Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1988 г., вып. 28

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ В ХИМИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ

К.С.Мусабеков

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления неадиабатическим трубчатым реактором, используемым в химической технологии. Математическая модель реактора задается системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} &= a\cdot\frac{\partial^2 v_1(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} - c\cdot v_1\cdot f(v_2),\\
\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} &= b\cdot\frac{\partial^2 v_2(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(t,x)}{\partial x} + u\cdot v_1\cdot f(v_2) +\\
&\quad + g\cdot(v_3(t) - v_2(t,x)),\\
\frac{\partial v_3(t)}{dt} &= d\cdot\left(\int_0^1 v_2(t,x)\,dx - v_3(t)\right) + u(t)\cdot(E - v_3(t))
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

с граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned}
&a\cdot\frac{\partial v_1(t,0)}{\partial x} - v_1(t,0) = -1, \qquad \frac{\partial v_1(t,1)}{\partial x} = 0,\\
&b\cdot\frac{\partial v_2(t,0)}{\partial x} - v_2(t,0) = -1, \qquad \frac{\partial v_2(t,1)}{\partial x} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и начальными условиями:

$$v_1(0,x) = v_{10}(x),\; v_2(0,x) = v_{20}(x),\; v_3(0) = v_{30}, \qquad (3)$$

где $f(v_2) = exp(\Gamma - \Gamma/v_2(t,x))$; а константы $a, b, c, \Gamma, u, g, d, E, v_{30}$ - положительные параметры системы; $u(t)$ - управляющая функция (управление); $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$, $v_3(t)$ - функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

В настоящей работе рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(t,1)\,dt + A\cdot\iint_Q \Phi(v_2)\,dx\,dt, \qquad (4)$$

где $\int\limits_0^T v_1(t,1)\,dt$ - суммарное за время T количество непрореагировавшего вещества на выходе реактора, A - постоянная величина (штрафной коэффициент),

$$\Phi(v_2) = [v_2^* - v_2]_+^2 = \begin{cases} 0, & v_2 \le v_2^*, \\ (v_2^* - v_2)^2, & v_2 > v_2^*, \end{cases}$$

$$Q = \{(t,x) : 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1\}.$$

Управление $u(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 \le u(t) \le u_0 = const. \tag{5}$$

Для функциональных пространств, используемых в работе, введем следующие обозначения:

$C^{0,\alpha}(Q)$ - банахово пространство функций, заданных в области Q и непрерывных по Гельдеру, с показателем α по переменной x и с показателем $\alpha/2$ по переменной t, с нормой

$$|v|_{0,\alpha} = |v|_{0,0} + H_\alpha(v),$$

где

$$0 < \alpha \le 1,\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\ |v|^2 = v_1^2 + v_2^2,\ |v|_{0,0} = \sup_Q |v(x,t)|,$$

$$H_\alpha(v) = \sup_{P \ne R} \frac{|v(P) - v(R)|}{[d(P,R)]^\alpha},\ d(P,R) = |t-\tau|^{1/2} + |x-y|,$$

$$P(t,x),\ R(\tau,y) \in Q;$$

$C^{2,\alpha}(Q)$ - банахово пространство функций, заданных в области Q и обладающих непрерывными по Гельдеру с показателем α производными до второго порядка по x и первого порядка по t. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$|v|_{2,\alpha} = \sum_{i=0}^{2} |\mathcal{D}_x^i v|_{0,\alpha} + |\mathcal{D}_t v|_{0,\alpha};$$

$W[0,T]$ - банахово пространство абсолютно непрерывных функций, заданных на $[0,T]$ с нормой

$$\|v\|_W = \max_{0 \le t \le T} |v(t)| + \int\limits_0^T \left|\frac{dv}{dt}\right| dt;$$

$W_2^{1,2}(Q)$ - банахово пространство функций $v(t,x) \in L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные $\mathcal{D}_t v,\ \mathcal{D}_x v,\ \mathcal{D}_x^2 v \in L_2(Q)$ с нормой

$$\|\vartheta\|^2_{1,2;2} = \iint\limits_Q \left[|\mathcal{D}_x^2 \vartheta|^2 + |\mathcal{D}_t \vartheta|^2 + |\vartheta|^2 \right] dx\,dt\,;$$

$W_2^1[0,T]$ - банахово пространство функций $\vartheta(t) \in L_2[0,T]$, заданных на $[0,T]$, имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные первого порядка. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^1} = \int\limits_0^T \left[|\vartheta|^2 + |\mathcal{D}_t \vartheta|^2 \right] dt\,;$$

$U_\partial = \{ u(t) : 0 \le u(t) \le u_0 = const,\ u(t)$ - измеримая функция, $0 \le t \le T\}$.

