambda) b_1'$. Следовательно,

$$\lambda' - \lambda = \frac{b' - b_1'}{a_1' - a' + b' - b_1'} - \frac{b_2' - b'}{a' - a_2' + b_2' - b'}.$$

Пусть $\Delta_1 = b' - b_1'$, $\Delta_2 = b_2' - b'$, $\delta_1 = a' - a_2'$, $\delta_2 = a_1' - a'$. Тогда, учитывая, что $\lambda' - \lambda > 0$, $\Delta_1 + \Delta_2 \le C$, $\delta_1 + \delta_2 \le C$ и q_k, c_{ki}, $k = \overline{1,K}$, $i = \overline{1,2}$, целые, получаем

$$\lambda' - \lambda = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \delta_2} - \frac{\Delta_2}{\Delta_2 + \delta_1} \ge \frac{1}{q\, q_1 q_2} \cdot \frac{1}{(\Delta_1 + \delta_2)(\Delta_2 + \delta_1)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{Q^3} \cdot \frac{1}{(C - \Delta_2 + \delta_2)(C + \Delta_2 - \delta_2)} \ge \frac{1}{Q^3 C^2}.$$

Утверждение доказано.

Замечание 2. Если же, несмотря на большую вычислительную сложность, требуется решить задачу (19)-(21) как можно точнее, то следует воспользоваться либо методом ветвей и границ, либо (в случае целочисленных q_k и a_k или b_k, $k=\overline{1,K}$) следующим методом.

Пусть для определенности q_k и b_k, $k=\overline{1,K}$, - целые положительные числа. Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{k=1}^{K} a_k x_k \longrightarrow \max_{\{x_k\}} ; \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{K} q_k x_k \le Q ; \tag{27}$$

$$\sum_{k=1}^{K} b_k x_k \geqslant M ; \tag{28}$$

$$x_k \in Z_0^+ , \quad k=\overline{1,K} . \tag{29}$$

Это двумерная задача о ранце, которую можно решить двухпараметрическим ДП с трудоемкостью, равной $O(K\,Q\,M)$ Очевидно, что при $M = M^* = W^*$ решение задачи (26)-(29) будет и решением задачи (19)-(21). Если значение M^* заранее не известно, то его можно найти с достаточной точностью с помощью дихотомии по M Действительно, пусть сначала

$$M = \max_{x\in\Omega} \sum_{k=1}^{K} b_k x_k = B .$$

Если при этом решение задачи (26)-(29) $x(M)$ окажется таким, что $I^1(x(M)) \geqslant B = I^2(x(M))$, то $x(M)$ и есть оптимальное решение нашей задачи. В противном случае положим $M := B/2$ и решим задачу (26)-(29). Если для нового решения $x(M)$ выполняется соотношение $I^1(x(M)) \geqslant M$, то полагаем $M := M + B/4$. В противном случае полагаем $M := M - B/4$. Решаем задачу (26)-(29) с новым M и т.д. В случае уменьшения M область допустимости задачи (26)-(29) расширяется и I^1 может только возрасти. В случае же увеличения M возрастает I^2, а I^1 может только уменьшиться.

В результате такой процедуры мы получим некоторое M^*, при котором $x(M^*)$ будет оптимальным решением задачи (19)-(21).

Так как b_k - целые, то для построения M^* достаточно решать задачу (26)-(29) не более $O(\log_2 B)$ раз. Трудоемкость получения решения $x(M)$ равна $O(K\,Q\,M)$. Следовательно, построение x^* потребует выполнения $O(K\,Q\,B\log_2 B)$ арифметических операций при памяти порядка $K\,Q\,B$.

З а м е ч а н и е 3. Задачу (26)-(29) не обязательно решать точно. Для построения приближенного решения можно воспользоваться работами С.Е.Гвоздева (см. [3-4]). Тогда в случае, когда $q_K = 1$, $K = \overline{1,K}$, и c_{Ki}, $K = \overline{1,K}$, $i = \overline{1,2}$, целые, с трудоемкостью, $O(K \log_2 t)$, где $t = \max\{C, Q\}$, можно построить допустимое решение [4] с оценкой для относительной погрешности, равной

$$C/(Q \cdot \min_{\substack{K=\overline{1,K} \\ i=\overline{1,2}}} c_{Ki}).$$

Несложно получить оценку, равную $1/(N-1)$. В случае же произвольных целочисленных q_K и c_{Ki}, $K = \overline{1,K}$, $i = \overline{1,2}$, с трудоемкостью, равной $O(K \log_2^2 t)$, строится приближенное решение [3], для которого абсолютная погрешность не превосход..т $2C$.

В случае нецелочисленных q_K и c_{Ki} подход С.Е.Гвоздева для решения рассматриваемой задачи может оказаться весьма трудоемким.

Поступила в ред.-изд. отдел
29 июня 1988 г.

Л и т е р а т у р а

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416 с.

2. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1980. - 256 с.

3. Гвоздев С.Е. О двух задачах дискретной оптимизации. // Управляемые системы. - Новосибирск, 1979. - Вып. 19. - С. 22-30.

4. Гвоздев С.Е. Об ε -оптимальном решении некоторых дискретных экстремальных задач. // Управляемые системы. - Новосибирск, 1979. - Вып. 19. - С. 31-39.