Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1989 г., вып. 29.

УДК 519.8

О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

Л.Е.Горбачевская

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую постановку нелинейной задачи размещения в виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{g_i\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j x_{ij}\right)+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j c_{ij} x_{ij}\right\}\longrightarrow \min_{(x_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1, \quad j=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}, \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\{1,\dots,m\}$ – множество, соответствующее перечню пунктов производства однородного продукта;

$V=\{1,\dots,n\}$ – множество, соответствующее совокупности пунктов потребления;

φ_j – потребность в продукте в j-м пункте потребления, $j=\overline{1,n}$, $\varphi_j>0$;

$g_i(x)$ – затраты на производство продукта в объеме x в i-м пункте производства;

c_{ij} – затраты, связанные с перевозкой единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления;

x_{ij} принимает значение 1, если потребность в продукте в j-м пункте удовлетворяется i-м предприятием, и равна 0 в противном случае.

Пусть G – множество неотрицательных, неубывающих, вогнутых функций с областью определения $[0,+\infty)$ и равных 0 в нуле.

В дальнейшем предполагается, что в задаче (1)-(3) функции $g_i(x)\in G$, $i=\overline{1,m}$.

Существуют различные подходы к решению задачи (1)-(3) (см., например, [1 - 5]).

В [6] для некоторого класса задач (1)-(3) с $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, полулинейными функциями построен асимптотически точный алгоритм.

В настоящей работе указаны асимптотически точные алгоритмы для подклассов задач (1)-(3); исследуется частный случай задачи (1)-(3) с $g_i(x) = g_i^0 x^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $i = \overline{1,m}$, и выделяется случай связного оптимального решения.

§ 2. Асимптотически точные алгоритмы

Семейство подмножеств $\{J_i\}$, $i = \overline{1,m}$, множества V назовем разбиением, если $\bigcup\limits_{i=1}^{m} J_i = V$ и $J_i \cap J_k = \emptyset$ при $i \neq k$.

Сформулированная выше задача (1)-(3) может быть записана в виде

$$z(\{J_i\}) \equiv \sum_{i=1}^{m} \{ g_i(\sum_{j\in J_i} \varphi_j) + \sum_{j\in J_i} c_{ij}\varphi_j \} \longrightarrow \min_{\{J_i\},\, i=\overline{1,m}}, \tag{4}$$

где $\{J_i\}$, $i = \overline{1,m}$ - разбиение множества V.

Обозначим семейство всех разбиений $\{J_i\}$, $i = \overline{1,m}$, множества V через $\mathcal{J}$.

Рассмотрим два алгоритма решения задачи (4):

А1. Пусть $J_i^1 = \emptyset$, $i = \overline{1,m}$.

<u>Шаг j</u>. $(j = \overline{1,n})$. Найдем $i \in \{\overline{1,m}\}$, для которого $c_{ij} = \min\limits_{k=\overline{1,m}} c_{kj}$.

Полагаем $J_i^1 = J_i^1 \cup \{j\}$.

А2. Пусть $J_i^2 = \emptyset$, $i = \overline{1,m}$

<u>Шаг j</u>. $(j = \overline{1,n})$. Найдем $i \in \{\overline{1,m}\}$, для которого

$$\min_{k=\overline{1,m}} \left\{ \frac{g_k(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{kj} \right\} = \frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{ij},$$

где

$$\Phi_n = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j .$$

Полагаем $J_i^2 = J_i^2 \cup \{j\}$.

Для этих алгоритмов (дающих приближенное решение исходной задачи) докажем справедливость ряда утверждений, касающихся асимптотической точности.

Сформулируем и докажем вспомогательные леммы.

Л е м м а 1. Имеет место неравенство

$$z^{\text{опт}} \geq \min_{\{J_i\}_{i=\overline{1,m}} \in \mathcal{J}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j\in J_i} \left(\frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{ij} \right) \varphi_j \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j\in J_i^2} \left(\frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{ij} \right) \varphi_j ,$$

где $z^{\text{опт}}$ - оптимальное значение целевой функции задачи (1)-(3).

Л е м м а 2. Если $g(x) \in G$, то $\frac{g(x)}{x}$ – не возрастающая на интервале $(0, +\infty)$ функция.

Доказательства лемм 1 и 2 ввиду их простоты опускаем.

Л е м м а 3. Если $g(x) \in G$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \left(g(x-a) - \frac{g(x)}{x}(x-a) \right) = 0$$

для любого $a \geqslant 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2 функция $\frac{g(x)}{x}$ невозрастающая, следовательно, существует конечный предел $\frac{g(x)}{x}$ при $x \to +\infty$. Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \bar{g}$.

