Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1988 г., вып. 28

УДК 517.91/4

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, НЕ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

М.-А.Мухсинов

В банаховом пространстве E для задачи

$$\dot{\varphi}(t) \in F(\varphi(t), t), \quad \varphi(t_0) = x_0 \in \Omega, \tag{1}$$

где $\dot\varphi(t)$ – сильная производная искомой функции φ в точке t, $F(x,t)$ – непустое множество из E при $x \in E$, $t \geq t_0 \geq 0$ и Ω – непустое множество из E, без предположений о выпуклости и компактности множеств $F(x,t)$ приводятся условия, при выполнении которых множество Ω сильно инвариантно для задачи (1). Т.е. для любых $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \Omega$ множество решений задачи (1) не пусто и каждое решение φ задачи (1) удовлетворяет фазовому ограничению $\varphi(t) \in \Omega$ при любых $t_0 \geq 0,\ x_0 \in \Omega,\ t \in [t_0, t_\varphi)$, где $[t_0, t_\varphi)$ – правый максимальный интервал существования решения φ. Определение решения задачи (1) приведено в [1 и 2].

Приведем некоторые обозначения, определения и факты, используемые в дальнейшем. Если $x \in E$, то $\rho(x, \Omega) = inf\{\|x-y\| : y \in \Omega\}$. Известно, что $|\rho(x, \Omega) - \rho(y, \Omega)| \leq \rho(x, y)$ при любых $x, y \in E$. Если A, B – непустые множества из E, то

$$\chi(A, B) = max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\}.$$

В дальнейшем $\bar\Omega$ – замыкание, а $\partial\Omega$ – граница множества Ω. При $x \in \bar\Omega$ положим

$$Cont(\Omega; x) = \left\{v \in E : \liminf_{h \to 0+} \frac{\rho(x+hv, \Omega)}{h} = 0\right\}.$$

Легко видеть, что $Cont(\Omega; x)$ – непустой замкнутый конус, содержащий нулевой элемент пространства E. Если Ω – звездное множество относительно точки $x \in \bar\Omega$ (например, Ω – выпуклое множество), то легко проверить, что $\beta(\bar\Omega - x) \subset Cont(\Omega; x)$ при любом $\beta \geq 0$. Если же x – внутренняя точка множества Ω, то, очевидно, $Cont(\Omega; x) = E$. Отображение $\omega : E \to \Omega$, задаваемое равенством

$$\omega(x) = \{y \in \Omega : \rho(x,y) = \rho(x, \Omega)\}, \quad x \in E,$$

называется метрической проекцией на множество Ω, а $\omega(x)$ - множеством элементов наилучшего приближения для x в множестве Ω. Множество Ω называется множеством существования, если $\omega(x) \neq \emptyset$ для любой точки $x \in E$. Очевидно, что каждое множество существования является замкнутым множеством. Множество Ω называется чебышевским, если множество $\omega(x)$ одноточечно для любой точки $x \in E$. Множество $\Omega \subset E$ является множеством существования, например, в следующих случаях:

а) E рефлексивно и строго выпукло (например, E - гильбертово пространство) и Ω замкнуто и выпукло;

б) E рефлексивно и Ω - гиперплоскость;

в) $E = C[a,b]$ и Ω - подпространство алгебраических многочленов степени $\leq n$ или Ω - множество рациональных дробей с фиксированными степенями числителя и знаменателя;

г) Ω аппроксимативно слабо компактно, т.е. для любой точки $x \in E$ из того, что

$$y_n \in \Omega,\ n = 1, 2, \ldots,\ \lim_{n \to \infty} \rho(x, y_n) = \rho(x, \Omega)$$

следует, что последовательность y_n имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся к точке $y \in \Omega$;

д) E равномерно выпуклое и Ω выпукло и аппроксимативно компактно;

е) Ω замкнуто и локально компактно;

ж) Ω ограниченно компактно, т.е. замыкание $\bar{M}$ каждого ограниченного подмножества $M \subset \Omega$ компактно и содержится в Ω;

з) Ω компактно в топологии $\sigma(E, E')$;

и) Ω - рефлексивное (например, конечномерное) подпространство;

к) E рефлексивно и Ω слабо секвенциально замкнуто (например, Ω замкнуто и выпукло);

л) Ω - замкнутый шар;

м) E конечномерно и Ω замкнуто.

