Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1987 г., вып. 27

УДК 519.176

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.И.Сердюков

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество вещественных квадратных матриц с неотрицательными элементами. Под задачей коммивояжера на максимум (или ЗК) для матрицы $d=(d_{ij})_{n\times n}$ понимается задача отыскания минимизирующей функционал

$$d(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} d_{\sigma(i)\sigma(i+1)}$$

перестановки σ на множестве элементов $\{1,2,3,\dots,n\}$ (здесь суммирование $i+1$ берется по модулю n).

Обозначим через σ_*^d оптимальную перестановку для матрицы $d\in\mathcal{D}$. Пусть A - некоторый алгоритм, выделяющий перестановку σ_A^d для матрицы $d\in\mathcal{D}$. Будем говорить, что алгоритм A обладает оценкой точности Δ на классе матриц $\bar{\mathcal{D}}\subset\mathcal{D}$, если

$$d(\sigma_A^d)/d(\sigma_*^d)\geq\Delta$$

для любой матрицы $d\in\bar{\mathcal{D}}$.

В [1 - 5] для ЗК предложены полиномиальные алгоритмы с определенными оценками точности на некоторых классах исходных матриц. В частности, в [5] исследуется структура оптимального решения ЗК в R^2 с евклидовой нормой (на множестве матриц $\bar{\mathcal{D}}=\{(d_{ij})_{n\times n}/$ существует набор точек $(x_1,x_2,\dots,x_n)\subset R^2$: $d_{ij}=\rho(x_i,x_j),\ 1\leq i,j\leq n$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ - расстояние между точками, $n\geq 2)\}$. Там же для последней задачи предложен полиномиальный алгоритм с оценкой точности $\Delta\simeq(6+\sqrt{2})/8$.

В настоящей работе для ЗК в R^K с евклидовой нормой, $K\geq 2$ (при $K=1$ задача тривиальна и не представляет интереса), предлагается асимптотически точный алгоритм ($\Delta\to 1$ при $n\to\infty$) с трудоемкостью $O(n^3)$ операций. В заключение приводятся оценки точности алгоритма при любом $K\geq 2$.

В дальнейшем под ЗК понимаем ЗК в R^K, $K\geq 2$, с евклидовой нормой. Рассмотрим полный n -вершинный неориентированный граф $G_n(X)$, вершинами которого служит множество $X=\{x_i\ /\ 1\leq i\leq n\}$ точек в R^K. Под весом d_{ij} ребра (x_i,x_j) понимается величина $\rho(x_i,x_j)$, где $\rho(\cdot,\cdot)$ (как уже говорилось) – расстояние между точками. Тогда ЗК эквивалентна задаче отыскания гамильтонова цикла в $G_n(X)$, имеющего максимальный вес. Отметим элементарные свойства отрезков в R^K и введем определения, которые нам понадобятся при описании и обосновании качества оценок алгоритма для ЗК в $G_n(X)$.

Л е м м а 1. Для любой пары отрезков (x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2}) имеет место неравенство

$$\max\{d_{i_1 i_2}+d_{j_1 j_2},\ d_{i_1 j_2}+d_{i_2 j_1}\} \geqslant$$
$$\geqslant \max\left\{d_{i_1 j_1}, d_{i_2 j_2}, \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}(d_{i_1 j_1}+d_{i_2 j_2})\right\}, \tag{1}$$

где $\alpha \leqslant \pi/2$ – угол между отрезками (x_{i_1}, x_{j_1}) (x_{i_2}, x_{j_2}).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство

$$\max\{d_{i_1 i_2}+d_{j_1 j_2}, d_{i_1 j_2}+d_{i_2 j_1}\} \geqslant \max\{d_{i_1 j_1}, d_{i_2 j_2}\}$$

очевидно. Покажем, что

$$\max\{d_{i_1 i_2}+d_{j_1 j_2}, d_{i_1 j_2}+d_{i_2 j_1}\} \geqslant \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}(d_{i_1 j_1}+d_{i_2 j_2}). \tag{2}$$

В R^K рассмотрим аффинное многообразие C размерности 2, содержащее отрезок (x_{i_1}, x_{j_1}) и параллельное отрезку (x_{i_2}, x_{j_2}). Пусть (x'_{i_2}, x'_{j_2}) – проекция отрезка (x_{i_2}, x_{j_2}) на C (в случае $C \supset (x_{i_2}, x_{j_2})$ полагаем $(x'_{i_2}, x'_{j_2}) = (x_{i_2}, x_{j_2})$). Тогда

$$\rho(x'_{i_2}, x'_{j_2}) = \rho(x_{i_2}, x_{j_2}),$$
$$\rho(x_{i_1}, x'_{i_2}) + \rho(x_{j_1}, x'_{j_2}) \leqslant d_{i_1 i_2} + d_{j_1 j_2},$$
$$\rho(x_{i_1}, x'_{j_2}) + \rho(x'_{i_2}, x_{j_1}) \leqslant d_{i_1 j_2} + d_{i_2 j_1}$$