Если $\bar{g} = 0$, то, переходя в неравенстве

$$0 \leq g(x-a) - \frac{g(x)}{x}(x-a) \leq \frac{g(x)}{x} a$$

к пределу при $x \to +\infty$, получаем требуемое.

Пусть $\bar{g} > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{g} = 1$. Так как $\frac{g(x)}{x}$ – невозрастающая функция, то $h(x) \equiv (g(x) - x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$. Кроме того, $h(x)$ – вогнутая и $h(0) = 0$. Покажем, что $h(x)$ – неубывающая на R_+ функция. Пусть, напротив, существуют x_1, x_2 такие, что $x_1 < x_2$, $h(x_1) > h(x_2) \geqslant 0$. Рассмотрим

$$p(x) \equiv \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + h(x_1).$$

Так как $h(x)$ – вогнутая, то $h(x) \leq p(x)$ для любого $x \geqslant x_2$. Из того, что при $x \to +\infty$, $p(x) \to -\infty$, получаем, что $h(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$ Это противоречит тому, что $h(x) \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$. Таким образом, $h(x) \in G$, и $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$. Значит, для функции $h(x)$ имеет место случай 1 доказательства, т.е.

$$\lim_{x \to +\infty} \left\{ h(x-a) - \frac{h(x)}{x}(x-a) \right\} = 0.$$

Но

$$h(x-a) - \frac{h(x)}{x}(x-a) = g(x-a) - \frac{g(x)}{x}(x-a).$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} \left\{ g(x-a) - \frac{g(x)}{x}(x-a) \right\} = 0.$$

Лемма 3 доказана.

Обозначим

$$g = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_i(x), \ldots),\ g_i(x) \in G,\ i = 1, 2, \ldots;$$

$$c = (c_{ij})\ i, j = 1, 2, \cdots;$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j, \ldots);$$

$Z(m,n)$ - задача (1)-(3) с начальными данными

$$(g_i(x))\ i = \overline{1,m},\ (c_{ij})\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n};\ (\varphi_j)\ j = \overline{1,n};$$

$\mathbb{Z}$ - класс задач $\{\mathbb{Z}(m,n),\ m,n \geqslant 1\}$.

Будем говорить, что алгоритм A асимптотически точный для класса задач $\mathbb{Z}$, если

$$E_A(m,n) \equiv \frac{z_A(m,n) - z^{\text{опт}}(m,n)}{z^{\text{опт}}(m,n)} \to 0$$

при $m, n \to +\infty$, где $z_A(m,n)$ - значение целевой функции в задаче $Z(m,n)$ на решении, найденном с помощью алгоритма A, $z^{\text{опт}}(m,n)$- оптимальное значение целевой функции в задаче $Z(m,n)$.

Л е м м а 4. Пусть $c_{ij} \geqslant \underline{c} > 0,\ \varphi_j \geqslant \underline{\varphi} > 0,\ i,j = 1,2,\ldots$ Имеет место неравенство

$$E_{A_2}(m,n) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left\{g_i(\Phi_n - \underline{\varphi}) - \dfrac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}(\Phi_n - \underline{\varphi})\right\}}{\underline{c}\,\underline{\varphi}} \equiv E_2(m,n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\{J_i^2\},\ i = \overline{1,m}$, такое, что найдется $i_0 \in \{\overline{1,m}\}$, для которого $J_{i_0}^2 = \{\overline{1,n}\}$, то $\{J_i^2\}$, $i = \overline{1,m}$, - оптимальное разбиение.

Предположим, что существуют $i_0,\ i_1 \in \{\overline{1,m}\}$ такие, что $i_0 \neq i_1$, $J_{i_0}^2 \neq \emptyset,\ J_{i_1}^2 \neq \emptyset$. Тогда

$$\sum_{j \in J_i^2} \varphi_j \leq \Phi_n - \underline{\varphi}$$

для любого $i = \overline{1,m}$. Из вогнутости функции $g_i(x)$ получим

$$g_i\Big(\sum_{j \in J_i^2} \varphi_j\Big) \leq \frac{g_i(\Phi_n) - g_i(\Phi_n - \underline{\varphi})}{\underline{\varphi}}\Big(\sum_{j \in J_i^2} \varphi_j - \Phi_n + \underline{\varphi}\Big) + g_i(\Phi_n - \underline{\varphi}),$$