Заметим, что в случаях "а -в", "д" множество Ω является чебышевским. В остальных случаях Ω будет чебышевским, если дополнительно предположить выпуклость Ω и строгую выпуклость нормы пространства E.

При $x \in E$, $\omega(x) \neq \emptyset$, $t \geq 0$ положим

$$K(x,t) = \{v \in E : \rho(Cont(\Omega; \omega(x)), v) \leq k(\rho(x, \Omega), t)\},$$

где

$$Cont(\Omega; \omega(x)) = \bigcup_{y \in \omega(x)} Cont(\Omega; y)$$

и неотрицательная функция $k : R_+ \times R_+ \to R_+$ может обладать следующими свойствами:

1) $k(0,t)\equiv 0,\ t\in R_+=[0,\infty)$;

2) для любого $t_0\geq 0$ функция $\gamma(t)\equiv 0$, $t\geq t_0$, является единственной неотрицательной абсолютно непрерывной функцией, для которой $\gamma(t_0)=0$ и $\gamma'(t)\leq k(\gamma(t),t)$ при почти всех $t\in[t_0,\infty)$. Из неотрицательности функции k следует, что $Cont(\Omega;\omega(x))\subset K(x,t)$ при $x\in E$, $\omega(x)\neq\phi$, $t\geq 0$. Из свойства 1 функции k следует, что $K(x,t)=Cont(\Omega;x)$ при $x\in\Omega,\ t\geq 0$.

Лемма 1. Пусть Ω - множество существования, функция $\delta: R_+\to E$ такая, что $\lim\limits_{h\to 0+}\delta(h)=0$. Тогда для любых точек x, $v\in E$ имеет место неравенство

$$\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}(\rho(x+h\cdot(\delta(h)+v),\Omega)-\rho(x,\Omega))\leq$$
$$\leq\rho(Cont(\Omega;\omega(x)),v).$$

Доказательство. Пусть $x\in\Omega$. Тогда $\omega(x)=x$. Возьмем произвольную точку $y\in Cont(\Omega;x)$ и положим $w=y-\delta(h)$. Из очевидных соотношений

$$\rho(x+h\cdot(\delta(h)+v),\Omega)-\rho(x+h\cdot(\delta(h)+w),\Omega)\leq$$
$$\leq h\cdot\rho(v,w)=h\|v-y+\delta(h)\|\leq h\cdot(\rho(v,y)+\|\delta(h)\|).$$

следует искомое неравенство,

$$\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\cdot\rho(x+h(\delta(h)+v),\Omega)\leq\rho(Cont(\Omega;x),v),$$

так как

$$\rho(x,\Omega)=0,\ \lim_{h\to 0+}\|\delta(h)\|=0,$$

$$\liminf_{h\to 0+}\frac{1}{h}\cdot\rho(x+h\cdot(\delta(h)+w),\Omega)=0$$

и y - произвольная точка из $Cont(\Omega;x)$. Теперь пусть $x\in E$ и $z\in\omega(x)$. Тогда из соотношений

$$\frac{1}{h}\cdot(\rho(x+h\cdot(\delta(h)+v),\Omega)-\rho(x,\Omega))\leq$$
$$\leq\frac{1}{h}\|x+h\cdot(\delta(h)+v)-z-h\cdot(\delta(h)+v)\|-\rho(x,\Omega)+$$
$$+\rho(z+h\cdot(\delta(h)+v),\Omega))=\frac{1}{h}\cdot\rho(z+h\cdot(\delta(h)+v),\Omega),$$

учитывая, что точка $z \in \Omega$, получаем

$$\liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h}\cdot(\rho(x+h\cdot(\delta(h)+v),\Omega)-\rho(x,\Omega)) \le$$

$$\le \liminf_{h\to 0+} \frac{1}{h}\cdot(\rho(z+h\cdot(\delta(h)+v),\Omega)) \le \rho(Cont(\Omega;z),v).$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как z – произвольная точка из $\omega(x)$.

