Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1989 г., вып. 29.

УДК 519.854

# ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ: УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМА "ИДИ В САМЫЙ УДАЛЕННЫЙ ГОРОД"

Э.Х.Гимади

Рассмотрим класс $3K_{max}$ задач коммивояжера гамильтонова обхода $n$ городов:

$$\mathbb{L}(\pi) = \sum_{k=1}^{n} c_{\pi_k \pi_{k+1}} \longrightarrow \max_{\pi},$$

где $\pi = (\pi_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ - перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, $\pi_1 = \pi_{n+1}$; элементы $n \times n$ -матрицы $(c_{ij})$ расстояний между городами выбираются случайно и независимо друг от друга из интервала $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$, с одинаковой функцией распределения $F_\xi(x)$ случайной величины $\xi = (c_{ij} - a_n)/(b_n - a_n)$, $0 \le \xi \le 1$.

Через $\mathcal{A}$ обозначим алгоритм, действующий по принципу: "Иди в самый удаленный еще не пройденный город". Очевидно, алгоритм $\mathcal{A}$ имеет трудоемкость $O(n^2)$.

Обозначим для целевой функции соответственно $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ - значение, полученное в результате работы алгоритма $\mathcal{A}$, $\mathbb{L}^*$ - точное (максимальное) значение. Относительная погрешность полученного решения равна $(\mathbb{L}^* - \mathbb{L}_{\mathcal{A}})/\mathbb{L}^*$.

Говорят, что алгоритм $\mathcal{A}$ имеет оценки точности $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ и вероятности несрабатывания $\delta_{\mathcal{A}}$, если

$$P\{(\mathbb{L}^* - \mathbb{L}_{\mathcal{A}})/\mathbb{L}^* \le \varepsilon_{\mathcal{A}}\} \ge 1 - \delta_{\mathcal{A}}, \tag{1}$$

где $P\{\cdot\}$ - вероятность соответствующего события; алгоритм $\mathcal{A}$ асимптотически точен, если существуют оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}$, $\delta_{\mathcal{A}}$, стремящиеся к нулю с ростом размерности задачи [1 - 3].

Обозначим $3K_{max}$ с непрерывной функцией распределения $F_\xi(x)$ через $3KH_{max}$.

Теорема 1. Алгоритм $\mathcal{A}$ для задачи из класса $3KH_{max}$ асимптотически точен, если:

$$J_n = o(n), \tag{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} J_n = \infty, \tag{3}$$

где

$$J_n = \int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1-F_\xi(x)} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что существуют такие оценки $\varepsilon_{\mathcal{A}}$, $\delta_{\mathcal{A}} \to 0$ при $n \to \infty$, что $P\{(L^* - L_{\mathcal{A}})/L^* \le \varepsilon_{\mathcal{A}}\} \ge 1 - \delta_{\mathcal{A}}$.

Обозначим:

$$\xi_K = (c_{\pi_K \pi_{K+1}} - a_n)/(b_n - a_n),$$

$$\xi_K^0 = 1 - \xi_K, \quad K = 1, \dots, n;$$

$$\ell_{\mathcal{A}} = \sum_{K=1}^{n} \xi_K;$$

$$\ell_{\mathcal{A}}^0 = \sum_{K=1}^{n} \xi_K^0;$$

$F_{\xi^0}(x)$ - функция распределения случайной величины $\xi^0 = 1 - \xi$, $0 \le \xi, \xi^0 \le 1$.

Очевидно,

$$F_{\xi^0}(x) = P\{\xi^0 < x\} = P\{\xi > (1-x)\} =$$

$$= 1 - P\{\xi < (1-x)\} = 1 - F_\xi(1-x);$$

$$L_{\mathcal{A}} = n a_n + (b_n - a_n) \sum_{K=1}^{n} \xi_K .$$

По построению алгоритма $\mathcal{A}$ случайная величина $\xi_K$, $1 \le K < n$, есть максимум среди $(n-K)$ случайных независимых величин $(c_{\pi_K j} - a_n)/(b_n - a_n)$, $j \ne \pi_s$, $s = 1, \dots, K$, с одинаковой функцией распределения $F_\xi(x)$; $F_{\xi_n} = F_{\xi_{n-1}}$.

Л е м м а 1. Справедлива оценка

$$M\ell_{\mathcal{A}}^0 \le \widetilde{M}\ell_{\mathcal{A}}^0 = 1 + J_n .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислив математическое ожидание случайной величины $\xi_K^0$,

$$M\xi_K^0 = \int_0^1 x\,dF_{\xi_K^0}(x) = xF_{\xi_K^0}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F_{\xi_K^0}(x)\,dx =$$

$$= 1 - \int_0^1 F_{\xi_K^0}(x)\,dx = \int_0^1 P\{\xi_K^0 \geq x\}\,dx = \int_0^1 (P\{\xi^0 \geq x\})^{n-K}\,dx =$$

$$= \int_0^1 [1 - F_{\xi^0}(x)]^{n-K}\,dx, \quad 1 \leq K < n ;$$

$$M\xi_n^0 = \int_0^1 (1 - F_{\xi^0}(x))\,dx ,$$

получаем требуемую оценку для $Ml_{A}^0$ :

$$Ml_{A}^0 = \sum_{K=1}^{n} M\xi_K^0 = \sum_{K=1}^{n} \int_0^1 (1 - F_{\xi^0}(x))^{n-K}\,dx =$$

$$= \sum_{K=1}^{n} \Big( \int_0^{1/n} (1 - F_{\xi^0}(x))^{n-K}\,dx + \int_{1/n}^1 (1 - F_{\xi^0}(x))^{n-K}\,dx \Big) \leq$$

$$\leq 1 + \int_{1/n}^{1} \sum_{K=0}^{\infty} (1 - F_{\xi^0}(x))^K\,dx = 1 + \int_{1/n}^{1} \frac{dx}{F_{\xi^0}(x)} =$$

$$= 1 + \int_{1/n}^{1} \frac{dx}{1 - F_{\xi}(1-x)} = 1 + \int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1 - F_{\xi}(x)} = 1 + J_n = \widetilde{Ml}_{A}^0 .$$