или

$$g_i\Big(\sum_{j \in J_i^2} \varphi_j\Big) \leq g_i(\Phi_n - \varphi)\frac{\Phi_n}{\underline{\varphi}} - g_i(\Phi_n)\frac{\Phi_n - \underline{\varphi}}{\underline{\varphi}} + \frac{g_i(\Phi_n) - g_i(\Phi_n - \underline{\varphi})}{\underline{\varphi}} \sum_{j \in J_i^2} \varphi_j. \quad (5)$$

Используя лемму 1, получаем

$$E_{A_2}(m,n) \leq \frac{z_{A_2}(m,n) - \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j \in J_i^2} \left\{ \frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{ij} \right\} \varphi_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j \in J_i^2} \left\{ \frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{ij} \right\} \varphi_j} \leq$$

$$\leq \frac{z_{A_2}(m,n) - \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j \in J_i^2} \left\{ \frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{ij} \right\} \varphi_j}{\underline{c}\Phi_n} .$$

Используя (5), получаем

$$E_{A_2}(m,n) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \left\{ g_i(\Phi_n - \underline{\varphi}) \frac{\Phi_n}{\underline{\varphi}} - g_i(\Phi_n) \frac{\Phi_n - \underline{\varphi}}{\underline{\varphi}} \right\}}{\underline{c}\Phi_n} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j \in J_i^2} \varphi_j \left\{ \frac{g_i(\Phi_n) - g_i(\Phi_n - \underline{\varphi})}{\underline{\varphi}} - \frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} \right\}}{\underline{c}\Phi_n} ,$$

или

$$E_{A_2}(m,n) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \left\{ g_i(\Phi_n - \underline{\varphi}) - g_i(\Phi_n) \frac{\Phi_n - \underline{\varphi}}{\Phi_n} \right\} \frac{\Phi_n}{\underline{\varphi}}}{\underline{c}\Phi_n} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j \in J_i^2} \left\{ \frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} - \frac{g_i(\Phi_n - \underline{\varphi})}{\Phi_n - \underline{\varphi}} \right\} \frac{\Phi_n - \underline{\varphi}}{\underline{\varphi}} \varphi_j}{\underline{c}\Phi_n} .$$

Учитывая, что $\dfrac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} \leq \dfrac{g_i(\Phi_n - \underline{\varphi})}{\Phi_n - \underline{\varphi}}$, получаем

$$E_{A_2}(m,n) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \left\{ g_i(\Phi_n - \underline{\varphi}) - g_i(\Phi_n) \frac{\Phi_n - \underline{\varphi}}{\Phi_n} \right\}}{\underline{c}\underline{\varphi}} .$$

Лемма 4 доказана.

Отметим, что в случае существования двойного предела $\lim\limits_{m,n \to \infty} E_2(m,n)$ из свойств двойных и повторных пределов и леммы 3 получим, что

$$\lim_{m,n \to +\infty} E_2(m,n) = \lim_{m \to +\infty} \lim_{n \to +\infty} E_2(m,n) = 0 .$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. Если g, c, φ такие, что $c_{ij} \geq \underline{c} > 0$, $\varphi_j \geq \underline{\varphi} > 0$, $i,j = 1,2,\ldots$, и существует $\lim\limits_{m,n \to +\infty} E_2(m,n)$, то алгоритм A_2 асимптотически точный для класса задач Z.

Замечание 1. Пусть

$$g_i(x) \equiv \begin{cases} c_i x + d_i\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0,\; i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Предел $\lim\limits_{m,n \to +\infty} E_2(m,n)$ существует тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{m,n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} d_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} \varphi_j} \;.$$

Обозначим

$$\mathcal{D}_v^m = \Big\{ (v_1, \ldots, v_m) \Big| \sum_{i=1}^{m} v_i = v,\; v_i \geq 0,\; i = \overline{1,m} \Big\},$$

$$\bar v = \{ v_1, \ldots, v_m \}, \tag{6}$$

$$z_m(v) = \sup_{\bar v \in \mathcal{D}_v^m} \sum_{i=1}^{m} g_i(v_i),\; v \geq 0\,.$$

Целью дальнейшего исследования в § 2 является изучение асимптотической точности алгоритма A_1.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 5. Существует

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\min\limits_{i=\overline{1,m}} g_i(x)}{x}\,,$$

и он равен $\min\limits_{i=\overline{1,m}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g_i(x)}{x}$.

Лемма 6. Функция $z_m(v) \in G$.

Лемма 7. Если

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g_i(x)}{x} = \bar g$, $i = \overline{1,m}$, то $\lim\limits_{v \to +\infty} \dfrac{z_m(v)}{v} = \bar g$.

Доказательства лемм 5 - 7 мы опускаем.