Теорема 1. Пусть Ω – множество существования, неотрицательная функция $k: R_+ \times R_+ \to R_+$ обладает свойством 2. Тогда множество Ω сильно инвариантно для задачи

$$\dot\varphi(t) \in K(\varphi(t),t), \quad \varphi(t_1)=x_1 \in \Omega. \tag{2}$$

Доказательство. Множество решений задачи (2) не пусто, так как $0 \in K(x,t)$ при любых $x \in E$, $t \ge 0$, и поэтому для любых $x_1 \in \Omega$, $t_1 \ge 0$ постоянная функция $\varphi(t) \equiv x_1$, $t \in [t_1,\infty)$ является решением задачи (2). Пусть φ – решение задачи (2) и $[t_1,t_\varphi)$ – его правый максимальный интервал существования. Положим $\gamma(t)=\rho(\varphi(t),\Omega)$, $t \in [t_1,t_\varphi)$. Функция γ абсолютно непрерывна, потому что функция $x \to \rho(x,\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица, а функция φ абсолютно непрерывна. Возьмем $t \in [t_1,t_\varphi)$ такое, что существуют производные $\gamma'(t)$ и $\dot\varphi(t)$. Тогда $\varphi(t+h)=\varphi(t)+h\cdot(\dot\varphi(t)+\delta(h))$, где $\lim\limits_{h\to 0+}\delta(h)=0$.

Поэтому из леммы 1 при $x=\varphi(t)$, $v=\dot\varphi(t)$ получим

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}(\rho(\varphi(t)+h\cdot(\dot\varphi(t)+\delta(h)),\Omega)-\rho(\varphi(t),\Omega)) \le$$

$$\le \rho(Cont(\Omega;\omega(\varphi(t))),\dot\varphi(t)).$$

В силу (2) и определения множества $K(x,t)$ имеем

$$\rho(Cont(\Omega;\omega(\varphi(t))),\dot\varphi(t)) \le k(\rho(\varphi(t),\Omega),t).$$

Значит, $\gamma'(t) \le k(\gamma(t),t)$ для почти всех $t \in [t_1,t_\varphi)$. Теперь из свойства 2 функции k следует, что $\rho(\varphi(t),\Omega) \equiv 0$, так как $\gamma(t_1)=0$. Следовательно, $\varphi(t) \in \Omega$ при всех $t \in [t_1,t_\varphi)$, потому что множество Ω замкнуто. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения теоремы 1 и существует открытое множество $G \subset E$, содержащее границу $\partial\Omega$ множества Ω и такое, что $F(x,t) \subset K(x,t)$ для всех $x \in G \setminus \Omega$ и почти всех $t \ge 0$. Кроме того пусть для любых $t_0 \ge 0$, $x_0 \in \Omega$ задача (1) имеет решение. Тогда множество Ω сильно инвариантно для задачи (1).

Доказательство. Пусть множество Ω не является инвариантным для задачи (1). Тогда найдутся решение φ задачи (1) и непустые отрезки $[t_0,t_1]\subset[t_0,t_2)\subset[t_0,t_\varphi)$ такие, что $\varphi([t_0,t_1])\subset\Omega$, $\varphi(t_1)=x_1\in\partial\Omega$, $\varphi((t_1,t_2))\subset G\setminus\Omega$, где $t_0\le t_1<t_2\le t_\varphi$. Так как множество Ω замкнуто, то из последних включений и вложения $F(x,t)\subset K(x,t)$ на $G\setminus\Omega$ следует, что сужение функции φ на отрезке $[t_1,t_2]$ является решением задачи (2), для которого $\varphi(t_1)=x_1\in\Omega$ и $\varphi(t)\notin\Omega$ при всех $t\in(t_1,t_2)$. Но это противоречит тому, что в силу теоремы 1 множество Ω сильно инвариантно для задачи (2). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения теоремы 1 и $F(z,t)\subset Cont(\Omega;z)$ при всех $z\in\partial\Omega$ и почти всех $t\ge 0$. Пусть существует открытое множество $G\supset\partial\Omega$ такое, что

$$\chi(F(x,t),F(z,t))\le k(\|x-z\|,t) \tag{3}$$

при всех $x\in G\setminus\Omega$, $z\in\omega(x)$ и почти всех $t\ge 0$. Пусть для любых $t_0\ge 0$, $x_0\in\Omega$ задача (1) имеет решение. Тогда множество Ω сильно инвариантно для задачи (1).

