Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1989 г., вып. 29.

УДК 519.854

ГРАФЫ, МАТРИЦЫ И ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ

А.А.Агеев

§ 1. Необходимые определения и формулировка результатов

Простейшая задача размещения (ПЗР) в обычной формулировке имеет следующий вид:

$$\sum_{i\in I} c_i^0 x_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to min,$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1,\ j\in J,$$

$$x_{ij}\le x_i,\ i\in I,\ j\in J,$$

$$x_i,\ x_{ij}\in\{0,1\},\ i\in I,\ j\in J,$$

где $I=\{1,\dots,m\}$ - множество возможных пунктов размещения поставщиков, $J=\{1,\dots,n\}$ - множество потребителей, $c_i^0\geqslant 0$ - стоимость размещения поставщика в пункте $i\in I$, $c_{ij}\geqslant 0$ - стоимость доставки единицы однородного продукта от i-го поставщика к j-му потребителю. Хорошо известно, что в общей постановке ПЗР NP-трудна. Это стимулирует поиск полиномиально разрешимых частных случаев задачи, порождаемых дополнительными условиями на исходные данные. Одно из таких условий - связность матрицы (c_{ij}) относительно некоторого графа.

Пусть $G=(J,E)$ - неориентированный граф без петель и кратных ребер (в дальнейшем рассматриваются только такие графы) с множеством вершин J и множеством ребер E.

Будем говорить, что <u>матрица (c_{ij}) связна относительно графа G</u>, если для любых i_1, $i_2\in I$ найдется разбиение (J_1,J_2) множества J такое, что подграфы графа G, порожденные множествами вершин J_1, J_2, связны и, кроме того,

$$c_{i_1 j}\le c_{i_2 j} \quad \text{для всех} \quad j\in J_1,$$

$$c_{i_2 j}\le c_{i_1 j} \quad \text{для всех} \quad j\in J_2.$$

Будем говорить, что матрица (c_{ij}) связна относительно класса графов $\mathcal{G}$, если в этом классе найдется граф, относительно которого она связна.

Пусть $\mathcal{U}$ – некоторый класс связных графов. Условие "матрица (C_{ij}) связна относительно заданного графа $G \in \mathcal{U}$" определяет подзадачу ПЗР, порождаемую классом $\mathcal{U}$. Цель настоящей работы – изучение классов связных графов, порождающих полиномиально разрешимые подзадачи ПЗР.

Ясно, что любая матрица (C_{ij}) связна относительно полного графа, так что имеет смысл рассматривать лишь те классы связных графов, которые не содержат в себе класс всех полных графов. Первые глубокие результаты в этом направлении принадлежат Э.Гимади и В.Бересневу. Ими установлена полиномиальная разрешимость подзадач ПЗР, порождаемых простейшими классами графов: цепями [1, 2], циклами [2] и деревьями [3] (с оценками трудоемкости в последних двух случаях $O(mn^3)$ и $O(mn)$ соответственно). Связность матрицы относительно класса цепей (циклов) эквивалентна рассматриваемому в [2] свойству 1-связности (2-связности). Понятие связности матрицы относительно графа для случая деревьев впервые введено Э.Гимади в [3].

Формулировке основных результатов настоящей работы предпошлем несколько определений.

Граф называют планарным, если его можно уложить на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не пересекались. Плоский граф – это граф, уже уложенный на плоскости указанным образом. Плоский граф разбивает плоскость на связные области, называемые гранями. Планарный граф называется внешнепланарным, если его можно уложить так, чтобы все его вершины принадлежали одной грани.

Всюду ниже, где рассматривается задача, содержащая в исходных данных неориентированный граф, предполагается, что этот граф задан списками смежности [7].

Т е о р е м а 1. ПЗР с матрицей (C_{ij}), связной относительно заданного связного внешнепланарного графа G, полиномиально разрешима с трудоемкостью $O(mn^2)$.