В [1] для системы (1)-(3) была доказана теорема существования и единственности решения $\vartheta_1(t,x),\ \vartheta_2(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q),\ \vartheta_3(t) \in W(0,T)$ при произвольной функции $u(t) \in U_\partial$.

В [2] для задачи (1)-(5) получено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л.С.Понтрягина.

В настоящей работе будет рассмотрен вопрос нахождения оптимального управления в задаче (1)-(5). Поиск оптимального управления будет проводиться методом последовательных приближений.

Введем новую функцию $\vartheta_4(t)$ по формуле

$$\vartheta_4(t) = \int\limits_0^t \left[\vartheta_1(\tau,1) + A \cdot \int\limits_0^1 [\vartheta_2^* - \vartheta_2]_+^2\, dx \right] d\tau,\ \vartheta_4(0) = 0,\ \vartheta_4(T) = \mathcal{J}(u). \quad (6)$$

Теперь задача (1)-(4) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} - c \cdot \vartheta_1 f(\vartheta_2), \\
&\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} = b \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + u \cdot \vartheta_1 f(\vartheta_2) + g \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_2), \\
&\frac{d\vartheta_3}{dt} = d \cdot \left(\int\limits_0^1 \vartheta_2(t,x)\, dx - \vartheta_3 \right) + u \cdot (E - \vartheta_3), \\
&\frac{d\vartheta_4}{dt} = \vartheta_1(t,1) + A \cdot \int\limits_0^1 [\vartheta_2^* - \vartheta_2]_+^2\, dx,
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a \cdot \frac{\partial \vartheta_1(t,0)}{\partial x} - \vartheta_1(t,0) = -1, \quad \frac{\partial \vartheta_1(t,1)}{\partial x} = 0, \\
&b \cdot \frac{\partial \vartheta_2(t,0)}{\partial x} - \vartheta_2(t,0) = -1, \quad \frac{\partial \vartheta_2(t,1)}{\partial x} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\vartheta_1(0,x)=\vartheta_{10}(x),\ \vartheta_2(0,x)=\vartheta_{20}(x),\ \vartheta_3(0)=\vartheta_{30},\ \vartheta_4(0)=0. \tag{9}$$

$$J(u)=\vartheta_4(T)=\min_{u\in U_\partial}. \tag{10}$$

§ 2. Приращение функционала

В силу [1] каждому $u(t)\in U_\partial$ соответствует решение $\vartheta_1(t,x)$, $\vartheta_2(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q)$, $\vartheta_3(t)\in W[0,T]$, $\vartheta_4(t)\in C^1[0,T]$ системы (7)-(9). Подставляя найденные функции $\vartheta_1(t,x)$, $\vartheta_2(t,x)$, $\vartheta_3(t)$, $\vartheta_4(t)$ в выражение $J(u)=\vartheta_4(T)$, найдем значение функционала $J(u)$. Таким образом, функционал $J(u)$ определен на множестве $U_\partial\subset L_2[0,T]$. Покажем, что функционал $J(u)$ дифференцируем по Фреше в точке $u(t)\in U_\partial\subset L_2[0,T]$.

