Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1988 г., вып. 28

УДК 621.391

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ВЫПУКЛЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Ю.И.Бердышев, А.Г.Ченцов

Предлагается один из подходов к решению задачи о сближении траектории управляемого объекта с заданной системой выпуклых множеств при наличии ограничений на траекторию движения. Этот способ основан на использовании двойственных конструкций математического программирования и принципа максимума Л.С.Понтрягина [1-4]. Движение объекта описывается линейной системой [2] и рассматривается на конечном промежутке времени. В заданные моменты времени измеряются рассогласования управляемого движения. Одна часть этих рассогласований формирует ограничения на выбор управления, а другая часть минимизируется и трактуется как минимизация максимального отклонения. Для исходной задачи оптимального управления определяется двойственная ей задача математического программирования, доставляющая оптимум исходной задаче и краевые условия принципа максимума Л.С.Понтрягина.

§ 1. Постановка задачи оптимального управления

<u>Управляемая система</u>. Предварительно введем обозначения, необходимые для описания управляемой системы. При этом будем использовать кванторы $(\forall, \exists)$, символы $\&$ (и), def (по определению), $\triangleq$ (равно по определению), $\emptyset$ - пустое множество. Пусть $\mathcal{N} \triangleq \{1, 2, \ldots\}$ - множество всех натуральных чисел; $\forall\, k \in \mathcal{N}$

$$\overline{1,k} \triangleq \{j : j \in \mathcal{N},\ j \leq k\} -$$

начальный отрезок натурального ряда с правым концом k ; $\mathbb{R}$ - числовая прямая; $\forall k \in \mathcal{N}$ $\mathbb{R}^k$ - k-мерное арифметическое пространство; $n \in \mathcal{N}$ - заданное число, определяющее размерность фазового пространства; $X \triangleq R^n$; $\forall k \in \mathcal{N}$ $def\ conv(\mathbb{R}^k)$ - семейство всех непустых выпуклых компактов R^k; $\forall k \in \mathcal{N}$ $\mathcal{M}_{k,n}$ - множество всех $k \times n$ матриц. Предполагаются заданными: $t_0 \in R$, $\vartheta_0 \in R$ $(t_0 < \vartheta_0)$; $T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$; $A : R \to \mathcal{M}_{n,n}$ - непрерывное матричное отображение; $r \in \mathcal{N}$ (размерность пространства управлений); $P \in conv(R^r)$; $B : R \to \mathcal{M}_{r,n}$ - непрерывное матричное отображение; $x_0 \in X$.

Пусть движение системы на заданном отрезке времени T описывается векторным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u \in P, \tag{1.1}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Для определения решения уравнения (1.1) введем следующие обозначения: R_+^2 - множество всех $(\vartheta, t) \in R \times R$ таких, что $t \leq \vartheta$; $\Phi: R^2 \to \mathcal{M}_{n,n}$ - фундаментальная матрица решений [2, с. 37] однородной системы $\dot{x} = A(t)x$; $\mathcal{U}$ - множество всех измеримых по Борелю функций $U: T \to P$. Полагаем

$$\varphi_U(t) \triangleq \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\xi)B(\xi)U(\xi)\,d\xi. \tag{1.2}$$

Тогда (1.2) есть U-решение (1.1), $\varphi_U \triangleq (\varphi_U(t), t_0 \leq t \leq \vartheta_0)$ - движение системы (1.1) из позиции (t_0, x_0), порожденное управлением $U \in \mathcal{U}$.

