Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1988 г., вып. 28

УДК 519.854

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ВОГНУТОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОЛИМАТРОИДОВ

А.А.Агеев

Рассматривается семейство нелинейных целочисленных оптимизационных задач вида

$$f(z) = \sum_{i=1}^{m} f_i(z_i) \to \max_{z \in \Omega}, \tag{1}$$

где $\Omega = P_1 \cap \ldots \cap P_\tau$, $P_1, \ldots, P_\tau \subset \mathbb{Z}_+^n$ – полиматроиды, $f_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$, – вогнутые функции целочисленного аргумента. При $\tau \geq 3$ задача (1) NP -трудна [1]. При $\tau = 1,2$ известны алгоритмы решения задачи (1) с трудоемкостью, ограниченной сверху полиномом от трех параметров: n, минимального из рангов полиматроидов и суммарной трудоемкости вычисления функции f и проверки принадлежности точки полиматроиду [2, 3].

В настоящей работе предлагается общий подход к построению алгоритмов подобного рода. В основе этого подхода лежит идея преобразования задачи (1) в хорошо изученную задачу максимизации линейной функции на пересечении матроидов.

1. В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}_+)$ – множество всех целых (неотрицательных) чисел,

если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, то $|x| = \sum_{i=1}^{n} x_i$;

если $x, y \in \mathbb{Z}^n$, то $x \leq y$ эквивалентно $y - x \in \mathbb{Z}_+^n$;

если $a, b \in \mathbb{Z}^n$, то $[a, b] = \{x \in \mathbb{Z}^n : a \leq x \leq b\}$.

Непустое конечное множество $P \subset \mathbb{Z}_+^n$ называют (целочисленным) полиматроидом, если:

а) $x \in \mathbb{Z}_+^n$, $y \in P$, $x \leq y \Rightarrow x \in P$;

б) $d \in \mathbb{Z}_+^n$, x, y – максимальные (относительно $\leq$) векторы из $P \cap [0, d] \Rightarrow |x| = |y|$.

Заметим, что если $P \subset \mathbb{Z}_+^n$ – полиматроид, то для любого $d \in \mathbb{Z}_+^n$ множество $P \cap [0, d]$ также полиматроид.

Матроид M определим как пару $(E, \mathcal{J})$, где E – непустое конечное множество; $\mathcal{J}$ - непустая совокупность подмножеств E (называемых независимыми), удовлетворяющих условиям:

а)' $B \in \mathcal{J},\ A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{J}$;

б)' $\mathcal{D} \subset E$ и A, B - максимальные по включению независимые подмножества $\mathcal{D} \Rightarrow |A| = |B|$.

Ясно, что полиматроид $P \subset \mathbb{Z}_+^n$ - матроид, если для любой точки $z \in P$ имеем $z \leq (1, 1, \ldots, 1)$.

2. Пусть $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ - вектор с ненулевыми компонентами и $P \subset \mathbb{Z}_+^n$ - полиматроид. Положим:

$$m_0 = 0,\ m_i = \sum_{K=1}^{i} d_K,\ i = \overline{1,n};$$

$$E_i = \{m_{i-1} + 1, \ldots, m_i\},\ i = \overline{1,n};$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i;$$

$$\mathfrak{A}(z) = \{A \subset E : |A \cap E_i| = z_i,\ i = \overline{1,n}\},\ z \in [0,d];$$

$$\mathcal{J} = \bigcup_{z \in P \cap [0,d]} \mathfrak{A}(z).$$

Через $M(P, d)$ обозначим пару $(E, \mathcal{J})$. Из приведенных выше определений матроида и полиматроида непосредственно вытекает

Лемма 1. $M(P, d)$ - матроид.

Преобразуем задачу (1) в задачу на пересечении матроидов указанного в лемме 1 вида. Пусть задан вектор $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ с ненулевыми компонентами такой, что $\Omega \subset [0, d]$. Задаче (1) поставим в соответствие следующую задачу максимизации линейной функции на пересечении матроидов $M(P_i, d) = (E, \mathcal{J}_i),\ i = \overline{1,\tau}$:

$$\sum_{t \in A} \rho(t) \to \max_{A \in \mathcal{J}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{J}_\tau}, \tag{2}$$

где

$$\rho(t) = f_i(t - m_{i-1}) - f_i(t - m_{i-1} - 1), \tag{3}$$

а номер i определяется из условия $t \in E_i$.

Отметим сразу, что из вогнутости функций f_i вытекает

$$\rho(t') \geqslant \rho(t''), \tag{4}$$

если $t', t'' \in E_i$ и $t' \leq t''$. Положим:

$$C = \sum_{i=1}^{n} f_i(0);$$

$$A_i(0) = \varnothing, \quad i = \overline{1,n};$$

$$A_i(z_i) = \{m_{i-1}+1, \ldots, m_{i-1}+z_i\}, \; z_i \in \{1, \ldots, d_i\}, \; i = \overline{1,n};$$

$$A(z) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i(z_i), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in [0,d].$$

Очевидно, что $A(z) \in \mathfrak{A}(z)$.

