Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1988 г., вып. 28

УДК 517.977.1

ОДНА ТЕОРЕМА ТИПА "БЭНГ-БЭНГ" ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.И.Суслов

В этой заметке изучаются множества решений дифференциальных включений

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(0) = 0, \tag{1}$$

$$\dot{x} \in bd\, F(t,x),\ x(0) = 0, \tag{2}$$

в банаховом пространстве X. Здесь для всех $(t,x) \in T \times X$ множества $F(t,x) \subset X$ замкнуты, выпуклы, ограничены и имеют непустую внутренность, а $bd\, F(t,x)$ обозначает границу множества $F(t,x)$.

В [1] показано, что, если X рефлексивно, а F непрерывна в метрике Хаусдорфа, то (2) имеет хотя бы одно локальное решение. Более того, множество решений (2) плотно во множестве решений (1).

Мы показываем, что этот результат остается верен, если вместо рефлексивности требовать, чтобы X обладало свойством Радона-Никодима (RN). Свойством RN, кроме рефлексивных пространств, обладают, в частности, сепарабельные сопряженные пространства, пространства $\ell_1(\Gamma)$. (Более подробно об этом см. в [2].)

Метод доказательства такой же, как и в [1]: множество решений (2) представляется как счетное пересечение открытых плотных подмножеств (непустого) множества решений (1), а затем используется теорема Бэра о категориях. Отличие заключается в том, что для доказательства замкнутости подмножеств $\mathcal{T}_\delta$ (см. ниже лемму 2) решений (1) используется не теорема Мазура (для применения которой, в конечном счете и нужна рефлексивность X), а некоторое ее обобщение - лемма 1 - для специального вида выпуклых множеств в $L_1(R,X)$, получаемое так же, как и аналогичное утверждение в [3]. Свойство RN же нужно для получения полноты множества решений (1), необходимой в теореме Бэра. Конкретно оно используется для доказательства того, что равномерный предел траекторий есть траектория (см. лемму 2).

Основная теорема работы, теорема 2, дополняет недавно полученные в [4, 5] результаты по "бэнг-бэнг" принципу. В [4, 5] в правой части системы (2) стоит не граница множества $F(t,x)$, а замыкание его крайних точек, но требуется липшицевость (локальная) функции $F(t,\cdot)$ и компактность ее значений. Подробную библиографию по этому вопросу см. в [4].

§ 1. Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения:

$cl A$, $bd A$, $\mathcal{B}(A)$ - замыкание, граница и борелевская σ-алгебра множества A, соответственно;

R - числовая прямая;

μ - мера Лебега;

X - банахово пространство с нормой $|\cdot|$;

$d(X,A)=\inf\{|x-y| : y\in A\}$ - расстояние от x до $A\subset X$;

$A^{\varepsilon}=\{x\in X : d(x,A)\le \varepsilon\}$ - замкнутая ε-оболочка $A\subset X$;

$\rho(A,B)=\inf\{\lambda>0 : A\subseteq B^{\lambda},\ B\subseteq A^{\lambda}\}$ - расстояние Хаусдорфа между $A,B\subset X$;

$\mathcal{O}(X)$ - множество выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств X, имеющих непустую внутренность;

$r(A)=\sup\{\lambda>0 : \exists x\in A \quad d(x,bdA)\ge\lambda\}$ - внутренний радиус множества $A\in\mathcal{O}(X)$;

$S(I,F)=\{f\in L_1(I,X) : f(t)\in F(t),\ t\in I\}$ - множество интегрируемых селекторов функции $F: I\to\mathcal{O}(X)$.

$I\in\mathcal{B}(R)$; $\int_I F=\{\int_I f : f\in S(I,F)\}$ - интеграл Аумана функции F на $I\in\mathcal{B}(R)$.

Предполагается, что функция $F: R\times X\to\mathcal{O}(X)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа, $\sup\{|y| : y\in F(t,x)\}\le M$ для всех $(t,x)\in R\times X$ и некоторого $M>0$, а пространство X обладает свойством RN, т.е. каждая абсолютно непрерывная функция $x: R\to X$ почти всюду дифференцируема и восстанавливается по своей производной [2]: $x(t)-x(s)=\int_s^t \dot{x},\ s<t$.

Под решением (траекторией) системы (1) на отрезке $I\subset R$ будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x: I\to X$, удовлетворяющую почти всюду на I соотношениям (1). Множество траекторий системы (1) на отрезке I будем обозначать через $\mathcal{T}(I,F)$.