<u>Система ограничений.</u> Пусть: $\|\cdot\|$ - евклидова норма в X; если E - непустое подмножество X, $x \in X$, то

$$\rho(x,E) \triangleq \min_{y \in E} \|x-y\| -$$

евклидово расстояние от точки x до множества E; $\forall K \in N$, $x \in R^K$, $j \in \overline{1,K}$ def x_j - j-я координата x. Предполагаются заданными: $m \in N$; $\tau_1 \in T, \dots, \tau_{m+1} \in T$ - система моментов времени, удовлетворяющая соотношениям

$$\tau_1 = \vartheta_0, \; \tau_{m+1} = t_0, \; \tau_{j+1} \leq \tau_j, \; j \in \overline{1,m};$$

I, S - два непустых подмножества $\overline{1,m}$, удовлетворяющие условиям

$$(I \cup S = \overline{1,m}) \;\&\; (I \cap S = \emptyset);$$

$c: S \to [0,\infty[$ - система "допусков"; $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ - система непустых подмножеств $\overline{1,n}$, которая при каждом $i \in \overline{1,m}$ определяет некоторое множество "существенных" координат, именно:

$$\Omega_i \triangleq \{x : x \in X, (\forall j \in \overline{1,n} \setminus \Gamma_i : x_j = 0)\} -$$

подпространство X "существенных в момент τ_i координат. Оператор проектирования X на Ω_i обозначим через π_i, т.е.

$$\forall i \in \overline{1,m}, \; x \in X \;\; def \;\; \pi_i(x) \in \Omega_i :$$

$$(\forall j \in \Gamma_i : (\pi_i(x))_j \triangleq x_j) \;\&\; (\forall j \in \overline{1,n} \setminus \Gamma_i : (\pi_i(x))_j \triangleq 0).$$

Введем в рассмотрение систему множеств $M_1, \dots, M_m$ таких, что

$$(M_i \in conv(X)) \;\&\; (M_i \subset \Omega_i);$$

кроме того, определим функцию $\sigma_i : X \to \mathbb{R}$ соотношением

$$\sigma_i(x) \triangleq \rho(\pi_i(x), M_i), \quad i \in \overline{1,m}.$$

Если теперь $U \in \mathcal{U}$ - некоторое управление-программа, то

$$\sigma_1(\varphi_U(\tau_1)), \ldots, \sigma_m(\varphi_U(\tau_m))$$

есть система уклонений траектории φ_U от множеств $M_i (i \in \overline{1,m})$. Далее будем считать допустимыми лишь те управления $U \in \mathcal{U}$, которые удовлетворяют системе ограничений .

$$\sigma_j(\varphi_U(\tau_j)) - c(j) \leq 0, \quad j \in S. \tag{1.3}$$

Система уклонений $\{\sigma_j(\varphi_U(\tau_j)), j \in I\}$ подлежит минимизации. Ниже предполагается выполненным

Условие регулярности (условие Слейтера). Существует допустимое программное управление $U^* \in \mathcal{U}$ такое, что

$$\sigma_j(\varphi_{U^*}(\tau_j)) - c(j) < 0, \quad j \in S. \tag{1.4}$$

Задача оптимального управления

$$\max_{i \in I} \sigma_i(\varphi_U(\tau_i)) \longrightarrow \min_U \tag{1.5}$$

при ограничениях (1.3).

Для более удобной записи введем обозначения:

$$\begin{aligned} &\gamma_k(U) \triangleq \sigma_k(\varphi_U(\tau_k)), \quad k \in I, \\ &\gamma_s(U) \triangleq \sigma_s(\varphi_U(\tau_k)) - c(j), \quad s \in S, \\ &\gamma_0(U) \triangleq \max_{i \in I} \gamma_i(U). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Тогда задача принимает вид:

$$\gamma_0(U) \to \min, \quad U \in \mathcal{U}, \quad \gamma_j(U) \leq 0, \quad j \in S. \tag{1.7}$$

Заметим, что задача (1.7) имеет решение. Через γ^0 обозначим ее оптимум

$$\gamma^0 \triangleq \min(\{\gamma_0(U) : U \in \mathcal{U}, (\forall j \in S : \gamma_j(U) \leq 0)\}),$$