Пусть $u(t),\ u(t)+\Delta u(t)\in U_\partial$. Обозначим через $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3,\vartheta_4$, $\vartheta_1+\Delta\vartheta_1,\ \vartheta_2+\Delta\vartheta_2,\ \vartheta_3+\Delta\vartheta_3,\ \vartheta_4+\Delta\vartheta_4$ соответствующие этим управлениям решения системы (7)-(9). Тогда функции $\Delta\vartheta_1,\Delta\vartheta_2,\Delta\vartheta_3,\Delta\vartheta_4$ являются решением системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta\vartheta_1}{\partial t}=a\cdot\frac{\partial^2\Delta\vartheta_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\Delta\vartheta_1}{\partial x}-c\cdot f(\vartheta_2)\cdot\Delta\vartheta_1-c\vartheta_1\frac{\partial f(\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2}\cdot\Delta\vartheta_2+\\
&+c\cdot\Delta\vartheta_1\cdot\left(f(\vartheta_2)-f(\vartheta_2+\Delta\vartheta_2)\right)+c\cdot\vartheta_1\cdot\Delta\vartheta_1\cdot\left(\frac{\partial f(\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2}-f_{\vartheta_2}(\cdot)\right),\\
&\frac{\partial\Delta\vartheta_2}{\partial t}=b\cdot\frac{\partial^2\Delta\vartheta_2}{\partial x^2}-\frac{\partial\Delta\vartheta_2}{\partial x}+k\cdot f(\vartheta_2)\cdot\Delta\vartheta_1+k\cdot\vartheta_1\cdot\frac{\partial f(\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2}\cdot\Delta\vartheta_2+\\
&+g\cdot(\Delta\vartheta_3-\Delta\vartheta_2)+k\cdot\Delta\vartheta_1\cdot\left(f(\vartheta_2+\Delta\vartheta_2)-f(\vartheta_2)\right)+k\vartheta_1\cdot\Delta\vartheta_2\cdot\left(f_{\vartheta_2}(\cdot)-\frac{\partial f(\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2}\right);\\
&\frac{d\Delta\vartheta_3}{dt}=d\cdot\left(\int_0^1\Delta\vartheta_2(t,x)\,dx-\Delta\vartheta_3\right)-(u+\Delta u)\cdot\Delta\vartheta_3+(E-\vartheta_3)\cdot\Delta u,\\
&\frac{d\Delta\vartheta_4}{dt}=\Delta\vartheta_1(t,1)+A\cdot\int_0^1\frac{\partial\Phi(\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2}\cdot\Delta\vartheta_2(t,x)\,dx+\\
&\qquad+A\cdot\int_0^1\left[\Phi_{\vartheta_2}(\cdot)-\frac{\partial\Phi(\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2}\right]\cdot\Delta\vartheta_2(t,x)\,dx
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

с граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} &a\cdot\frac{\partial\Delta v_1(t,0)}{\partial x}-\Delta v_1(t,0)=0, && \frac{\partial\Delta v_1(t,1)}{\partial x}=0,\\ &b\cdot\frac{\partial\Delta v_2(t,0)}{\partial x}-\Delta v_2(t,0)=0, && \frac{\partial\Delta v_2(t,1)}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

и начальными условиями:

$$\Delta v_1(0,x)=0,\ \Delta v_2(0,x)=0,\ \Delta v_3(0)=0,\ \Delta v_4(0)=0, \tag{13}$$

где

$$f_{v_2}(\cdot)=\int_0^1\frac{\partial f(v_2+\tau\cdot\Delta v_2)}{\partial v_2}d\tau,\quad \Phi_{v_2}(\cdot)=\int_0^1\frac{\partial\Phi(v_2+\tau\cdot\Delta v_2)}{\partial v_2}d\tau.$$

При этом функционал $J(u)$ получает приращение

$$\Delta J=J(u+\Delta u)-J(u)=\Delta v_4(T). \tag{14}$$

Введем функции $\psi_1(t,x),\ \psi_2(t,x)\in W_2^{1,2}(Q),\psi_3(t),\ \psi_4(t)\in W_2^1[0,T]$ как решение вспомогательной системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=-a\cdot\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+(c\cdot\psi_1-k\cdot\psi_2)\cdot f(v_2),\\ &\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=-b\cdot\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+(c\cdot\psi_1-k\cdot\psi_2)\cdot v_1\cdot\frac{\partial f(v_2)}{\partial v_2}+g\cdot\psi_2-d\cdot\psi_3-\\ &\qquad\qquad -A\cdot\frac{\partial\Phi(v_2)}{\partial v_2}\cdot\psi_4,\\ &\frac{d\psi_3}{dt}=-g\cdot\int_0^1\psi_2(t,x)\,dx+(d+u)\cdot\psi_3,\\ &\frac{d\psi_4}{dt}=0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

с краевыми условиями:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\psi_1(t,0)}{\partial x}=0, && a\cdot\frac{\partial\psi_1(t,1)}{\partial x}+\psi_1(t,1)=-1,\\ &\frac{\partial\psi_2(t,0)}{\partial x}=0, && b\cdot\frac{\partial\psi_2(t,1)}{\partial x}+\psi_2(t,1)=0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

и конечными условиями:

$$\psi_1(T,x)=0,\ \psi_2(T,x)=0,\ \psi_3(T)=0,\ \psi_4(T)=-1. \tag{17}$$

Очевидно, последнее уравнение системы (15) имеет решение $\psi_1(t)=-1$.