Обозначим

$$E_1(m,n) = \frac{z_m(\Phi_n) - \min\limits_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}\,. \tag{7}$$

Лемма 8. Пусть существует $\lim\limits_{m,n\to+\infty} E_1(m,n)=a$ и $\varphi_j \geqslant \underline{\varphi} > 0,\ j=1,2,\dots$. Для того чтобы a было равно 0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g_i(x)}{x}=\bar{g},\quad i=1,2,\dots$$

Доказательство. Необходимость. По леммам 2 и 6, существует конечный

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r_m(\Phi_n)}{\Phi_n}.$$

Пусть он равен b_m, причем, как нетрудно заметить,

$$\sum_{i=1}^{m}\lim_{x\to+\infty}\frac{g_i(x)}{x}\geqslant b_m\geqslant\max_{i=\overline{1,m}}\lim_{x\to+\infty}\frac{g_i(x)}{x}. \tag{8}$$

По лемме 5, существует

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\min\limits_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}.$$

Значит, существует

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r_m(\Phi_n)-\min\limits_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}.$$

Обозначим его через a_m. Из того, что $r_m(\Phi_n)\leqslant r_{m+1}(\Phi_n)$ и

$$\min_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)\geqslant\min_{i=\overline{1,m+1}} g_i(\Phi_n),$$

следует, что

$$\frac{r_m(\Phi_n)-\min\limits_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}\leqslant\frac{r_{m+1}(\Phi_n)-\min\limits_{i=\overline{1,m+1}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n},$$

откуда при $n\to+\infty$ получаем $a_m\leqslant a_{m+1}$, и, следовательно, существует $\lim\limits_{m\to+\infty} a_m$.

Из свойств двойных и повторных пределов имеем

$$0=\lim_{m,n\to+\infty}\frac{r_m(\Phi_n)-\min\limits_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}=$$

$$=\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}E_1(m,n)=\lim_{m\to+\infty}a_m.$$

Следовательно, $a_m = 0$ для любого $m \geq 1$. Но

$$a_m = b_m - \lim_{n\to+\infty} \frac{\min_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} .$$

Из (8) и леммы 5 получим

$$a_m \geq \max_{i=\overline{1,m}} \lim_{x\to+\infty} \frac{g_i(x)}{x} - \min_{i=\overline{1,m}} \lim_{x\to+\infty} \frac{g_i(x)}{x} .$$

Значит,

$$\max_{i=\overline{1,m}} \lim_{x\to+\infty} \frac{g_i(x)}{x} = \min_{i=\overline{1,m}} \lim_{x\to+\infty} \frac{g_i(x)}{x} ,$$

для $m \geq 1$, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_i(x)}{x} = \bar{g},\ i = 1,2,\ldots .$$

<u>Достаточность</u>. Пусть $\lim_{x\to+\infty} \frac{g_i(x)}{x} = \bar{g},\ i = 1,2,\ldots$. По лемме 7,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z_m(\Phi_n)}{\Phi_n} = \bar{g},\ (z_m(v)$$

определено по (6)). По лемме 5,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\min_{i=\overline{1,m}} g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} = \bar{g} .$$

Значит,

$$\lim_{n\to+\infty} E_1(m,n) = 0 .$$

Из свойств двойных пределов получаем требуемое. Лемма 8 доказана.

Л е м м а 9. Пусть $c_{ij} \geq \underline{c} > 0,\ \varphi_j \geq \underline{\varphi} > 0,\ i,j = 1,2,\ldots$ Имеет место неравенство

$$E_{A_1}(m,n) \leq E_1(m,n)\ \frac{1}{\underline{c}}$$ ($E_1(m,n)$ определено по (7)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 1, получаем

$$E_{A_1}(m,n) = \frac{z_{A_1}(m,n) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j\in J_i^2} \left\{\frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n} + c_{ij}\right\} \varphi_j}{\underline{c}\,\Phi_n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m}\left\{g_i\left(\sum_{j\in \mathcal{J}_i^1}\varphi_j\right)-\frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}\sum_{j\in \mathcal{J}_i^2}\varphi_j\right\}}{\underline{c}\,\Phi_n}+$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j\in \mathcal{J}_i^1}c_{ij}\varphi_j-\sum_{j\in \mathcal{J}_i^2}c_{ij}\varphi_j\right)}{\underline{c}\,\Phi_n}.$$

Из определения $\{\mathcal{J}_i^1\}$, $i=\overline{1,m}$, следует

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j\in \mathcal{J}_i^1}c_{ij}\varphi_j-\sum_{j\in \mathcal{J}_i^2}c_{ij}\varphi_j\right\}\le 0.$$

Стало быть,

$$E_{A_1}(m,n)\le \frac{\sum_{i=1}^{m}\left\{g_i\left(\sum_{j\in \mathcal{J}_i^1}\varphi_j\right)-\frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}\sum_{j\in \mathcal{J}_i^2}\varphi_j\right\}}{\underline{c}\,\Phi_n}\le$$

$$\le \frac{1}{\underline{c}\,\Phi_n}\left\{\tau_m(\Phi_n)-\min_{i=\overline{1,m}}g_i(\Phi_n)\right\}=\frac{1}{\underline{c}}E_1(m,n).$$

Лемма 9 доказана.