Доказательство. Покажем, что при всех $x\in G\setminus\Omega$ и почти всех $t\ge 0$ имеет место вложение $F(x,t)\subset K(x,t)$. Тогда из теоремы 2 будет следовать, что Ω сильно инвариантно для задачи (1). При произвольных $x\in G\setminus\Omega$, $v\in F(x,t)$, $z\in\omega(x)$ из вложения $F(z,t)\subset Cont(\Omega;z)$ и условия (3) получим неравенства

$$\rho(Cont(\Omega;\omega(x)),v)\le\rho(Cont(\Omega;z),v)\le\rho(F(z,t),v)\le$$

$$\le\chi(F(x,t),F(z,t))\le k(\rho(x,\Omega),t),$$

из которых в силу определения множества $K(x,t)$ следует, что $F(x,t)\subset K(x,t)$ при всех $x\in G\setminus\Omega$ и почти всех $t\ge 0$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть Ω - выпуклое множество существования в сепарабельном банаховом пространстве E, при каждом $x\in E$ отображение $t\to F(x,t)$ измеримо на R_+, найдется открытое множество $G\supset\Omega$ и точка $y\in G$ такие, что отображение $t\to F(y,t)$ ограничено локально суммируемой функцией и при всех $x,z\in G$ для почти всех $t\ge 0$ множество $F(x,t)$ замкнуто и

$$\chi(F(x,t),F(z,t))\le\lambda(t)\cdot\|x-z\|, \tag{4}$$

где функция $\lambda: R_+\to R_+$ локально суммируема.

Пусть $F(x,t)+x\subset\Omega$ при всех $x\in\Omega$ и почти всех $t\ge 0$. Тогда множество Ω сильно инвариантно для задачи (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из [3] следует, что для любых $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \Omega$ задача (1) имеет решение. Так как Ω - выпуклое множество, то $\Omega - x \subset Cont(\Omega; x)$ при всех $x \in \Omega$. Поэтому из вложения $F(x,t) + x \subset \Omega$ следует, что $F(x,t) \subset Cont(\Omega; x)$ при всех $x \in \Omega$. Теперь остается заметить, что предположения теоремы 3 выполняются при $k(s,t) \equiv \lambda(t) \cdot s$, $s \geq 0$, $t \geq 0$. Поэтому теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть Ω - множество существования в сепарабельном банаховом пространстве E. При каждом $x \in E$ отображение $t \mapsto F(x,t)$ измеримо на R_+ и для некоторой точки $y \in E$ отображение $t \mapsto F(y,t)$ ограничено локально суммируемой функцией. При всех $x, z \in E$ и почти всех $t \geq 0$ множество $F(x,t)$ замкнуто и выполняется условие Липшица (4). Пусть, далее, $F(x,t) \subset Cont(\Omega; x)$ при всех $x \in \partial\Omega$ и почти всех $t \geq 0$. Тогда Ω сильно инвариантно для задачи (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Из [3] следует, что для любых $t_0 \geq 0$, $x_0 \in E$ задача (1) имеет решение. При $k(s,t) \equiv \lambda(t) \cdot s$, $G = E$, предположения теоремы 3 выполнены. Поэтому теорема доказана.

В дальнейшем E - гильбертово пространство и $Re\langle x, y\rangle$ - вещественная часть скалярного произведения $\langle x, y\rangle$ элементов x, y.