Т е о р е м а 2. а) Если матрица (C_{ij}) связна относительно связного внешнепланарного графа G, то она связна относительно некоторого цикла;

б) этот цикл может быть найден полиномиальным алгоритмом с трудоемкостью $O(n)$.

Т е о р е м а 3. Пусть связный граф G не является внешнепланарным. Тогда найдется матрица (C_{ij}), связная относительно G и не связная относительно класса циклов.

Т е о р е м а 4. ПЗР с матрицей (C_{ij}), связной относительно планарного графа, NP-трудна.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2 и полиномиальной разрешимости ПЗР с матрицей (C_{ij}), связной относительно цикла [2]. Класс внешнепланарных графов включает в себя цепи, циклы и деревья, и тем самым теорема 1 в определенном смысле обобщает полученные ранее результаты. Свойство внешнепланарности может быть проверено алгоритмом с линейной оценкой трудоемкости [5, 6].

Из теоремы 2 следует, что задача ПЗР с матрицей (c_{ij}), связной относительно внешнепланарного графа, сводится к задаче ПЗР с матрицей (c_{ij}), связной относительно цикла. Теорема 3 утверждает, что класс внешнепланарных графов – максимальный, для которого это имеет место.

Теорема 4 показывает, что при естественном расширении класса внешнепланарных графов до класса планарных графов полиномиальная разрешимость задачи ПЗР становится весьма проблематичной.

§ 2. Доказательство теоремы 2

При обосновании утверждений теоремы 2 мы будем опираться на ряд фактов из теории внешнепланарных графов (см. [4, 5]; не определяемые ниже термины и обозначения можно найти в [4]). Важнейшие сведения формулируются в виде лемм 1 – 3.

Лемма 1 [4]. Граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда каждый ег блок внешнепланарен.

Граф K_4 с выброшенным ребром e обозначим через $K_4 - e$.

Лемма 2 [4]. Граф, отличный от $K_4 - e$, внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_4 или $K_{2,3}$.

В частности, всякий подграф внешнепланарного графа внешнепланарен.

Из леммы 2 и того факта, что всякий неразделимый внешнепланарный граф имеет единственный гамильтонов цикл [5], вытекает

Лемма 3. Неразделимый граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда он представляет собой гамильтонов цикл с попарно-непересекающимися хордами.

Из лемм 1, 3 следует, что каждый блок связного внешнепланарного графа есть либо ребро, либо цикл с попарно-непересекающимися хордами.

Лемма 4. Всякий связный внешнепланарный граф $G = (\mathcal{J}, E)$, имеющий точки сочленения, может быть дополнен ребрами до неразделимого внешнепланарного графа $\bar{G} = (\mathcal{J}, \bar{E})$, $E \subset \bar{E}$.

Доказательство. Справедливость леммы будет установлена, если мы покажем, что к графу G, состоящему из $p > 1$ блоков, не нарушая свойства внешнепланарности, можно добавить ребро e' таким образом, что количество блоков в новом графе G' уменьшится на единицу.

Действительно, пусть граф $G = (\mathcal{J}, E)$ состоит из p, $p > 1$, блоков $G_1 = (\mathcal{J}_1, E_1), \ldots, G_p = (\mathcal{J}_p, E_p)$, причем блоки G_1 и G_2