Л е м м а. Если $\vartheta_1(t,x), \vartheta_2(t,x) \in C^{0,\alpha}(Q)$, $u(t) \in U_\partial$, то задача (15)-(17) имеет единственное решение $\psi_1(t,x), \psi_2(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$, $\psi_3(t) \in W_2^1[0,T]$ и справедливы оценки:

$$\|\psi_i\|_{1,2;2} \le C_1 \cdot \left(\left\| A \cdot \frac{\partial \Phi(\vartheta_2)}{\partial \vartheta_2} \right\|_{L_2} + 1\right), \quad (i = 1;2), \tag{18}$$

$$\|\psi_3\|_C \le C_2 \cdot \left(\left\| A \cdot \frac{\partial \Phi(\vartheta_2)}{\partial \vartheta_2} \right\|_{L_2} + 1\right),$$

где константы C_1, C_2 зависят лишь от данных задачи.

Доказательство леммы следует из [2].

Для вычисления производной функционала $J(u)$ нужно, используя систему (11)-(13), в формуле (14) перейти от $\Delta\vartheta_4(T)$ к выражению, зависящему от $\Delta u(t)$. С этой целью умножим уравнения системы (15) соответственно на $\Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2, \Delta\vartheta_3, \Delta\vartheta_4$ и проинтегрируем по Q. В результате получим

$$\Delta J = \Delta\vartheta_4(T) = -\int_0^T \psi_3(t)\cdot(E - \vartheta_3(t))\cdot \Delta u(t)\,dt + O(\Delta\vartheta, \Delta u), \tag{19}$$

где

$$O(\Delta\vartheta, \Delta u) = \int_0^T \psi_3(t)\cdot \Delta\vartheta_3(t)\Delta u(t)\,dt + \iint_Q [f(\vartheta_2 + \Delta\vartheta_2) - f(\vartheta_2)] \times$$

$$\times [C\cdot\psi_1 - K\cdot\psi_2]\cdot\Delta\vartheta_1\,dx\,dt + \iint_Q \left[f_{\vartheta_2}(\cdot) - \frac{\partial f(\vartheta_2)}{\partial \vartheta_2}\right]\cdot[C\cdot\psi_1 -$$

$$- K\cdot\psi_2]\cdot\Delta\vartheta_1\cdot\Delta\vartheta_2\,dx\,dt - \iint_Q \psi_4\cdot A\cdot\left[\Phi_{\vartheta_2}(\cdot) - \frac{\partial\Phi(\vartheta_2)}{\partial\vartheta_2}\right]\Delta\vartheta_2\,dx\,dt,$$

$\Delta\vartheta' = (\Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2, \Delta\vartheta_3, \Delta\vartheta_4)$, здесь штрих означает транспонирование вектор-столбца $\Delta\vartheta$. Применяя к $O(\Delta\vartheta, \Delta u)$ оценки, полученные в [2], легко показать, что

$$|O(\Delta\vartheta, \Delta u)| \le C_3 \cdot \|\Delta u\|^2_{L_1}, \tag{20}$$

где константа C_3 не зависит от приращений $\Delta\vartheta$, Δu.

Из формул (19), (20) следует, что функционал $J(u)$ дифференцируем в точке $u(t) \in U_\partial \subset L_2[0,T]$ и его производная (градиент) в точке u имеет вид $J_u(u) = -\psi_3(t)\cdot(E - \vartheta_3(t))$, при этом $J_u(u) \in L_2[0,T]$.

§ 3. Принцип максимума Понтрягина

Пусть $\{u^0(t), \vartheta_1^0(t,x), \vartheta_2^0(t,x), \vartheta_3^0(t)\}$ - оптимальный процесс в задаче (1)-(5). Рассмотрим произвольные числа β и $t \in (0,T)$, $\bar{u} \in [0, u_0]$.

Обозначим через $\{\mu\}$ множество всех троек $\mu=\{t_0,\beta,\bar{u}\}$. Пусть Δ_ε - интервал между точками $t_0, t_0+\beta\cdot\varepsilon$. Выберем ε_μ настолько малым, что $\Delta_\varepsilon\subset(0,T)$ при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_\mu$. Для $0\le\varepsilon\le\varepsilon_\mu$ поставим в соответствие тройке μ функцию

$$u^\varepsilon(t)=\begin{cases}u^0(t) & \text{при } t\in[0,T]\setminus\Delta_\varepsilon,\\ \bar{u} & \text{при } t\in\Delta_\varepsilon.\end{cases} \tag{21}$$

Далее, повторяя рассуждения [2], получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta J}{\varepsilon}=-\psi_3^0(t_0)\cdot(E-v_3^0(t_0))\cdot\Delta u(t_0)\cdot|\beta|.$$

