Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1988 г., вып. 28

УДК 517.9

О ЗАМКНУТОСТИ МНОЖЕСТВА ИЗМЕРИМЫХ СЕЛЕКТОРОВ

С.И.Суслов

Пусть $T = [0,1] \subset R$, X - сепарабельное банахово пространство, $cbc(X)$ - множество выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств X. Селектором функции $F: T \to cbc(X)$ называется такая функция $f: T \to X$, что $f(t) \in F(t)$, $t \in T$. Множество измеримых селекторов функции F обозначается через $S(F)$. Множество $\int_E F = \{\int_E f : f \in S(F) \cap L_1(T,X)\}$ называется интегралом F на E. Функция $F: T \to cbc(X)$ называется измеримой, если найдется последовательность $\{f_n\} \subset S(F)$ такая, что $F(t) = cl\{f_n(t)\}$, $t \in T$, и интегрально ограниченной, если существует такая функция $h \in L_1(T,R)$, что $sup\{|x| : x \in F(t)\} \leq h(t)$ почти всюду на T.

В [1] фактически доказано, что множество $S(F)$ измеримых селекторов измеримой интегрально ограниченной функции $F: T \to cbc(X)$ замкнуто в $L_1(T,X)$ в топологии $\sigma[L_1(T,X), L_\infty(T,X^*)] \equiv \sigma$ при условии, что найдется счетное множество $\{x_n^*\} \subset X^*$, строго отделяющее точки пространства X от множеств $F(t)$, $t \in T \setminus S$, для некоторого подмножества $S \subset T$ нулевой меры.

Цель настоящей заметки - получить в аналогичных терминах необходимое условие σ-замкнутости $S(F)$ и описать функции F с этим свойством в частном случае, когда их значения $F(t)$, $t \in T$, имеют непустую внутренность.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$d(A,B) = inf\{|x-y| : x \in A,\ y \in B\}$ - зазор между A, $B \subset X$;

$[A]^\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) \leq \varepsilon\}$ - замкнутая ε-оболочка $A \subset X$;

$H(A,B) = inf\{\lambda > 0 : A \subseteq [B]^\lambda,\ B \subseteq [A]^\lambda\}$ - расстояние Хаусдорфа между A, $B \subset X$;

μ - мера Лебега.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $F: T \to cbc(X)$ измерима и интегрально ограничена. Если множество $S(F)$ σ-замкнуто, то существуют счетное множество $\{x_n^*\} \subset X^*$ и подмножества $S_x \subset T$ нулевой меры такие, что для любых $x \in X$, $t \in T \setminus S_x$, таких, что $x \bar{\in} F(t)$, найдется такое $n \in N$, что $sup\{\langle x_n^*, y\rangle : y \in F(t)\} < \langle x_n^*, x\rangle$.

Доказательство. Пусть $\{r_n\}$ - множество рациональных чисел, $\{x_n\}$ - счетное плотное в X множество, а $\{E_n\}$ - счетное множество всевозможных конечных объединений отрезков из T с рациональными концами. Если множества $[x_m]^{r_n}$ и $[\int_{E_k} F]^{r_n}$ не пересекаются, то строго разделяющий их функционал обозначим через x^*_{mnk}.

Возьмем некоторый $x \in X$ и положим

$$I_{mnk} = \{t \in T : \sup\{\langle x^*_{mnk}, y\rangle : y \in F(t)\} < \langle x^*_{mnk}, x\rangle\},$$

$$I = \{t \in T : x \bar{\in} F(t)\}, \quad J = I \setminus \bigcup_{m,n,k \in N} I_{mnk}.$$

Множества I, I_{mnk} и, следовательно, множество J измеримы [2]. Предположим, что $\mu J > 0$. Так как $S(F)$ σ-замкнуто по условию, то найдется такая $g \in L_\infty(T, X^*)$, что

$$\sup\{\int_J \langle g(t), y(t)\rangle : y \in S(F)\} < \int_J \langle g(t), x\rangle.$$

Отсюда следует, что найдутся такие $E \subset J$, $x^* \in X^*$, что

$$\sup\{\int_E \langle x^*, y(t)\rangle : y \in S(F)\} < \int_E \langle x^*, x\rangle.$$

Это означает, что функционал x^* строго разделяет $\int_E F$ и $\int_E x$, т.е. $d(\int_E F, \int_E x) = \varepsilon > 0$. Возьмем такие $m, n, k \in N$, что $H(\int_E F, \int_{E_k} F) \le r_n < \varepsilon/5$ и $|x_m - \int_E x| \le r_n < \varepsilon/5$.