имеют общую точку сочленения j_0 : $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = \{j_0\}$. Пусть $\mathcal{J}_t = \{j_0, j_1^t, \ldots, j_{K_t}^t\}$, $t = 1, 2$, где последовательность $(j_0, j_1^t, \ldots, j_{K_t}^t)$ определяет гамильтонов цикл блока G_t при $K_t \geqslant 2$. Положим $e' = (j_1^1, j_1^2)$ и рассмотрим граф $G' = (\mathcal{J}, E')$, где $E' = E \cup \{e'\}$. Граф G' состоит из $(p-1)$ блоков H, $G_3, \ldots, G_p$, где $H = (\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e'\})$. Блок H представляет собой цикл $(j_1^1, \ldots, j_{K_1}^1, j_0, j_{K_2}^2, \ldots, j_1^2)$ с попарно-непересекающимися хордами и, таким образом, по лемме 3 внешнепланарен. По лемме 1 отсюда вытекает внешнепланарность графа G'. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Последовательность операций добавления ребра, описанная в доказательстве леммы 4, преобразует граф G в гамильтонов граф $\bar{G}$ и может быть выполнена с трудоемкостью $O(|E|)$ при условии, что заданы разложение графа G на блоки и гамильтонов цикл каждого нетривиального $(|\mathcal{J}_t| \geqslant 3)$ блока.

Л е м м а 5. Всякая матрица, связная относительно неразделимого внешнепланарного графа с числом вершин не менее трех, связна относительно его гамильтонова цикла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрица (c_{ij}) связна относительно неразделимого внешнепланарного графа $G = (\mathcal{J}, E)$ с гамильтоновым циклом $(1, \ldots, n)$. Выберем различные $i_1, i_2 \in I$. По условию найдется разбиение (R, S) множества вершин $\mathcal{J}$ такое, что подграфы графа G, порожденные подмножествами R и S, связны и, кроме того,

$$c_{i_1 j} \leq c_{i_2 j} \quad \text{для всех} \quad j \in R,$$
$$c_{i_2 j} \leq c_{i_1 j} \quad \text{для всех} \quad j \in S.$$

Очевидно, что лемма будет доказана, если мы покажем, что по крайней мере одно из множеств R, S есть целочисленный сегмент.

Предположим противное. Тогда найдутся r', $r'' \in R$ и s', $s'' \in S$, для которых:

либо $r' < s' < r'' < s''$,

либо $s' < r' < s'' < r''$.

Без ограничения общности можно считать, что имеет место первый случай. Поскольку подграф, порожденный множеством R, связен, то существует простая цепь $(r_0, r_1, \ldots, r_p)$, соединяющая $r_0 = r'$ с $r_p = r''$, причем $r_i \in R$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$. Так как $r_0 \in \mathcal{J} \setminus [s', s'']$, $r_p \in [s', s'']$, то в цепи $(r_0, \ldots, r_p)$ найдется ребро $(r_\mu, r_{\mu+1})$ такое, что $r_\mu \in \mathcal{J} \setminus [s', s'']$, $r_{\mu+1} \in [s', s'']$. Это означает, что имеет место одно из двух:

$$\text{либо} \quad r_\mu < s' < r_{\mu+1} < s'', \tag{1}$$

$$\text{либо} \quad s' < r_{\mu+1} < s'' < r_\mu.$$

Предположим, что справедливо соотношение (1) (второй случай рассматривается аналогично). Снова поскольку подграф G, порожденный множеством, S -связный, существует простая цепь $(s_0, s_1, \ldots, s_q)$ с $s_0 = s'$, $s_q = s''$, все вершины которой принадлежат S. В силу (1), $s_0 \in [r_\mu, r_{\mu+1}]$, тогда как $s_q \in J \setminus [r_\mu, r_{\mu+1}]$, и, следовательно, в цепи $(s_0, \ldots, s_q)$ найдется ребро $(s_\tau, s_{\tau+1})$ такое, что $s_\tau \in [r_\mu, r_{\mu+1}]$, а $s_{\tau+1} \in J \setminus [r_\mu, r_{\mu+1}]$. Но это означает, что ребра $(r_\mu, r_{\mu+1})$, $(s_\tau, s_{\tau+1})$ являются пересекающимися хордами гамильтонова цикла $(1, \ldots, n)$, что по лемме 3 противоречит внешнепланарности графа G и тем самым доказывает лемму.