Пусть $c_{ij}\ge \underline{c}>0$, $\varphi_j\ge\underline{\varphi}>0$, $i,j=1,2,\dots$. Предположим, что существует

$$\lim_{m,n\to+\infty}\frac{\tau_m(\Phi_n)}{\Phi_n}.$$

Тогда, используя лемму 5, получаем, что существует $\lim\limits_{m,n\to+\infty}E_1(m,n)$.

Причем в случае, когда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g_i(x)}{x}=\bar{g},\ i=1,2,\dots,$$

по лемме 8, имеем, что $\lim\limits_{m,n\to+\infty}E_1(m,n)=0$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Пусть $c_{ij}\ge\underline{c}>0$, $\varphi_j\ge\underline{\varphi}>0$, $i,j=1,2,\dots$ Если существуют

$$\lim_{m,n\to+\infty}\frac{\tau_m(\Phi_n)}{\Phi_n}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{g_i(x)}{x}=\bar{g},\ i=1,2,\dots,$$

то алгоритм A_1 асимптотически точный для класса задач $\mathbb{Z}$.

Замечание 2. Пусть $g_i(x)=\begin{cases} c_i x + d_i, & x>0 \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $i=1,2,\ldots$.

Условие теоремы 2 выглядит следующим образом: существует

$$\lim_{m,n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{m} d_i}{\sum_{j=1}^{n} \varphi_j} \quad \text{и} \quad c_i=\bar{g},\ i=1,2,\ldots$$

§ 3. Частный случай задачи

Пусть $g_i(x)\equiv g_i^0 x^{\alpha},\ \alpha\in(0,1),\ g_i^0\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots$.

Задача (1)-(3) с такими функциями затрат на производство продукта возникает при учете фактора серийности (см. [2]).

Очевидно, что $g_i(x)\in G,\ i=1,2,\ldots$.

Утверждение 1. Пусть $c_{ij}\geqslant \underline{c}>0$, $\varphi_j\geqslant\underline{\varphi}>0$, $i,j=1,2,\ldots$. Предел

$$\lim_{m,n\to+\infty} \sum_{i=1}^{m}\left\{g_i(\Phi_n-\underline{\varphi})-\frac{g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}(\Phi_n-\underline{\varphi})\right\}=a_1$$

существует тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{m,n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{m} g_i^0}{\Phi_n^{1-\alpha}}=a_2.$$

Причем $a_1=(1-\alpha)\underline{\varphi}\,a_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $t(x)=\left(1-\frac{\underline{\varphi}}{x}\right)^{\alpha}-1$, $x\geqslant\underline{\varphi}$. При $x\to+\infty$, $t(x)\to 0$. По правилу Лопиталя,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{t(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{t'(x)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{\underline{\varphi}}{x}\right)^{\alpha-1}\alpha\left(\frac{\underline{\varphi}}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\alpha\underline{\varphi}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\underline{\varphi}+\Phi_n\left(\left(\frac{\Phi_n-\underline{\varphi}}{\Phi_n}\right)^{\alpha}-1\right)\right)=\underline{\varphi}(1-\alpha). \qquad (9)$$

Пусть

$$E(m,n)=\sum_{i=1}^{m}\left\{g_i^0(\Phi_n-\underline{\varphi})^{\alpha}-\frac{g_i^0(\Phi_n-\underline{\varphi})}{\Phi_n^{1-\alpha}}\right\}.$$

Тогда

$$E(m,n)=\frac{\sum_{i=1}^{m}g_i^0}{\Phi_n^{1-\alpha}}\left(\frac{(\Phi_n-\underline{\varphi})^{\alpha}}{\Phi_n^{\alpha}}\Phi_n-\Phi_n+\underline{\varphi}\right)=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{m}g_i^0}{\Phi_n^{1-\alpha}}\left(\underline{\varphi}+\Phi_n\left(\left(\frac{\Phi_n-\underline{\varphi}}{\Phi_n}\right)^{\alpha}-1\right)\right).$$