Лемма доказана. Продолжим доказательство теоремы. Убедимся, что приемлемыми являются следующие оценки качества алгоритма $A$ :

$$\varepsilon_{A} = \beta\Big(1 - \frac{a_n}{b_n}\Big)\widetilde{Ml}_{A}^0 / n ; \qquad \delta_{A} = \frac{1}{(\beta-1)^2\,\widetilde{Ml}_{A}^0} ,$$

где $\beta$ - константа, $\beta > 1$ .

Действительно, учитывая формулу для величины $\widetilde{Ml}_{A}^0$ и условия (2)-(3) теоремы 1, для оценок $\varepsilon_{A}$ , $\delta_{A}$ указанного вида при $n \to \infty$ имеем

$$\varepsilon_{A} = \beta\Big(1 - \frac{a_n}{b_n}\Big)(1 + J_n)/n \longrightarrow 0 ,$$

$$\delta_{A} = \frac{1}{(\beta-1)^2\,\widetilde{Ml}_{A}^0} = \frac{1}{(1+J_n)(\beta-1)^2} \leq \frac{1}{(\beta-1)^2 J_n} \longrightarrow 0 .$$

Кроме того, с учетом соотношений $L^* \leq nb_n$. $Dl_{A}^0 \leq Ml_{A}^0 \leq \widetilde{Ml}_{A}^0$, $L_{A} =$

$= na_n + (b_n - a_n)(n - \ell^\circ_{\mathcal{A}})$ и неравенства Чебышева получим справедливость требуемого вероятностного условия (1):

$$P\{(L^* - L_{\mathcal{A}})/L^* \leq \varepsilon_{\mathcal{A}}\} \geq P\left\{\frac{(b_n - a_n)}{n b_n}\ell^\circ_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon_{\mathcal{A}}\right\} =$$

$$= P\{\ell^\circ_{\mathcal{A}} \leq \beta \widetilde{M}\ell^\circ_{\mathcal{A}}\} \geq P\{\ell^\circ_{\mathcal{A}} - M\ell^\circ_{\mathcal{A}} \leq (\beta-1)\widetilde{M}\ell^\circ_{\mathcal{A}}\} =$$

$$= 1 - P\{\ell^\circ_{\mathcal{A}} - M\ell^\circ_{\mathcal{A}} > (\beta-1)\widetilde{M}\ell^\circ_{\mathcal{A}}\} \geq 1 - P\{|\ell^\circ_{\mathcal{A}} - M\ell^\circ_{\mathcal{A}}| > (\beta-1)\widetilde{M}\ell^\circ_{\mathcal{A}}\} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{D\ell^\circ_{\mathcal{A}}}{(\beta-1)^2(\widetilde{M}\ell^\circ_{\mathcal{A}})^2} \geq 1 - \frac{1}{(\beta-1)^2\widetilde{M}\ell^\circ_{\mathcal{A}}} = 1 - \delta_{\mathcal{A}}.$$

В качестве следствий из теоремы 1 вытекают утверждения на случай распределений $F_\xi(x)$ мажорирующего и минорирующего типов: $F_\xi(x) \geq x$ или $F_\xi(x) \leq x$, $0 \leq x \leq 1$.

Т е о р е м а 2. Алгоритм $\mathcal{A}$ решения на классе $3KH_{max}$ в случае распределения мажорирующего типа асимптотически точен, если $J_n = o(n)$.

Доказательство следует из оценки величины $J_n$ при $F_\xi(x) \geq x$, $0 \leq x \leq 1$:

$$J_n = \int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1 - F_\xi(x)} \geq \int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1-x} = \ln n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

так что в рассматриваемом случае второе условие в теореме 1 выполнено автоматически.

Т е о р е м а 3. Алгоритм $\mathcal{A}$ на классе $3KH_{max}$ в случае распределения минорирующего типа асимптотически точен, если $J_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство следует из оценки $J_n \leq \ln n$, справедливой при $F_\xi(x) \leq x$, $0 \leq x \leq 1$, что обеспечивает автоматическое выполнение первого условия теоремы 1.

В случае равномерного распределения ( $F_\xi(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ ) имеем

$$J_n = \int_0^{1-1/n} \frac{dx}{1-x} = \ln n,$$

так что оба условия теоремы 1 выполнены. Тем самым справедлива следующая

Т е о р е м а 4. Если элементы матрицы $(c_{ij})$ принимают значения из отрезка $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$, равновероятно и независимо друг от друга, то алгоритм $\mathcal{A}$ для решения задачи из класса $3KH_{max}$ асимптотически точен.

Поступила в ред.-изд. отдел
18 июля 1989 г.

Л и т е р а т у р а

1. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. - М.: Наука. - 1975. - Вып., 31. - С. 35-42.

2. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы. - Новосибирск, 1974. - Вып. 12. - С. 35-45.

3. Гимади Э.Х. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации. - Новосибирск: Наука, 1988. - (Тр./АН СССР Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10). - С. 89-115.