Л е м м а 2. Пусть Ω - множество существования в гильбертовом пространстве E и функция $\delta : R_+ \to E$ такая, что

$$\lim_{h \to 0+} \delta(h) = 0 .$$

Тогда для любых точек $x, v \in E$ и $z \in \omega(x)$ имеет место неравенство

$$\liminf_{h \to 0+} \frac{\rho^2(x + h\cdot(\delta(h) + v), \Omega) - \rho^2(x, \Omega)}{h} \leq$$

$$\leq 2 Re\langle x - z, v\rangle .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x, v \in E$, $z \in \omega(x)$, $h \geq 0$. Тогда

$$\rho^2(x + h\cdot(\delta(h) + v), \Omega) \leq \|x + h\cdot(\delta(h) + v) - z\|^2 =$$

$$= \langle x - z + h(\delta(h) + v), x - z + h\cdot(\delta(h) + v)\rangle = \|x - z\|^2 +$$

$$+ 2 Re\langle x - z, h\cdot(\delta(h) + v)\rangle + h^2 \cdot \|\delta(h) + v\|^2 .$$

Так как $\|x - z\| = \rho(x, \Omega)$, $h > 0$, то имеем

$$\frac{\rho^2(x + h\cdot(\delta(h) + v), \Omega) - \rho^2(x, \Omega)}{h} \leq$$

$$\le 2\,\mathrm{Re}\langle x-z, v\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x-z, \delta(h)\rangle + h\cdot\|\delta(h)+v\|^2 .$$

Переходя в последнем неравенстве к $\liminf$ при $h \to 0+$, получаем утверждение леммы.

При $x \in E$, $z \in \omega(x)$, $t \geq 0$ положим

$$\Gamma_0(x) = \bigcup_{z \in \omega(x)} \{v \in E : \mathrm{Re}\langle x-z, v\rangle \le 0\},$$

$$\Gamma(x,t) = \bigcup_{z \in \omega(x)} \{v \in E : 2\,\mathrm{Re}\langle x-z, v\rangle \le k(\|x-z\|^2, t)\},$$

где функция $k : R_+ \times R_+ \to R$ обладает свойством 2. Отметим некоторые свойства введенных множеств. $\mathrm{Cont}(\Omega; x) \subset \Gamma_0(x) = E$ при всех $x \in \bar{\Omega}$, $t \geq 0$. Если $k(\|x-z\|^2, t) \geq 0$ при всех $z \in \omega(x)$, то $\Gamma_0(x) \subset \Gamma(x,t)$. Например, если $k(0,t) \geq 0$, то $\Gamma(x,t) = E$ при всех $x \in \Omega$, $t \geq 0$. Множество $\Gamma_0(x)$ является выпуклым конусом при любых $x \in E$, $t \geq 0$. Если $k(s,t) \equiv 0$, $s \geq 0$, $t \geq 0$, то $\Gamma(x,t) \equiv \Gamma_0(x)$, $x \in E$, $t \geq 0$. Если множество $\omega(x)$ компактно, то множество $\Gamma_0(x)$ замкнуто, а для замкнутости множества $\Gamma(x,t)$ достаточно предположить компактность множества $\omega(x)$ и непрерывность функции $k(s,t)$ по первому аргументу. Если же Ω - чебышевское множество, то множества $\Gamma_0(x)$ и $\Gamma(x,t)$ замкнуты независимо от функции k.

Т е о р е м а 6. Пусть Ω - множество существования в гильбертовом пространстве E и функция k неотрицательна и обладает свойством 2. Тогда множество Ω сильно инвариантно для задачи

$$\dot{\varphi}(t) \in \Gamma(\varphi(t), t), \quad \varphi(t_1) = x_1 \in \Omega . \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $0 \in \Gamma(x,t)$ при любых $x \in E$, $t \geq 0$, то множество решений задачи (5) не пусто. Пусть φ - произвольное решение задачи (5) и $[t_1, t_\varphi)$ - его правый максимальный интервал существования. Положим $\gamma(t) = \rho^2(\varphi(t), \Omega)$, $t \in [t_1, t_\varphi)$. Функция γ абсолютно непрерывна как квадрат абсолютно непрерывной функции $t \to \rho(\varphi(t), \Omega)$. Возьмем $t \in [t_1, t_\varphi]$ такое, что существуют производные $\gamma'(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$. Тогда $\varphi(t+h) = \varphi(t) + h\cdot(\dot{\varphi}(t) + \delta(h))$, где

$$\lim_{h \to 0+} \delta(h) = 0 .$$

Из леммы 2 при $x = \varphi(t)$, $v = \dot{\varphi}(t)$, $z(t) \in \omega(\varphi(t))$ получим

$$\gamma'(t) \leq 2\,\mathrm{Re}\,\langle \varphi(t) - z(t), \dot{\varphi}(t) \rangle .$$