Учитывая (9), получаем, что $\lim\limits_{m,n\to+\infty}E(m,n)$ существует одновременно с

$$\lim_{m,n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{m}g_i^0}{\Phi_n^{1-\alpha}},$$

причем

$$\lim_{m,n\to+\infty}E(m,n)=(1-\alpha)\underline{\varphi}\lim_{m,n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{m}g_i^0}{\Phi_n^{1-\alpha}}.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть $\varphi_j\geqslant\underline{\varphi}>0,\ j=1,2,\dots$. Для того чтобы

$$\lim_{m,n\to+\infty}\frac{r_m(\Phi_n)-\min\limits_{i=\overline{1,m}}g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m,n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{m}(g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\Phi_n}=0.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$E(m,n)\equiv\frac{r_m(\Phi_n)-\min\limits_{i=\overline{1,m}}g_i(\Phi_n)}{\Phi_n}.$$

Нетрудно показать, что

$$\tau_m(\varphi_n) = \left(\sum_{i=1}^{m} (g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} \varphi_n^{\alpha} .$$

Значит,

$$E(m,n) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} (g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} - \min_{i=\overline{1,m}} g_i^0}{\varphi_n^{1-\alpha}} .$$

Тогда

$$E(m,n) \geqslant \frac{\min_{i=\overline{1,m}} g_i^0 (m^{1-\alpha} - 1)}{\varphi_n^{1-\alpha}} \geqslant \frac{\min_{i=\overline{1,m}} g_i^0}{\varphi_n^{1-\alpha}} .$$

Так как $E(m,n) \to 0$ при $m,n \to +\infty$, то

$$\frac{\min_{i=\overline{1,m}} g_i^0}{\varphi_n^{1-\alpha}} \to 0$$

при $m,n \to +\infty$. Следовательно,

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} (g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}}{\varphi_n^{1-\alpha}} \to 0$$

при $m,n \to +\infty$, т.е.

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} (g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_n} \to 0$$

при $m,n \to +\infty$.

<u>Достаточность</u>. Так как

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} (g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\varphi_n} \to 0$$

при $m,n \to +\infty$ из

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} (g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}}{\varphi_n^{1-\alpha}} \geqslant \frac{\min_{i=\overline{1,m}} g_i^0}{\varphi_n^{1-\alpha}}$$

следует, что

$$\frac{\min\limits_{i=\overline{1,m}} g_i^0}{\Phi_n^{1-\alpha}} \to 0$$

при $m,n \to +\infty$. Значит, $E(m,n) \to 0$ при $m,n \to +\infty$.

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 3. Из того, что

$$\lim_{m,n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} g_i^0}{\Phi_n^{1-\alpha}} = 0,$$

следует, что

$$\lim_{m,n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (g_i^0)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\Phi_n} = 0.$$

Обратное неверно.

§ 4. Случай связного оптимального решения

Будем говорить, что разбиение $\{J_i\}$, $i=\overline{1,m}$, связное, если для любого $i=\overline{1,m}$ J_i - отрезок в множестве $\{1,\ldots,n\}$ или $\emptyset$.

Говорят, что матрица (a_{ij}) обладает свойством сильной связности, если для любых ℓ , K , $1 \leq K < \ell \leq m$, разность $(a_{Kj} - a_{\ell j})$ не убывает при возрастании j .

В [1, с. 139] было доказано, что при $\varphi_j = 1$, $j=\overline{1,n}$, и условии сильной связности матрицы (c_{ij}) , $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, в задаче (4) существует связное оптимальное разбиение.

Имеет место следующее

У т в е р ж д е н и е 3. Если матрица (c_{ij}), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, сильно связна, то существует связное оптимальное разбиение в задаче (4).

Нам потребуется

Л е м м а 10. Пусть матрица (c_{ij}), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, сильно связна. Если для оптимального разбиения $\{J_i^{опт}\}$, $i=\overline{1,m}$, найдутся ℓ , K , q , r такие, что $1 \leq K < \ell \leq m$, $1 \leq q < r \leq n$, $q \in J_\ell^{опт}$, $r \in J_K^{опт}$, то разбиения $\{J_i'\}$, $i=\overline{1,m}$, $\{J_i''\}$, $i=\overline{1,m}$, отличающиеся от $\{J_i^{опт}\}$, $i=\overline{1,m}$, соответственно, K-м и ℓ-м множествами в виде:

$$\mathcal{J}'_k = \mathcal{J}_k^{\text{опт}} \setminus \{r\},\ \mathcal{J}'_\ell = \mathcal{J}_\ell^{\text{опт}} \cup \{r\},$$
$$\mathcal{J}''_k = \mathcal{J}_k^{\text{опт}} \cup \{q\},\ \mathcal{J}''_\ell = \mathcal{J}_\ell^{\text{опт}} \setminus \{q\}$$

являются оптимальными в задаче (4).