Обозначим

$$\delta J=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta J}{\varepsilon},\quad H(v_3,u,\psi_3)=(E-v_3(t))\cdot u(t)\cdot\psi_3(t).$$

Выражение $\delta J=-\psi_3^0\cdot(E-v_3^0)\cdot\Delta u\cdot|\beta|$ назовем первой вариацией функционала J. Для того чтобы управление $u^0(t)$ было оптимальным, необходимо, чтобы

$$\delta J=-(E-v_3^0)\cdot\psi_3^0\cdot\Delta u\cdot|\beta|=(H(v_3^0,u^0,\psi_3^0)-H(v_3^0,\bar{u},\psi_3^0))\cdot|\beta|\ge 0.$$

Отсюда следует

Т е о р е м а 1. (Принцип максимума Понтрягина.) Пусть процесс $v_1^0(t,x), v_2^0(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3^0(t)\in W[0,T]$, $u^0(t)\in U_\partial$ (при $(t,x)\in Q$) является оптимальным. Тогда существуют такие ненулевые функции $\psi_1^0(t,x)$, $\psi_2^0(t,x)\in W_2^{1,2}(Q)$, $\psi_3^0(t)\in W_2^1[0,T]$, что:

1) функции $\psi_1^0(t,x)$, $\psi_2^0(t,x)$, $\psi_3^0(t)$ являются решением системы (15)-(17);

2) почти при всех t из $[0,T]$ функция $H(v_3^0(t),u,\psi_3^0(t))$ достигает максимума по u при $u=u^0(t)$:

$$H(v_3^0(t),u^0(t),\psi_3^0(t))=\max_{\bar{u}\in[0,u_0]}H(v_3^0(t),\bar{u},\psi_3^0(t)). \tag{22}$$

Принцип максимума Понтрягина используется в дальнейшем для поиска оптимального управления задачи (1)-(5).

§ 4. Метод последовательных приближений

Идею метода последовательных приближений для задач управления обыкновенными дифференциальными уравнениями предложили И.А.Крылов и Ф.Л.Черноусько [3 - 4]. С целью совершенствования метода в работах [5 - 7] рассматривались его дальнейшие модификации.

Оптимальное управление в задаче (1)-(5) будем искать, следуя идеям работ [5, 6].

Пусть $u^1(t) \in U_\partial$ - заданное начальное приближение. Тогда n-я итерация метода состоит в следующем $(n = 1,2,3,\ldots)$:

1°. Интегрируем систему (1)-(3) при управлении $u = u^n(t)$. В результате находим функции $v_1^n(t,x)$, $v_2^n(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3^n(t) \in W[0,T]$.

2°. Интегрируем систему (15)-(17) от момента $t = T$ до $t = 0$ при $u = u^n(t)$, $v_i = v_i^n$ $(i = 1,2,3)$. В результате получаем функции $\psi_1^n(t,x)$, $\psi_2^n(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$, $\psi_3^n(t) \in W_2^1[0,T]$.

3°. Определяем новое управление $\bar{u}^n(t)$ на $[0,T]$ из условия

$$\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t)) \cdot (\bar{u}^n(t) - u^n(t)) =$$

$$= \max_{\bar{u} \in [0,u_0]} [\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t))(\bar{u} - u^n(t))]. \tag{23}$$

4°. Из условия максимума

$$\psi_3^n(\tau_n)(E - v_3^n(\tau_n))(\bar{u}^n(\tau_n) - u^n(\tau_n)) =$$

$$= \max_{t \in [0,T]} [\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t))(\bar{u}^n(t) - u^n(t))] \tag{24}$$

найдем τ_n. Если $\psi_3^n(\tau_n)(E - v_3^n(\tau_n))(\bar{u}^n(\tau_n) - u^n(\tau_n)) = 0$, то управление $u^n = u^n(t)$ удовлетворяет принципу максимума, т.е. оно подозрительно на оптимальность. Допустим, что $\psi_3^n(\tau_n)(E - v_3^n(\tau_n))(\bar{u}^n(\tau_n) - u^n(\tau_n)) > 0$.