Пусть $z \in \Omega \cap [0,d]$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Из (3) получаем

$$f_i(z_i) = \sum_{t \in A(z_i)} \rho(t) + f_i(0). \tag{5}$$

Далее в силу (4) имеем

$$\sum_{t \in A \cap E_i} \rho(t) + f_i(0) \leq \sum_{t \in A(z)} \rho(t) + f_i(0) \tag{6}$$

для любого $A \in \mathfrak{A}(z)$. Просуммировав (5) и (6) по i, объединим полученные результаты в формулировке следующего утверждения.

Лемма 2. Для любых $z \in \Omega \cap [0,d]$ и $A \in \mathfrak{A}(z)$ справедливы соотношения

$$f(z) = \sum_{t \in A(z)} \rho(t) + C \geq \sum_{t \in A} \rho(t) + C. \tag{7}$$

Связь между оптимальными решениями задач (1) и (2) устанавливает

Теорема 1. Пусть $A^* \subset E$ - оптимальное решение задачи (2). Положим $z_i^* = |A^* \cap E_i|$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $z^* = (z_1^*, \ldots, z_n^*)$ - оптимальное решение задачи (1).

Доказательство. Пусть $z' = (z_1', \ldots, z_n')$ - допустимое решение задачи (1) такое, что $f(z') \geq f(z^*)$. Ясно, что $A^* \in \mathfrak{A}(z^*)$. Отсюда в силу оптимальности A^* и на основании леммы 2 имеем

$$\sum_{t \in A^*} \rho(t) + C \geq \sum_{t \in A(z')} \rho(t) + C = f(z') \geq$$
$$\geq f(z^*) = \sum_{t \in A(z^*)} \rho(t) + C \geq \sum_{t \in A^*} \rho(t) + C,$$

т.е. $f(z') = f(z^*)$ и, значит, z^* - оптимальное решение.

3. Пусть τ – минимальный из рангов полиматроидов $P_1, \ldots, P_\tau$, т.е.

$$\tau = \min_{k=\overline{1,\tau}} \max_{z \in P_k} |z| .$$

Число τ можно определить серией из τ алгоритмов градиентного типа [1]. Если τ задано, то в описанном в п.2 преобразовании задачи (1) в задачу (2) можно положить

$$d_i = \tau, \quad i = \overline{1,n} .$$

Задача максимизации линейной функции на пересечении не более двух матроидов (в задаче (2) $\tau = 1,2$) полиномиально разрешима, и для нее известны различные алгоритмы полиномиальной трудоемкости (предполагается, естественно, что заданы полиномиальные процедуры проверки независимости множества в каждом матроиде) [5-10]. Любой из этих алгоритмов, согласно теореме 1, очевидным образом может быть преобразован в соответствующий алгоритм решения исходной задачи (1). Поскольку $|E| = n\tau$, то для трудоемкости полученных алгоритмов имеем оценку $O(n^\alpha \tau^\beta T^\gamma(n,\tau))$, где α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, а $T(n,\tau)$ – суммарная трудоемкость вычисления функции f и проверки принадлежности точки полиматроиду.

Поступила в ред.-изд. отдел
16 декабря 1987 г.

Литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416 с.

2. Глебов Н.И. Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системе. - Новосибирск, 1973. - Вып. II. - С. 38-41.

3. Глебов Н.И. О минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении полиматроидов // Управляемые системы. - Новосибирск, 1983, - Вып. 23. - С. 33-43.

4. Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra // Combinatorial Structures and their applications. - New York. Gordon and Breach, 1970. - P. 69-87.

5. Edmonds J. Matroids and the greedy algorithm // Math. Progr. - 1971. - Vol. 1. - P. 127-136.

6. Lawler E.L. Matroid intersection algorithms // Math. Progr. - 1975. - Vol. 9. - P. 31-56.

7. Edmonds J. Matroid intersection // Annals of Discrete Math. - 1979. - Vol. 4. - P. 39-49.

8. Frank A. A weighted matroid intersection algorithm // J. Algorithms. - 1981. - Vol. 2. - P. 328-336.

9. Brezovec C., Cornuejols G., Glover F. Two algorithms for weighted matroid intersection // Math. Progr. - 1981. - Vol. 36. - P. 39-53.

10. Cunningham W.H. Improved bounds for matroid partition and intersection algorithms // SIAM J. Comput. - 1986. - Vol. 15. - P. 948-957.