Доказательство. Пусть $\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_\ell^{\text{опт}} \cup \mathcal{J}_k^{\text{опт}}$,

$$F_1(x) \equiv g_\ell(x) + g_k\Big(\sum_{j\in\bar{\mathcal{J}}} \varphi_j - x\Big),\ x \in \Big[0, \sum_{j\in\bar{\mathcal{J}}} \varphi_j\Big];$$
$$F_2(\mathcal{J}) \equiv \sum_{j\in\mathcal{J}} c_{\ell j}\varphi_j + \sum_{j\in\bar{\mathcal{J}}\setminus\mathcal{J}} c_{kj}\varphi_j,\quad \mathcal{J} \subseteq \bar{\mathcal{J}},$$
$$F(\mathcal{J}) \equiv F_1\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}} \varphi_j\Big) + F_2(\mathcal{J}),\quad \mathcal{J} \subseteq \bar{\mathcal{J}}.$$

Так как $F_1(x)$ - вогнутая на $\Big[0, \sum_{j\in\bar{\mathcal{J}}} \varphi_j\Big]$ функция и

$$\sum_{j\in\mathcal{J}''_\ell} \varphi_j < \sum_{j\in\mathcal{J}_\ell^{\text{опт}}} \varphi_j < \sum_{j\in\mathcal{J}'_\ell} \varphi_j,$$

то получим

$$F_1\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}_\ell^{\text{опт}}} \varphi_j\Big) \geq \lambda F_1\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}'_\ell} \varphi_j\Big) + (1-\lambda) F_1\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}''_\ell} \varphi_j\Big),$$

где

$$\lambda = \frac{\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}_\ell^{\text{опт}}} \varphi_j - \sum_{j\in\mathcal{J}''_\ell} \varphi_j\Big)}{\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}'_\ell} \varphi_j - \sum_{j\in\mathcal{J}''_\ell} \varphi_j\Big)},$$

т.е.

$$F_1\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}_\ell^{\text{опт}}} \varphi_j\Big) \geq \frac{\varphi_q}{\varphi_r + \varphi_q} F_1\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}'_\ell} \varphi_j\Big) + \frac{\varphi_r}{\varphi_r + \varphi_q} F_1\Big(\sum_{j\in\mathcal{J}''_\ell} \varphi_j\Big). \tag{10}$$

Для функции $F_2(\mathcal{J})$ справедливы равенства:

$$F_2(\mathcal{J}'_\ell) - F_2(\mathcal{J}_\ell^{\text{опт}}) = c_{\ell r}\varphi_r - c_{kr}\varphi_r = -\varphi_r(c_{kr} - c_{\ell r}), \tag{11}$$

$$F_2(\mathcal{J}_\ell^{\text{опт}}) - F_2(\mathcal{J}''_\ell) = c_{\ell q}\varphi_q - c_{kq}\varphi_q = -\varphi_q(c_{kq} - c_{\ell q}). \tag{12}$$

Из условия сильной связности (c_{ij}), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $c_{kq} - c_{\ell q} \leq$ $\leq c_{kr} - c_{\ell r}$, или, что то же самое

$$\frac{(c_{kq} - c_{\ell q})\varphi_r\varphi_q}{\varphi_r + \varphi_q} \leq \frac{(c_{kr} - c_{\ell r})\varphi_r\varphi_q}{\varphi_r + \varphi_q},$$

и, следовательно, домножая (11), (12) на $\frac{\varphi_q}{\varphi_r+\varphi_q}$, $\frac{\varphi_r}{\varphi_r+\varphi_q}$ соответственно, получаем

$$\left(F_r(J_\ell') - F_r(J_\ell^{\text{опт}})\right)\frac{\varphi_q}{\varphi_r+\varphi_q} \le \left(F_r(J_\ell^{\text{опт}}) - F_r(J_\ell'')\right)\frac{\varphi_r}{\varphi_q+\varphi_r},$$

т.е.

$$F_r(J_\ell')\frac{\varphi_q}{\varphi_r+\varphi_q} + F_r(J_\ell'')\frac{\varphi_r}{\varphi_r+\varphi_q} \le F_r(J_\ell^{\text{опт}}). \tag{13}$$