Нам понадобятся следующие результаты из [1], которые здесь формулируются как

Т е о р е м а 1. Существует такой отрезок $T=[0,\tau]\subset R$, что $\mathcal{T}(T,F)\neq\emptyset$. Более того,

$$\mathcal{T}(T,F)=cl\{x\in\mathcal{T}(T,F) : \int_T d(\dot{x}(t),bdF(t,x(t)))<\varepsilon\},\quad \forall\varepsilon>0,$$

где замыкание берется в пространстве $C(T,X)$.

Всюду в дальнейшем T обозначает отрезок, существование которого гарантирует теорема 1, а вместо $\mathcal{J}(T, F)$ используется обозначение $\mathcal{J}(F)$.

§ 2. Основной результат

Лемма 1. Пусть $F : I \to \mathcal{O}(X)$, $I \in \mathcal{L}(T)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа, $f \in S(I, F)$, а $\alpha \in L_1(I, R)$ такова, что $\alpha(t) < r(F(t))$, $t \in I$. Определим функцию $F_\alpha : I \to \mathcal{O}(X)$ следующим образом:

$$F_\alpha(t) = \{x \in F(t) : d(x, bd\,F(t)) \geq \alpha(t)\}.$$

Тогда для того, чтобы $f \in S(I, F_\alpha)$, достаточно, чтобы

$$\int_B f \in cl \int_B F_\alpha, \ \forall B \in \mathcal{L}(I).$$

Доказательство. По теореме Лузина, существуют такие $E_n \in \mathcal{L}(I)$, что $\mu(I \setminus E_n) \leq n^{-1}$, а функции α и f непрерывны на каждом E_n, $n \in N$. Причем, можно считать, что для любого $n \in N$ все точки множества E_n являются его точками плотности [6, с.286].

Предположим, что $f \bar{\in} S(I, F_\alpha)$. Тогда найдутся такие $t_0 \in I$, $n_0 \in N$, что $f(t_0) \bar{\in} F_\alpha(t_0)$, $t_0 \in E_{n_0}$. Пусть $d(f(t_0), F_\alpha(t_0)) = 3\varepsilon$. В силу непрерывности функций F, α и f на E_{n_0} существует такое $\delta > 0$, что

$$F_\alpha(t) \subseteq [F_\alpha(t_0)]^\varepsilon \equiv U, \ f(t) \in [f(t_0)]^\varepsilon \equiv V, \quad \forall t \in A,$$

где $A = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap E_{n_0}$. Так как t_0 - точка плотности множества E_{n_0}, то $\mu A > 0$. Остается заметить, что, поскольку $U \cap V = \emptyset$, то некоторый функционал $x^* \in X^*$ отделяет множества U и V [7, с.452] и, следовательно, точку $\int_A f$ и множество $\int_A F_\alpha$. Таким образом, $\int_A f \bar{\in} cl \int_A F_\alpha$. Получили противоречие.

Лемма 2. Множество

$$\mathcal{J}_\delta(F) = \left\{x \in \mathcal{J}(F) : \int_T d(\dot{x}(t), bd\,F(t, x(t))) \geq \delta\right\}$$

замкнуто в $C(T, X)$ для любого $\delta > 0$. (Пустое множество считаем замкнутым.)

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n \in N} \subset \mathcal{J}_\delta(F)$ сходится к некоторому $x \in C(T, X)$. Нетрудно видеть, что, поскольку $\sup\{|y| : y \in F(t, x), (t, x) \in T \times X\} \leq M$, то x абсолютно непрерывна. Следовательно,

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}, \ \forall t \in T,$$

так как X обладает RN -свойством.