5°. Обозначим $\ell_n = \max\{\tau_n, T - \tau_n\}$, $L_{\tau_n h} = \{\tau_n - h, \tau_n + h\} \cap [0,T]$, $0 \le h \le \ell_n$. Из функций $\bar{u}^n(t)$ и $u^n(t)$ строим функцию

$$u_h^n(t) = \begin{cases} \bar{u}^n(t), & t \in L_{\tau_n h}, \\ u^n(t), & t \in [0,T] \setminus L_{\tau_n h}. \end{cases} \tag{25}$$

Параметр h на каждой итерации находим из условия минимума функции $J^n(h) = J(u_h^n)$ по h. Найденное управление $u_{h_n}^n(t)$ принимаем за $u^{n+1}(t)$ и полагаем

$$u^{n+1}(t) = u_{h_n}^n(t), \quad n = 1,2,\ldots. \tag{26}$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Пусть $\{u^n(t)\}$ - последовательность управлений, построенная по схеме 1°-5°. Тогда

1) последовательность $\{u^n(t)\}$ сходится слабо в $L_2[0,T]$ к измеримой функции $u^0(t) \in U_\partial$;

2) соответствующие $\{u^n(t)\}$ последовательности $\{v_1^n(t,x)\}$,

$\{v_2^n(t,x)\}$ сходятся к $v_1^0(t,x)$, $v_2^0(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q)$ по норме $C^{1,2}(Q)$, последовательность $\{v_3^n(t)\}$ сходится к $v_3^0(t) \in W[0,T]$ по норме $C[0,T]$, где $v_1^0(t,x), v_2^0(t,x), v_3^0(t)$ являются решением системы (1)-(3), соответствующим управлению $u^0(t)$;

3) соответствующие последовательности $\{\psi_1^n(t,x)\}$, $\psi_2^n(t,x)\}$ сходятся к $\psi_1^0(t,x)$, $\psi_2^0(t,x) \in W_2^{1,2}(Q)$ по норме $W_2^{1,2}(Q)$, а последовательность $\{\psi_3^n(t)\}$ сходится к $\psi_3^0(t) \in W_2^1[0,T]$ по норме $C[0,T]$, где $\psi_1^0(t,x), \psi_2^0(t,x), \psi_3^0(t)$ являются решением системы (15)-(17), соответствующим управлению $u^0(t) \in U_\partial$ и функциям $v_1^0(t,x)$, $v_2^0(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3^0(t) \in W[0,T]$;

4) выполняется принцип максимума Понтрягина

$$\psi_3^0(t)(E-v_3^0(t))\,u^0(t) = \max_{u\in[0,u_0]} [\psi_3^0(t)(E-v_3^0(t))\cdot u].$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{J}^n(h) = \mathcal{J}(u_h^n),\quad h\in[0,\ell_n],$$

при каждом фиксированном n. Покажем, что функция $\mathcal{J}^n(h)$ непрерывна на $[0,\ell_n]$. Пусть h_0 – произвольная точка из $[0,\ell_n]$. Придаем h_0 приращение Δh. Тогда управление $u_{h_0}^n$ получит приращение $\Delta u^n = u_{h_0+\Delta h}^n - u_{h_0}^n$. Приращению Δu^n управления соответствует решение Δv_1^n, Δv_2^n, Δv_3^n, Δv_4^n системы (11)-(13), удовлетворяющее в силу [2] неравенствам:

$$\|\Delta v_i^n\|_{1,2;2} \le c_4\cdot\|\Delta u^n\|_{L_1},\quad i=1;2,$$
$$\|\Delta v_3^n\|_W \le c_4\cdot\|\Delta u^n\|_{L_1},\quad \|\Delta v_4^n\|_{C^1} \le c_4\cdot\|\Delta u^n\|_{L_1}. \tag{26}$$

Но $\|\Delta u^n\|_{L_1} \le 4\cdot u_0\Delta h \to 0$ при $\Delta h\to 0$. Следовательно, в силу оценок (26) имеем

$$\Delta\mathcal{J}^n(h) = \mathcal{J}(u_{h_0+\Delta h}^n) - \mathcal{J}(u_{h_0}^n) \to 0,\ \Delta h\to 0.$$

Функция $\mathcal{J}^n(h)$ непрерывна на $[0,\ell_n]$.

Теперь покажем, что последовательность управлений, построенная по схеме 1°-5°, является минимизирующей. Пусть $u^n(t)\in\{u^n(t)\}$, а функция $u_h^n(t)$ построена по формуле (25). Тогда, используя формулу (19) и оценку (20), получаем, что

$$\mathcal{J}(u_h^n)-\mathcal{J}(u^n) = -\int_0^T \psi_3^n(t)\cdot(E-v_3^n(t))\cdot(u_h^n-u^n)\,dt + 0(\Delta v_1^n u_h^n - u^n) =$$

$$= -\int_{L_{\tau_n h}} \psi_3^n(t)(E-v_3^n(t))(\bar u^n(t)-u^n(t))\,dt + 0(\Delta v^n, u_h^n-u^n),$$