а через M_0 - множество всех ее решений

$$M_0 \triangleq \{U^0 : U^0 \in \mathcal{U}, (\gamma_0(U^0) = \gamma^0) \,\&\, (\forall j \in S : \gamma_j(U^0) \leq 0)\}.$$

§ 2. Задача математического программирования

Введем обозначения: A - множество всех функций $\alpha : I \to [0,1]$, для которых

$$\sum_{i \in I} \alpha(i) = 1;$$

$\mathcal{L}$ - множество всех $\ell \in \mathbb{R}^m$ с неотрицательными координатами $\ell_i (i \in \overline{1,n})$; $\mathcal{J}$ - множество всех неотрицательных вещественнозначных функций на S (элементы $\mathcal{J}$ фактически являются векторами, имеющими размерность, совпадающую с количеством элементов S); $\forall U \in \mathcal{U},\ \ell \in \mathcal{J}$:

$$\mathcal{L}_*(U, \ell) \triangleq \gamma_0(U) + \sum_{j \in S} \ell(j)\, \gamma_j(U). \tag{2.1}$$

С помощью лагранжиана (2.1) определим нужную форму теоремы Куна-Таккера. Пусть $V \in M_0$ и

$$(KT)[V] \triangleq \{\lambda : \lambda \in \mathcal{J}, \forall U \in \mathcal{U} : (\mathcal{L}_*(V, \lambda) \leq$$

$$\leq \mathcal{L}_*(U, \lambda)) \,\&\, (\forall j \in S : \lambda(j)\, \gamma_j(V) = 0)\}. \tag{2.2}$$

В соответствии с установившейся терминологией элементы (2.2)$'$ называем векторами Куна-Таккера. По теореме Куна-Таккера [3, с.52], множество (2.2) непусто. При этом $\forall V \in M_0$, $\lambda \in (KT)[V]$, $\ell \in \mathcal{J}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_*(V, \ell) \leq \mathcal{L}_*(V, \lambda). \tag{2.3}$$

Таким образом, пара (V, λ) является седловой точкой функции $\mathcal{L}_*$, определенной на $\mathcal{U} \times \mathcal{J}$, так что

$$\mathcal{L}_*(V, \ell) \leq \mathcal{L}_*(V, \lambda) \leq \mathcal{L}_*(U, \lambda). \tag{2.4}$$

Известно, что всякая седловая точка $\mathcal{L}_*$ есть пара минимаксной и максиминной стратегий в игре

$$\underset{U}{\downarrow}\ \mathcal{L}_*(U, \ell)\ \underset{\ell}{\uparrow}.$$

Поэтому $\forall U^0 \in M_0$, $\lambda \in (KT)\ [U^0]$ имеем

$$\mathcal{L}_*(U^0, \lambda) = \max_{\ell \in \mathcal{J}} \mathcal{L}_*(U^0, \ell) = \gamma^0 = \min_{U \in \mathcal{U}} \sup_{\ell \in \mathcal{J}} \mathcal{L}_*(U, \ell) =$$

$$= \max_{\ell \in \mathcal{J}} \inf_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_*(U, \ell) = \min_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_*(U, \lambda). \tag{2.5}$$

Таким образом, λ есть решение задачи:

$$\min_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_*(U, \ell) \to \max, \quad \ell \in \mathcal{J}. \tag{2.6}$$

Заметим, что

$$\gamma_0(U) = \max_{\alpha \in \mathbb{A}} \sum_{i \in I} \alpha(i)\, \gamma_i(U). \tag{2.7}$$

Если $\alpha \in \mathcal{L}$ и L - непустое подмножество $\overline{1,m}$, то через $(\alpha | L)$ обозначим след α на L ($(\alpha|L) : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ - функция, значения которой на L совпадают со значениями α). Пусть $\ell \in \mathcal{N}$ и

$$\widetilde{\mathbb{A}}_\ell \triangleq \{\alpha : \alpha \in \mathcal{L}, ((\alpha|S) = \ell)\ \&\ ((\alpha|I) \in \mathbb{A})\}.$$