На основании включения (5) и определения множества $\Gamma(x,t)$ имеем $\gamma'(t) \leq k(\gamma(t),t)$ при почти всех $t \in [t_1, t_\varphi)$ и $\gamma(t_1) = 0$. Теперь из свойства 2 функции k следует, что $\gamma(t) \equiv 0$, $t \in [t_1, t_\varphi)$. Следовательно, $\varphi(t) \in \Omega$ при всех $t \in [t_1, t_\varphi)$, так как множество Ω замкнуто. Теорема доказана.

Как отмечалось выше, при $k(s,t) \equiv 0$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ имеет место равенство $\Gamma(x,t) \equiv \Gamma_0(x)$, $x \in E$, $t \geq 0$, и, очевидно, функция $k(s,t) \equiv 0$ обладает свойством 2. Поэтому из теоремы 6 вытекает следующее.

С л е д с т в и е. Пусть Ω – множество существования в гильбертовом пространстве E. Тогда Ω сильно инвариантно для задачи

$$\dot{\varphi}(t) \in \Gamma_0(\varphi(t)), \quad \varphi(t_1) = x_1 \in \Omega .$$

С помощью теоремы 6 и аналогично теореме 2 доказывается следующая

Т е о р е м а 7. Пусть выполнены предположения теоремы 6 и существует открытое множество $G \supset \partial\Omega$ такое, что $F(x,t) \subset \Gamma(x,t)$ для всех $x \in G \setminus \Omega$, $t \geq 0$. Пусть для любых $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \Omega$ задача (1) имеет решение. Тогда Ω сильно инвариантно для задачи (1).

В теоремах 2, 3, 7 имеется предположение о существовании решения задачи (1). Условия, обеспечивающие выполнение этого предположения без требования выпуклозначности и компактнозначности отображения F, содержит следующая

Т е о р е м а 8. В банаховом пространстве E каждое из следующих условий достаточно для того, чтобы при любых $t_0 \geq 0$, $x_0 \in \Omega$ задача (1) имела решение:

1. Ω представимо как объединение компактных множеств Ω_i, $i \in I$ таких, что для любых $i \in I$, $t_0 \geq 0$ сужение F на множестве $\Omega_i \times [t_0, t_i)$, где $t_i > t_0$, является ограниченным и полунепрерывным снизу отображением с замкнутыми значениями $F(x,t) \subset E$ и

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\rho(x + hv, \Omega_i)}{h} = 0$$

при всех $x \in \Omega_i$, $v \in F(x,t)$, $t \in [t_0, t_i)$.

II. F –полунепрерывное сверху отображение с замкнутыми и выпуклыми значениями $F(x,t) \subset E$ такое, что для любых $x_0 \in \Omega$, $t_0 \geq 0$ найдутся замкнутый шар B радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 и константы $a > 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ такие, что при $x \in B$, $t \in T = [t_0, t_0 + a]$ множество

$$f(x,t)=\{v\in F(x,t): \|v\|\leq \rho(F(x,t),0)+b\}$$

не пусто и для каждого некомпактного замкнутого выпуклого множества $M\subset B$ выполнено неравенство

$$\alpha(f[M\times T])\leq c\cdot\alpha(M), \tag{6}$$

где α -мера некомпактности Куратовского.