Складывая почленно неравенства (10) и (13), получаем

$$\frac{\varphi_q}{\varphi_r+\varphi_q}F(J_\ell') + \frac{\varphi_r}{\varphi_r+\varphi_q}F(J_\ell'') \le F(J_\ell^{\text{опт}}). \tag{14}$$

Следовательно,

$$F(J_\ell^{\text{опт}}) \ge \min\{F(J_\ell'), F(J_\ell'')\}. \tag{15}$$

Предположим, что $F(J_\ell^{\text{опт}}) > \min\{F(J_\ell'), F(J_\ell'')\}$. Тогда, как нетрудно заметить, $z(\{J_i^{\text{опт}}\}) > \min\{z(\{J_i'\}), z(\{J_i''\})\}$, что противоречит оптимальности разбиения $\{J_i^{\text{опт}}\}$, $i=\overline{1,m}$. Значит, в (15) имеет место равенство. Пусть $F(J_\ell^{\text{опт}}) = F(J_\ell')$. Тогда из (14) получим

$$\frac{\varphi_r}{\varphi_r+\varphi_q}F(J_\ell'') \le \frac{\varphi_r}{\varphi_r+\varphi_q}F(J_\ell^{\text{опт}}),$$

т.е. $F(J_\ell'') = F(J_\ell^{\text{опт}})$. Следовательно,

$$z(\{J_i^{\text{опт}}\}) = z(\{J_i'\}) = z(\{J_i''\}).$$

Если $F(J_\ell^{\text{опт}}) = F(J_\ell'')$, то аналогично получим требуемое. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 3. Пусть $\{J_i^0\}$, $i=\overline{1,m}$ – оптимальное разбиение в задаче (4). Построим по нему связное оптимальное разбиение. На шаге t, $t=\overline{1,m}$, будет построено оптимальное разбиение $\{J_i^t\}$, $i=\overline{1,m}$, обладающее свойством

$$J_i^t = \{j_{i-1}+1, \dots, j_i\}, \quad i=\overline{1,t}, \tag{16}$$

где $j_0 = 0 \le j_1 \le \dots \le j_t$, причем если $j_{i-1} = j_i$, то $J_i^t = \emptyset$.

Пусть на шаге $(t-1)$ построено оптимальное разбиение $\{J_i^{t-1}\}$, $i=\overline{1,m}$, обладающее свойством (16).

<u>Шаг t</u>. Рассмотрим множество J_t^{t-1}.

Если $J_t^{t-1} = \emptyset$, то, полагая $J_i^t = J_i^{t-1}$, $i=\overline{1,m}$, получаем оптимальное разбиение на шаге t, обладающее свойством (16).

Пусть $J_t^{t-1} \ne \emptyset$. Определим $j_t = \max\{j \mid j \in J_t^{t-1}\}$. Тогда построим разбиение $\{J_i^t\}$, $i=\overline{1,m}$, следующим образом:

$$\mathcal{J}_i^t = \mathcal{J}_i^{t-1}, \ i = \overline{1, t-1},$$

$$\mathcal{J}_t^t = \{ j_{t-1} + 1, \dots, j_t \},$$

$$\mathcal{J}_i^t = \mathcal{J}_i^{t-1} \quad \mathcal{J}_t^t, \ i = \overline{t+1, m}$$

Тогда, по лемме 10, $\{\mathcal{J}_i^t\}$, $i = \overline{1, m}$, - оптимальное разбиение. Кроме того, оно удовлетворяет свойству (16).

Если $t \neq m$, переходим к шагу $(t+1)$.

После выполнения m шагов получим связное оптимальное разбиение $\{\mathcal{J}_i^m\}$, $i = \overline{1, m}$, в задаче (4).

Утверждение 3 доказано.

В случае связности оптимального разбиения рассматриваемая задача размещения эффективно решается методом динамического программирования [1].

Поступила в ред.-изд. отдел
2 ноября 1987 г.

Л и т е р а т у р а

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. - Новосибирск: Наука. - 1978. - 333 с.

2. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. 1 // Кибернетика. - 1965. - № 1. - С. 45-56.

3. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. П // Кибернетика. - 1965. - № 2. - С. 85-88.

4. Емеличев В.А., Комлик В.И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. - М.: Наука. - 1981. - 260 с.

5. Хачатуров В.Р. Аппроксимационно-комбинаторный метод и его некоторые приложения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1974. -Т. 14, № 6. - С. 1464-1487.

6. Гимади Э.Х. Обоснование априорных оценок качества приближенного решения задачи стандартизации // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). - Новосибирск, 1987. - Вып. 27. - С. 12-27.