Подставляя (2.7) в (2.1), получаем

$$\mathcal{L}_*(U,\ell) = \max_{\alpha \in \widetilde{\mathbb{A}}_\ell} \sum_{i=1}^{m} \alpha(i)\, \gamma_i(U). \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8) при каждом $\ell \in \mathcal{N}$ определяет на пространстве $\mathcal{U}$ задачу взвешенной минимизации

$$\mathcal{L}_*(U,\ell) \to \min, \quad U \in \mathcal{U}. \tag{2.9}$$

Для ее решения в форме, аналогичной [4, с.131], будем использовать методы [5].

§ 3. Задача взвешенной оптимизации

Для решения задачи (2.8), (2.9) введем ряд вспомогательных понятий. Определим функции $\omega_\ell : \mathcal{U} \times \widetilde{\mathbb{A}}_\ell \to \mathbb{R} (\ell \in \mathcal{N})$, $\omega^0 : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ соотношениями:

$$\omega_\ell(U,\alpha) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \alpha(i)\, \gamma_i(U), \tag{3.1}$$

$$\omega^0(\ell) \triangleq \min_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{L}_*(U,\ell). \tag{3.2}$$

Тогда из (3.1), (3.2), (2.8) с учетом известных теорем о минимаксе [6, с.34] получим

$$\omega^0(\ell) = \max_{\alpha \in \widetilde{\mathbb{A}}_\ell} \min_{U \in \mathcal{U}} \omega_\ell(U,\alpha), \ \ell \in \mathcal{N}. \tag{3.3}$$

Пусть далее $\forall x \in X,\ y \in X \ \ def \ \ x'y \in \mathbb{R}$ - скалярное произведение x и y; $\forall E \in conv(X)$, $\ell \in X$, положим

$$\widetilde{\rho}_E(\ell) \triangleq \max_{w \in E} \ell' w.$$

Обозначим через

$$L_i \triangleq \{\ell : \ell \in \Omega_i, \ \|\ell\| \le 1\}$$

единичный шар в подпространстве Ω_i, а через $\mathbf{\Lambda}$ – декартово произведение шаров $L_1, \ldots, L_m$. При каждом $\ell \in \mathcal{L}$ определим функцию $Q_\ell : \mathcal{U} \times \tilde{\mathbf{A}}_\ell \times \mathbf{\Lambda} \to R$ соотношением

$$Q_\ell(U, \alpha, \Lambda) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \alpha(i) [\Lambda'(i)\, \pi_i(\varphi_U(\tau_i)) - \tilde{\rho}_{M_i}(\Lambda(i))] - \sum_{j \in S} \alpha(j)\, c(j). \tag{3.4}$$

При фиксированных ℓ и α функция (3.4) вогнута по Λ и линейна, а значит, выпукла по U. Поэтому в силу выпуклости компактов P, $\mathbf{\Lambda}$, а также теоремы [6, с. 34] имеем

$$\min_{U \in \mathcal{U}} \max_{\Lambda \in \mathbf{\Lambda}} Q_\ell(U, \alpha, \Lambda) = \max_{\Lambda \in \mathbf{\Lambda}} \min_{U \in \mathcal{U}} Q_\ell(U, \alpha, \Lambda). \tag{3.5}$$

При этом непосредственно из (3.1), (3.4) следует, что

$$\omega_\ell(U, \alpha) = \max_{\Lambda \in \mathbf{\Lambda}} Q_\ell(U, \alpha, \Lambda). \tag{3.6}$$

Теперь из (3.3)-(3.6) имеем

$$\omega^0(\ell) = \max_{\alpha \in \tilde{\mathbf{A}}_\ell} \max_{\Lambda \in \mathbf{\Lambda}} \min_{U \in \mathcal{U}} Q_\ell(U, \alpha, \Lambda). \tag{3.7}$$