где Δv^n в данном случае есть решение системы (11)-(13), соответствующее приращению $u_h^n - u^n$ управления,

$$|o(\Delta v^n, u_h^n - u^n)| \le C_5 \cdot \|u_h^n - u^n\|_{L_1}^2 \le C_6 \cdot h^2.$$

Таким образом,

$$J(u_h^n) - J(u^n) \le -\int\limits_{L_{\tau_n h}} \psi_3^n(t)(E - v_3^n(t))(\bar{u}^n(t) - u^n(t))dt + C_6 \cdot h^2. \quad (27)$$

Так как $\psi_3^n(t) \cdot (E - v_3^n(t)) \cdot (\bar{u}^n(t) - u^n(t)) \ge 0,\ t \in [0,T]$, то найдется малое число $\bar{h} \in [0, \ell_n]$, для которого $J(u_{\bar{h}}^n) - J(u^n) < 0$, или отсюда $J(u_{\bar{h}}^n) < J(u^n)$.

Очевидно, что

$$J(u^{n+1}) = \min_{h \in [0,\ell_n]} J(u_h^n) \le \min_{h \in [0,\bar{h}]} J(u_h^n) < J(u^n). \quad (28)$$

Таким образом, последовательность $\{u^n(t)\}$ является минимизирующей.

Доказательство первой, второй и третьей частей теоремы проводится с использованием работ [1, 2]. Остановимся на доказательстве четвертой части теоремы.

Пользуясь идеями из [6], можно доказать, что

$$\int_0^T \psi_3^n(t)(E - v_3^n(t)) \cdot (\bar{u}^n(t) - u^n(t))dt \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \quad (29)$$

По определению, $\bar{u}^n(t),\ \bar{u}^n(t) \in U_\partial \subset L_2[0,T]$. Значит, последовательность $\{\bar{u}^n(t)\}$ слабокомпактна в $L_2[0,T]$, и $\bar{u}^n(t) \to \bar{u}^0(t)$ слабо в $L_2[0,T]$ при $n \to \infty$. Учитывая также слабую сходимость $u^n(t) \to u^0(t)$ и сильную сходимость $\psi_3^n(t) \to \psi_3^0(t),\ v_3^n(t) \to v_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$, имеем

$$\int_0^T \psi_3^n(t)(E - v_3^n(t))(\bar{u}^n(t) - u^n(t))dt \to$$

$$\to \int_0^T \psi_3^0(t)(E - v_3^0(t))(\bar{u}^0(t) - u^0(t))dt ,$$

причем в силу (29).

$$\int_0^T \psi_3^0(t) \cdot (E - v_3^0(t)) \cdot (\bar{u}^0(t) - u^0(t))dt = 0. \quad (30)$$

Поскольку

$$\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t))(\bar{u}^n(t) - u^n(t)) \ge 0,\ t \in [0,T],\ n = 1, 2, \ldots,$$

то из (29) и (30) следует, что

$$\psi_3^0(t)(E-v_3^0(t))\cdot(\bar{u}^0(t)-u^0(t))=0 \quad \text{для п.в. } t\in[0,T]. \tag{31}$$

Очевидно, из сходимости $v_3^n(t)\to v_3^0(t)$, $\psi_3^n(t)\to\psi_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$ следует сходимость

$$(E-v_3^n(t))\cdot\psi_3^n(t)\to(E-v_3^0(t))\,\psi_3^0(t)$$

по норме $C[0,T]$ при $n\to\infty$.

Обозначим $e_i^+=\{t\in[0,T]:\psi_3^i(t)(E-v_3^i(t))>0\}$, $e_i^-=\{t\in[0,T]:\psi_3^i(t)(E-v_3^i(t))<0\}$, $e_i^0=\{t\in[0,T]:\psi_3^i(t)(E-v_3^i(t))=0\}$, $i=0,1,2,\dots,n$. Очевидно, при каждом фиксированном i справедливо $e_i^+\cup e_i^-\cup e_i^0=[0,T]$. В силу непрерывности функции $\psi_3^i(t)(E-v_3^i(t))$ на $[0,T]$, при всех $i=0,1,2,\dots,n$ множества e_i^+, e_i^- - открытые, а множества e_i^0 - замкнутые. Следовательно, множества e_i^+, e_i^-, e_i^0, $i=0,1,2,\dots,n$, являются измеримыми множествами с мерами $mes\,e_i^+$, $mes\,e_i^-$, $mes\,e_i^0$, причем при каждом i имеем $mes\,e_i^++mes\,e_i^-+mes\,e_i^0=T$. Теперь установим сходимость последовательности $\bar{u}^n(t)\to\bar{u}^0(t)$ по норме $L_2[0,T]$ при $n\to\infty$, где

$$\bar{u}^n(t)=\begin{cases}u_0, & \psi_3^n(t)(E-v_3^n(t))>0,\\ 0, & \psi_3^n(t)(E-v_3^n(t))\le 0.\end{cases}$$