Доказательство теоремы 2. По лемме 4 всякая матрица, связная относительно внешнепланарного графа, связна относительно некоторого неразделимого графа и на основании леммы 5 связна относительно его гамильтонова цикла. Это рассуждение доказывает утверждение "а" теоремы 2.

Для доказательства утверждения "б" достаточно иметь линейный алгоритм A_h отыскания гамильтонова цикла в неразделимом внешнепланарном графе. В качестве такого алгоритма используем алгоритм распознавания свойства внешнепланарности в классе неразделимых внешнепланарных графов, описанный в [6]. Этот алгоритм в ходе работы помечает все хорды гамильтонова цикла, оставляя непомеченными его ребра. В общем случае связного внешнепланарного графа G линейный алгоритм отыскания цикла, относительно которого связна матрица (c_{ij}), выглядит следующим образом. Используя линейный алгоритм выделения блоков в произвольном графе [7], находим блоки и точки сочленения графа G. С помощью алгоритма A_h определяем гамильтонов цикл каждого нетривиального блока, а затем, применяя процедуру, описанную в доказательстве леммы 4 (см. замечание 1), дополняем ребрами граф G до неразделимого внешнепланарного графа $\bar{G}$. Результатом работы этой процедуры будет также и искомый гамильтонов цикл графа $\bar{G}$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Можно показать, что в случае, когда G - дерево, требуемый цикл определяется также алгоритмом построения сегментной нумерации [3].

§ 3. Доказательство теоремы 3

Доказательство опирается на три леммы.

Лемма 6. Предположим, что имеются связный граф $G=(J,E)$ и непустые подмножества вершин X, $Y \subset J$, $X \cap Y = \emptyset$, порождающие связные подграфы G. Тогда найдется разбиение $(\bar{X}, \bar{Y})$ множества J такое, что множества вершин $\bar{X}$, $\bar{Y}$ порождают связные подграфы G и

$X \subset \bar{X}$, $Y \subset \bar{Y}$.

Доказательство. Рассмотрим подграф G, порожденный множеством вершин $\mathcal{J} \setminus Y$. Определим $\bar{X}$ как множество вершин той компоненты связности этого подграфа, которая содержит множество вершин X , и положим $\bar{Y} = \mathcal{J} \setminus \bar{X}$. Тогда $Y \subset \bar{Y}$ и нетрудно видеть, что подграф, порожденный $\bar{Y}$, связен ввиду связности исходного графа G . Лемма доказана.

Пусть (a_{ij}) $(i \in E, j \in \mathcal{J})$ - транспонированная матрица инциденций связного графа $G = (\mathcal{J}, E)$.

Лемма 7. Матрица (a_{ij}) связна относительно графа G .

Доказательство. Матрица (a_{ij}) булева и содержит ровно по две единицы в каждой строке. Выберем произвольно две строки i_1, $i_2 \in E$. Положим $X = \{j \in \mathcal{J} : a_{i_1 j} < a_{i_2 j}\}$, $Y = \{j \in \mathcal{J} : a_{i_2 j} < a_{i_1 j}\}$. Поскольку $X \cap Y = \emptyset$ и подграфы, порожденные множествами X, Y , связны (либо вершина, либо ребро), то по лемме 6 найдется разбиение $(\bar{X}, \bar{Y})$ множества $\mathcal{J}$ такое, что подграфы, порожденные множествами $\bar{X}$, $\bar{Y}$, связны и, кроме того,

$$a_{i_1 j} \leq a_{i_2 j} \quad \text{для всех} \quad j \in \bar{X},$$
$$a_{i_2 j} \leq a_{i_1 j} \quad \text{для всех} \quad j \in \bar{Y}.$$

Но это означает, что матрица (a_{ij}) связна относительно графа G , что и требовалось доказать.

Лемма 8. Граф G внешнепланарен тогда и только тогда, когда матрица (a_{ij}) связна относительно цикла.

Доказательство. Если граф G внешнепланарен, то связность матрицы (a_{ij}) относительно цикла вытекает из леммы 7 и теоремы 2.