Доказательство. Достаточность условия 1 следует из [4]. Докажем достаточность условия II. Для этого сначала заметим, что заключение леммы 5 из [1] верно и в том случае, когда неравенство (6) выполняется лишь для некомпактных замкнутых выпуклых множеств $M\subset B$. Поэтому существует непустое выпуклое компактное множество $K\subset B$ такое, что

$$K=x_0+\overline{\bigcup_{0\leq\beta\leq\varepsilon}\beta\cdot co f[K\times T]}$$

при некотором $0<\varepsilon\leq a$ таком, что $\varepsilon\cdot c<1$. В силу [5] существует такая последовательность локально липшицевых функций $f_n: K\times T\to E$, что множества значений $f_n[K\times T]$ содержатся в некотором фиксированном компакте из E и

$$\sup\{\rho(f_n(x,t),F(x,t)): x\in K,\ t\in T\}\leq\frac{1}{n} \tag{7}$$

при всех $n\in\{1,2,\dots\}$. Пусть φ_n - решение задачи

$$\dot\varphi_n(t)=f_n(\varphi_n(t),t),\quad \varphi_n(t_0)=x_0,$$

определенное на отрезке $I=[t_0,t_0+\varepsilon]\subset T$ и такое, что $\varphi_n(t)\in K$ при всех $t\in I$. По теореме Арцела-Асколи из последовательности $\{\varphi_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, которую без ограничения общности также будем обозначать через $\{\varphi_n\}$. Пусть φ - предел $\{\varphi_n\}$ в топологии равномерной сходимости. Множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\dot\varphi_n(t): t\in I\}$$

содержится в фиксированном компакте, поэтому из [6] следует, что последовательность производных $\{\dot\varphi_n\}$ относительно слабо компактна в банаховом пространстве $L_1(I,E)$ интегрируемых по Бохнеру функций, действующих из I в E. В банаховом пространстве относительная слабая компактность множества эквивалентна его относительной слабой секвенциальной компактности [7, с.291, теорема 1], поэтому из последовательности $\{\dot\varphi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в слабой топологии пространства $L_1(I,E)$. Без потери общности будем считать, что сама последовательность $\{\dot\varphi_n\}$ слабо сходится к функции $w \in L_1(I, E)$. При любом фиксированном $t \in I$ таком, что $t > t_0$, интеграл Бохнера является линейным непрерывным отображением, действующим из $L_1([t_0, t], E)$ в E. Поэтому в силу [8, с. 62, предложение 13] его непрерывность сохраняется и при наделении пространств $L_1([t_0, t], E)$ и E их слабыми топологиями. Поскольку $\varphi_n(t) - x_0$ слабо сходится к $\varphi(t) - x_0$, то из равенства

$$\varphi_n(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}_n(\tau)\, d\tau$$

при $n \to \infty$ получаем, что

$$\varphi(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} w(\tau)\, d\tau$$

при любом $t \in I$. Следовательно, $\varphi(x_0) = x_0$ и существует производная $\dot{\varphi}(t) = w(t)$ при почти всех $t \in I$. Теперь в силу (7) получаем, что функция

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(\tau)\, d\tau, \quad t \in I,$$

является решением задачи (1). Теорема доказана.

Поступила в ред.-изд. отдел
2 августа 1986 г.

Литература

1. Мухсинов М.-А. О дифференциальных включениях в банаховых пространствах// Докл. АН СССР. - 1974. - Т. 217, № 4. - С. 759-761.

2. Мухсинов М.-А. О решениях дифференциальных включений в банаховом пространстве// Докл. АН Тадж.ССР. - 1981. - Т. 24, № 6. - С. 339-342.

3. Мухсинов М.-А. О существовании решений дифференциальных включений при наличии фазовых ограничений// Докл. АН УзССР. - 1984. № 2. С. 5-7.

4. Bressan A. Solutions of lower semicontinuous differential inclusions on closed sets.// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.- 1983.-V.69. - P. 99-107.

5. Cellina A. Approximation of set-valued functions and fixed point theorems.// Ann. Mat. Pura Appl. - 1969. - V. 82. - P. 17-24.

6. Diestel J. Remarks on weak compactness in $L_1(\mu, X)$ // Glasgow Math. J. - 1977. - V. 18. - P. 87-91.

7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.:Наука, 1977. - 741 с.

8. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967. - 257 с.