Тогда

$$\int_E F \subset [\int_{E_k} F]^{r_n}, \quad \int_E x \in [x_m]^{r_n}, \quad [\int_{E_k} F]^{r_n} \cap [x_m]^{r_n} = \emptyset.$$

Следовательно, функционал x^*_{mnk} строго разделяет $\int_E F$ и $\int_E x$. Отсюда получаем, что найдется такое $A \subset E \subset J$, что $\mu A > 0$ и

$$\sup\{\langle x^*_{mnk}, y\rangle : y \in F(t)\} < \langle x^*_{mnk}, x\rangle, \ \forall t \in A.$$

Получили противоречие. Следовательно, $\mu J = 0$ и J можно выбрать в качестве S_x.

Теорема 2. Пусть функция $F : T \to cbc(X)$ измерима, интегрально ограничена и принимает значения с непустой внутренностью. Для того чтобы $S(F)$ было σ-замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы существовали счетное множество $\{x^*_n\} \subset X$ и подмножество $S \subset T$ нулевой меры такие, что для любых $x \in X$, $t \in T \setminus S$ таких, что $x \bar{\in} F(t)$, найдется такое $n \in N$, что $\sup\{\langle x^*_n, y\rangle : y \in F(t)\} < \langle x^*_n, x\rangle$.

Доказательство. Достаточность фактически доказана в [1].

Необходимость. По определению измеримости найдется такая последовательность $\{f_n\} \subset S(F)$, что $F(t) = cl\{f_n(t)\}$, $t \in T$. Очевидно, что функция

$$f = \sum_{n \in N} 2^{-n} \cdot f_n$$

измерима и $f(t) \in int\, F(t)$, $t \in T$. Так как множество $S(F)$ σ-замкнуто тогда и только тогда, когда σ-замкнуто множество $S(F) - f$, то можно считать, что $0 \in int\, F(t)$, $t \in T$, где 0 - ноль пространства X.

Наряду с F рассмотрим на T функции $F_n : t \to (1+\lambda_n) F(t)$, где последовательность $\{\lambda_n\}$ плотна в R^+. Так как $S(F_n) = (1+\lambda_n) S(F)$, то множества $S(F_n)$, $n \in N$, σ - замкнуты. Следовательно, для функций F_n, $n \in N$, справедлива теорема 1. Пусть $\{x^*_{in}, n \in N\} \subset X^*$ и $S^i_{x_n} \subset T$, $n \in N$, где последовательность $\{x_n\}$ плотна в X, - множества, существование которых для функции F_i, $i \in N$, гарантирует эта теорема, причем без ограничения общности считаем, что $|x^*_{in}| = 1$, $i, n \in N$.

Покажем, что тогда множества $\{x^*_{in}\}$ и $S = \bigcup_{i,n \in N} S^i_{x_n}$

удовлетворяют условиям нашей теоремы. Действительно, пусть $t \in T \setminus S$ $x \bar{\in} F(t)$. По условию некий шар $[0]^\delta$, $\delta > 0$, содержится в $F(t)$. Следовательно, $F(t) + [0]^{\delta \cdot \lambda_n} \subseteq F_n(t)$ и

$$\sup\{\langle x^*, y\rangle : y \in F(t)\} + \delta \cdot \lambda_n \cdot |x^*| \leq$$

$$\leq \sup\{\langle x^*, y\rangle : y \in F_n(t)\}, n \in N, x^* \in X^*.$$

Выберем теперь такие $m, n, k \in N$, что $x, x_m \bar{\in} F_n$, $|x_m - x| \leq \delta \cdot \lambda_n$, и функционал x^*_{nk} строго отделяет x_m от $F_n(t)$. Тогда $|\langle x^*_{nk}, x_m - x\rangle| \leq \delta \cdot \lambda_n$ и, следовательно,

$$\sup\{\langle x^*_{nk}, y\rangle : y \in F(t)\} \leq \sup\{\langle x^*_{nk}, y\rangle : y \in F_n(t)\} -$$

$$- \delta \cdot \lambda_n < \langle x^*_{nk}, x_m\rangle - \delta \cdot \lambda_n \leq \langle x^*_{nk}, x\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Поступила в ред.-изд. отдел
23 марта 1988 г.

Литература

1. Hiai F., Umegaki H. Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions // J. multivar. anal. - 1977. - V. 7. - P. 149-182.

2. Himmelberg C. Measurable relations // Fund. math. - 1975. - V. 87, N 1. - P. 53-72.