Пусть матрица (a_{ij}) связна относительно цикла $(1, \ldots, n)$. Это эквивалентно тому, что для любых двух несмежных ребер (r', s'), (r'', s'') графа G отрезки $[r', s']$, $[r'', s'']$ либо не пересекаются, либо один из них вложен в другой. Построим граф $\bar{G} = (\mathcal{J}, \bar{E})$, $E \subset \bar{E}$, дополняя граф G недостающими ребрами из множества $\{(j, j+1) : j = 1, \ldots, n-1\} \cup \cup \{(1, n)\}$ (если E содержит это множество, то полагаем $\bar{E} = E$). Легко видеть, что граф $\bar{G}$ представляет собой гамильтонов цикл $(1, \ldots$ $\ldots, n)$ с попарно-непересекающимися хордами, откуда по лемме 3 вытекает его внешнепланарность и тем самым внешнепланарность графа G . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть граф G не является внешнепланарным. Тогда матрица (a_{ij}) , будучи связной относительно графа G по лемме 7, не является связной относительно класса циклов по лемме 8, что и требуется.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Сведем к рассматриваемой задаче NP -трудную задачу о вершинном покрытии связного кубического планарного графа [8].

Пусть $G=(I,J)$ - связный кубический планарный граф с множеством вершин $I=\{1,\dots,m\}$ и множеством ребер $J=\{1,\dots,n\}$. Пусть (a_{ij}) - матрица инциденций графа G. Рассмотрим задачу ПЗР с исходными данными вида:

$$c_i^0=1,\ i\in I,$$

$$c_{ij}=\begin{cases}0, \text{ если } & a_{ij}=1,\\ \Phi, \text{ если } & a_{ij}=0,\end{cases}$$

где $\Phi>m$. Задача ПЗР с такими исходными данными эквивалентна задаче о вершинном покрытии графа G (см. [1, 9]), и поэтому NP -трудна. Остается показать, что матрица (c_{ij}) связна относительно некоторого планарного графа.

Действительно, рассмотрим реберный граф $\tilde{G}=(J,E)$ графа G. Граф $\tilde{G}$ связный и планарный [4]. Возьмем различные i_1, i_2 и положим:

$$J'=\{j: c_{i_1j}<c_{i_2j}\},$$

$$J''=\{j: c_{i_2j}<c_{i_1j}\}.$$

Легко видеть, что множества J', J'' порождают связные подграфы графа $\tilde{G}$ (либо ребро, либо треугольник) и, кроме того, $J'\cap J''=\varnothing$. Следовательно, по лемме 6 существует разбиение (J_1, J_2) множества J такое, что множества J_1, J_2 порождают связные подграфы графа $\tilde{G}$, причем $J'\subset J_1$, $J''\subset J_2$. Но это и означает согласно определению, что матрица (c_{ij}) связна относительно планарного графа $\tilde{G}$.

Поступила в ред.-изд. отдел
2 февраля 1989 г.

Литература

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. - Новосибирск: Наука, 1978. - 333 с.

2. Береснев В.Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. - 1979. - Вып. 36. - С. 225-246.

3. Гимади Э.Х. Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети // Управляемые системы. - Новосибирск, 1983. - Вып. 23. - С. 12-23.

4. Харари Ф. Теория графов. - М.: Мир, 1973. - 300 с.

5. Sysło M.M. Characterizations of outerplanar graphs // Discrete Mathematics. - 1979. - V. 26. - P. 47-53.

6. Sysło M.M., Iri M. Efficient outerplanarity testing // Fundamenta Informaticae. - 1979. - V. 2. - P. 261-275.

7. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. - М.: Мир, 1979. - 536 с.

8. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416 с.

9. Агеев А.А. О сложности задач минимизации полиномов от булевых переменных // Управляемые системы. - Новосибирск, 1983. - Вып. 23. - С. 3-11.