Действуя по аналогии с [4], но с учетом особенностей многоточечной оптимизационной задачи [5], получим, что

$$\Psi_\ell(\alpha, \Lambda) \triangleq \min_{U \in \mathcal{U}} Q_\ell(U, \alpha, \Lambda) = [\sum_{i=1}^{m} \alpha(i) [\Lambda'(i)\, \pi_i(\Phi(\tau_i, t_0) x_0) - \tilde{\rho}_{M_i}(\Lambda(i))]] - \sum_{j \in S} \alpha(j)\, c(j) + \sum_{q=1}^{m} \int_{\tau_{q+1}}^{\tau_q} \min_{u \in P} (\sum_{i=1}^{q} \alpha(i) \Lambda'(i)\, \pi_i(\Phi(\tau_i, \xi) B(\xi) u)\, d\xi). \tag{3.8}$$

Теперь из (3.7) имеем

$$\omega^0(\ell) = \max_{(\alpha, \Lambda) \in \tilde{\mathbf{A}}_\ell \times \mathbf{\Lambda}} \Psi_\ell(\alpha, \Lambda). \tag{3.9}$$

Таким образом, задачу взвешенной оптимизации (2.9), (2.8) свели к задаче (3.9). Очевидно, их оптимумы (см. (3.2), (3.9)) совпадают. Множество решений задачи (3.9) при фиксированных элементах $V \in M_0$, $\lambda \in (KT)[V]$ обозначим через

$$W(V,\lambda) \triangleq \{(\alpha_0,\Lambda_0) : (\alpha_0,\Lambda_0) \in \tilde{A}_\ell \times \Lambda,$$
$$\Psi_\lambda(\alpha_0,\Lambda_0) = \max_{(\alpha,\Lambda)\in\tilde{A}_\ell\times\Lambda} \Psi_\lambda(\alpha,\Lambda)\}. \tag{3.10}$$

§ 4. Двойственность и принцип максимума Л.С.Понтрягина

Пусть

$$\mathcal{B} \triangleq \{\beta : \beta \in \mathcal{L},\ ((\beta | S) \in \mathcal{N}) \,\&\, ((\beta | I) \in \Lambda)\};$$

$\tilde{\Psi} : \mathcal{B}\times\Lambda \to R$ – функция, определяемая соотношением

$$\tilde{\Psi}(\beta,\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \beta(i)[\Lambda'(i)\pi_i(\Phi(\tau_i,t_0)x_0)] -$$
$$-\sum_{j\in S}\beta(j)c(j) + \sum_{q=1}^{m}\int_{\tau_{q+1}}^{\tau_q} \min_{u\in P}\Big(\sum_{i=1}^{q}\beta(i)\times$$
$$\times\Lambda'(i)\pi_i(\Phi(\tau_i,\xi)B(\xi)u)\,d\xi. \tag{4.1}$$

Т е о р е м а 4.1. Оптимум задачи оптимального управления (1.7) совпадает с оптимумом задачи математического программирования, т.е.

$$\gamma^0 = \max_{(\beta,\Lambda)\in\mathcal{B}\times\Lambda} \tilde{\Psi}(\beta,\Lambda). \tag{4.2}$$

Справедливость теоремы следует из соотношения (3.9) и равенства

$$\gamma^0 = \max_{\ell\in\mathcal{N}} \omega^0(\ell), \tag{4.3}$$

вытекающего в свою очередь из (2.5), (3.2).

Из (2.6), (3.2), (3.9) следует, что вектор Куна-Таккера находится как максимизирующий (по $\mathcal{N}$) вектор ℓ функции $\omega^0(\ell)$, определяемой формулами (3.8), (3.9).