Положим

$$G : t \to F(t, x(t)),\ G_n : t \to F(t, x_n(t)),$$

$$\alpha_n : t \to d(\dot{x}(t), bd\ G_n(t)), \quad n \in N.$$

Функции α_n измеримы в силу непрерывности функций $t \to bd\ G_n(t)$, $n \in N$. Поскольку по условию $\alpha_n(t) \leq M$, $\forall n \in N$, $t \in T$, то последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ относительно слабо компактна в $L_1(T, R)$ и можно считать, выбирая, если нужно, подпоследовательность, что она сходится к некоторому $\alpha \in L_1(T, R)$ [7, с. 317]. По теореме Мазура [7, с. 457], существует последовательность

$$\left\{ \beta_n = \sum_{i=1}^{K_n} \lambda_i^n \cdot \alpha_{n_i},\ \sum_{i=1}^{K_n} \lambda_i^n = 1,\ \lambda_i^n \geq 0,\ n_i \geq n,\ i \leq K_n \right\}_{n \in N},$$

сильно сходящаяся к α. Причем можно считать, выбирая, если нужно, подпоследовательность, что $\beta_n(t) \to \alpha(t)$ почти всюду на T [7, с. 167]. По теореме Егорова [7, с. 166] существуют такие компакты E_K, что $\mu(T \setminus E_K) \leq K^{-1}$ и $\{\beta_n\}_{n \in N}$ равномерно сходится к α на каждом E_K, $K \in N$.

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и такие $K_0, n_0 \in N$, что $K_0^{-1} \leq \varepsilon$ и

$$|\beta_n(t) - \alpha(t)| \leq \varepsilon,\ \rho(G_n(t), G(t)) \leq \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ t \in E_{K_0}.$$

Заметим, что

$$\dot{x}_n(t) \in [G^\varepsilon]_{\alpha_n}(t) \quad \text{для почти всех } t \in E_{K_0},\ \forall n \geq n_0.$$

Поскольку, по лемме 5.2 [1], функция $x \to d(x, bd\ A)$ вогнута на любом $A \in \mathcal{O}(X)$, то для

$$y_n = \sum_{i=1}^{K_n} \lambda_i^n\ \dot{x}_{n_i}$$

имеем

$$y_n(t) \in [G^\varepsilon]_{\beta_n}(t) \quad \text{для почти всех } t \in E_{K_0},\ \forall n \geq n_0,$$

и, следовательно,

$$y_n(t) \in [G^\varepsilon]_{(\alpha - \varepsilon)}(t) \quad \text{для почти всех } t \in E_{K_0},\ \forall n \geq n_0.$$

Отсюда в свою очередь получаем, что

$$\int_B \dot{x} = \lim_{n \to \infty} \int_B y_n \in cl \int_B [G^\varepsilon]_{(\alpha - \varepsilon)},\ \forall B \in \mathcal{L}(E_{K_0}).$$

Тогда по лемме 1 получаем $\dot{x} \mid E_{K_0} \in S(E_{K_0}, [G^{\varepsilon}](\alpha-\varepsilon))$ что, в силу произвольности ε, дает $\dot{x} \in S(T, G_{\alpha})$. Остается заметить, что

$$\int_T \alpha = \lim_{n\to\infty} \int_T \alpha_n \geq \delta .$$

Т е о р е м а 2. $\mathcal{T}(F) = cl\,\mathcal{T}(bd\,F)$ в пространстве $C(T, X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 имеем $\mathcal{T}(F) = cl[\mathcal{T}(F) \setminus \mathcal{T}_{n-1}(F)]$, а по лемме 2 множества $\mathcal{T}(F)$, $\mathcal{T}_{n-1}(F)$ замкнуты в $C(T, X)$. Теперь наше утверждение следует из теоремы Бэра [7, с. 31], поскольку

$$\mathcal{T}(bd\,F) \supseteq \bigcap_{n\in N} [\mathcal{T}(F) \setminus \mathcal{T}_{n-1}(F)].$$

Поступила в ред.-изд. отдел
12 февраля 1987 г.

Л и т е р а т у р а

1. De Blasi F.S., Pianigiani G. A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces// Funkcialaj Ekvacioj.- 1982.- Vol. 25, N 2.- P. 153-162.

2. Diestel J., Uhl J. Vector measures// Math. Surveys, 15, Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1977. - 322 p.

3. Суслов С.И. Управление в банаховых пространствах со свойством Радона-Никодима// Управляемые процессы и оптимизация (Управляемые системы). - Новосибирск, 1982. - Вып. 22. - С. 58-65.

4. Толстоногов А.А., Финогенко И.А. О решениях дифференциального включения с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве// Мат. сборник. - 1984. - Т. 122, № 2. - С. 199-230.

5. Bressan A. On a bang-bang principle for nonlinear systems // Boll. Unione Math. Italiana (Suppl). Anal. Funz. e Appl. - 1980. - Vol. 1. - P. 53-59.

6. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: ГИТТЛ, 1957. - 552 с.

7. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 895 с.