Рассмотрим

$$\|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)\|_{L_2}^2=\int_0^T|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt=\int_{e_n^+\cap e_0^+}|\bar{u}^n-\bar{u}^0|^2dt+$$

$$+\int_{e_n^+\cap e_0^-}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt+\int_{e_n^+\cap e_0^0}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt+\int_{e_n^-\cap e_0^+}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt+$$

$$+\int_{e_n^-\cap e_0^-}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt+\int_{e_n^-\cap e_0^0}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt+\int_{e_n^0\cap e_0^+}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt+$$

$$+\int_{e_n^0\cap e_0^-}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt+\int_{e_n^0\cap e_0^0}|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)|^2dt.$$

В силу определения функций $\bar{u}^n(t)$ и $\bar{u}^0(t)$ в правой части последнего равенства первый, пятый, шестой, восьмой и девятый интегралы обращаются в нуль, и в результате получаем

$$\|\bar{u}^n(t)-\bar{u}^0(t)\|_{L_2}^2=u_0^2\cdot\{mes(e_n^+\cap e_0^-)+mes(e_n^+\cap e_0^0)+$$

$$+mes(e_n^-\cap e_0^+)+mes(e_n^0\cap e_0^+)\}.$$

Поскольку $\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t)) \to \psi_3^0(t)(E - v_3^0(t))$ при $n \to \infty$ по норме $C[0,T]$, то $mes\, e_n^+ \to mes\, e_0^+$, $mes\, e_n^- \to mes\, e_0^-$ при $n \to \infty$. Следовательно, $mes(e_n^+ \cap e_0^-) \to 0$, $mes(e_n^+ \cap e_0^0) \to 0$, $mes(e_n^- \cap e_0^+) \to 0$, $mes(e_n^0 \cap e_0^+) \to 0$, $n \to \infty$, и $\|\bar{u}^n(t) - \bar{u}^0(t)\|_{L_2}^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Очевидно, что формула (23) эквивалентна формуле

$$\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t))\bar{u}^n(t) = \max_{\bar{u} \in [0,u_0]} [\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t)) \cdot \bar{u}], \quad t \in [0,T].$$

Теперь вычислим предел от обеих частей последней формулы при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} [\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t))\bar{u}^n(t)] = \lim_{n \to \infty} \max_{u \in [0,u_0]} [\psi_3^n(t)(E - v_3^n(t)) \cdot u],$$

отсюда

$$\psi_3^0(t)(E - v_3^0(t)) \cdot \bar{u}^0(t) = \max_{u \in [0,u_0]} [\psi_3^0(t)(E - v_3^0(t)) \cdot u]. \tag{32}$$

Из формул (31) и (32) получим искомое выражение

$$\psi_3^0(t) \cdot (E - v_3^0(t)) \cdot u^0(t) = \max_{u \in [0,u_0]} [\psi_3^0(t) \cdot (E - v_3^0(t)) \cdot u].$$

Таким образом, мы показали, что предельное управление $u^0(t) \in U_\partial$ удовлетворяет принципу максимума. Теорема 2 доказана.

Поступила в ред.-изд. отдел
25 апреля 1988 г.

Литература

1. Мусабеков К.С. Теоремы существования решения в задаче оптимального управления химическим реактором // Управляемые процессы и оптимизация (Управляемые системы). - Новосибирск, 1982. - Вып. 22. - С. 30-50.

2. Его же. Необходимые условия оптимальности в задаче управления химическим реактором // Задачи поиска оптимальных решений (Управляемые системы). - Новосибирск, 1984. - Вып. 24. - С. 53-78.

3. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1962. - Т. 2, № 6. - С. 1132-1139.

4. Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1972. - Т. 12, № 1. - С. 14-34.

5. Васильев О.В., Тятюшкин А.И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычисл.

математики и мат. физики. - 1981. - Т. 21, № 6. - С. 1376-1384.

6. Любушин А.А. Модификации и исследование сходимости метода последовательных приближений для задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1979. - Т. 19, № 6. - С. 1414-1421.

7. Любушин А.А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. - 1982. - Т. 22, № 1. - С. 30-35.