Рассмотрим теперь принцип максимума Л.С.Понтрягина, в котором краевые условия определяются посредством оптимальных значений двойственной переменной. Здесь будем использовать тот вытекающий из (2.5) факт, что при фиксированном векторе $\lambda\in(KT)[V]$ управление $V\in M_0$ есть решение задачи

$$\mathcal{L}_*(U,\lambda) \to \min,\quad U\in\mathcal{U}.$$

Исходя из этого факта и используя теорему о минимаксе [6, с.34], а также соотношения (3.5), (3.6), можно показать, что для всех $U^0\in M_0$, $\lambda\in$ $\in (KT)\ [U^0]$ справедливо равенство

$$\max_{(\alpha,\Lambda)\in\tilde{A}_\lambda\times\Lambda} Q_\lambda(U^0,\alpha,\Lambda) = \min_{U\in\mathcal{U}}\ \max_{(\alpha,\Lambda)\in\tilde{A}_\lambda\times\Lambda} Q_\lambda(U,\alpha,\Lambda),$$

т.е. U^0 - минимаксная стратегия первого игрока в игре

$$\downarrow_{U} Q_\lambda(U, \alpha, \Lambda) \uparrow_{(\alpha,\Lambda)} . \qquad (4.4)$$

Соотношение (3.10) в свою очередь определяет множество максиминных стратегий (4.4). Но тогда при всех $U^0 \in M_0$, $\lambda \in (KT)[U^0]$, $(\alpha_0, \Lambda_0) \in W(U^0, \lambda)$ точка $(U^0, (\alpha_0, \Lambda_0))$ является седловой в игре (4.4). Следствием этого факта является соотношение

$$Q_\lambda(U^0, \alpha_0, \Lambda_0) = \min_{U \in \mathcal{U}} Q_\lambda(U, \alpha_0, \Lambda_0),$$

из которого вытекает справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 4.2. Для оптимального управления $U^0 \in M_0$ при фиксированных векторах $\lambda \in (KT)[U^0]$, $(\alpha_0, \Lambda_0) \in W(U^0, \lambda)$, справедливы равенства

$$\int_{\tau_{q+1}}^{\tau_q} \sum_{i=1}^{q} \alpha_0(i) \Lambda_0'(i) \pi_i(\Phi(\tau_i, \xi) B(\xi) U^0(\xi)) d\xi =$$

$$= \int_{\tau_{q+1}}^{\tau_q} \min_{u \in P} \Big(\sum_{i=1}^{q} \alpha_0(i) \Lambda_0'(i) \pi_i(\Phi(\tau_i, \xi) B(\xi) u)\Big) d\xi, \quad q \in \overline{1,m}. \qquad (4.5)$$

Соотношение (4.5) определяет принцип максимума Л.С.Понтрягина. Рассмотрим последовательность операций при использовании (4.5) для нахождения оптимального управления в исходной задаче (1.7). Во-первых, определяем вектор Куна-Таккера $\lambda \in \Lambda$ из решения задачи $\omega^0(\ell) \longrightarrow \max$. Во-вторых, вычисляем $\alpha_0 \in \mathbb{A}_\lambda$ и $\Lambda \in \Lambda$, которые доставляют максимум функции $\Psi_\lambda(\alpha, \Lambda)$ на множестве $\tilde{\mathbb{A}}_\lambda \times \mathbb{\Lambda}$. Теперь уже оптимальное управление U^0 в задаче (1.7) можно найти из соотношения (4.5).

Поступила в ред.-изд.отдел
7 мая 1986 г.

Л и т е р а т у р а

1. Математическая теория оптимальных процессов./ Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мишенко Е.Ф. - М.: Физматгиз, 1961. - 384 с.

2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. - М.: Наука, 1968.- 476 с.

3. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление.- М.: Наука, 1979. - 432 с.

4. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. - М.: Наука,

1970. - 420 с.

5. Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г. Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления// Кибернетика, 1986, № 1, с. 59-64.

6. Фань-Цзы. Теоремы о минимаксе.// Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963. - 503 с.