и для доказательства (2) достаточно показать, что

$$\max\{\rho(x_{i_1}, x'_{i_2}) + \rho(x_{j_1}, x'_{j_2}), \rho(x_{i_1}, x'_{j_2}) + \rho(x'_{i_2}, x_{j_1})\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}\left(\rho(x_{i_1}, x_{j_1}) + \rho(x'_{i_2}, x'_{j_2})\right). \tag{3}$$

Считаем, что все крайние точки отрезков $(x_{i_1}, x_{j_1}), (x'_{i_2}, x'_{j_2})$ различны (иначе доказательство (3) очевидно). Верно одно из трех:

а) отрезки $(x_{i_1}, x_{j_1}), (x'_{i_2}, x'_{j_2})$ являются сторонами выпуклого четырехугольника (в этом случае неравенство (3) очевидно);

б) отрезки (x_{i_1}, x_{j_1}) (x'_{i_2}, x'_{j_2}) пересекаются в точке x (точка x может совпадать с одной из крайних точек этих отрезков);

в) продолжение одного отрезка пересекает другой во внутренней точке x .

В случае "б" обратимся к рис. 1.

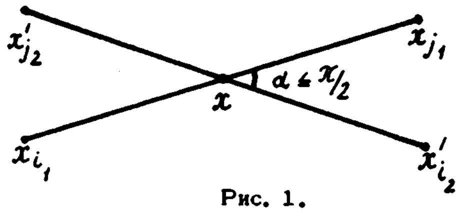


Рис. 1.

Тогда неравенство (3) следует из двух очевидных неравенств:

$$\rho(x'_{j_2}, x_{j_1}) \geqslant \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}\left[\rho(x, x_{j_1}) + \rho(x, x'_{j_2})\right];$$

$$\rho(x_{i_1}, x'_{i_2}) \geqslant \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}\left[\rho(x, x_{i_1}) + \rho(x, x'_{i_2})\right]$$

(если $\alpha < \pi/2$ смежный с углом, помеченным на рис. 1, то в последних неравенствах x_{i_1} и x_{j_1} меняются местами).

В случае "в" без ограничения общности положим, что продолжение второго отрезка пересекает первый и расположение отрезков в C соответствует рис. 2.

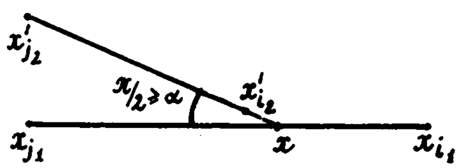


Рис. 2.

Тогда

$$\rho(x_{i_1}, x'_{j_2}) \geqslant \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}\left[\rho(x'_{i_2}, x'_{j_2}) + \rho(x, x'_{i_2}) + \rho(x, x_{i_1})\right]$$

или

$$\rho(x_{i_1}, x'_{j_2}) + \rho(x'_{i_2}, x_{j_1}) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}\left[\rho(x'_{i_2}, x'_{j_2}) + \rho(x, x'_{i_2}) + \rho(x, x_{i_1}) + \rho(x'_{i_2}, x_{j_1})\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2}\left[\rho(x'_{i_2}, x'_{j_2}) + \rho(x, x_{j_1}) + \rho(x, x_{i_1})\right]$$

и неравенство (3) доказано.

Лемма 1 доказана.

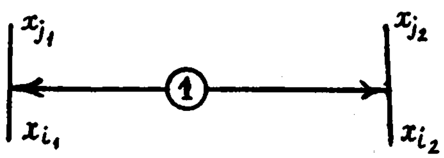
В пространстве R^K рассмотрим систему $\{O_i\}, 1 \le i \le \ell$, из ℓ отрезков. Для каждой пары отрезков O_i, O_j, $1 \le i, j \le \ell$, через $\alpha(O_i, O_j)$ обозначим угол между отрезками. Положим

$$\alpha_0(\{O_i\}) = \min_{1 \le i, j \le \ell} \alpha(O_i, O_j); \; \alpha_{K,\ell} = \max_{\{O_i\}} \alpha_0(\{O_i\}) \, .$$

Очевидно,

$$\alpha_{K,\ell} \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \qquad \ell \longrightarrow \infty \, . \tag{4}$$

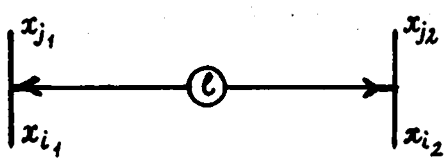
В дальнейшем любой паре ребер (x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2}) графа $G_n(X)$ поставим в соответствие один из циклов $(x_{i_1}, x_{j_1}, x_{i_2}, x_{j_2})$, $(x_{i_1}, x_{j_1}, x_{j_2}, x_{i_2})$ с максимальным весом, который схематично будем изображать в виде



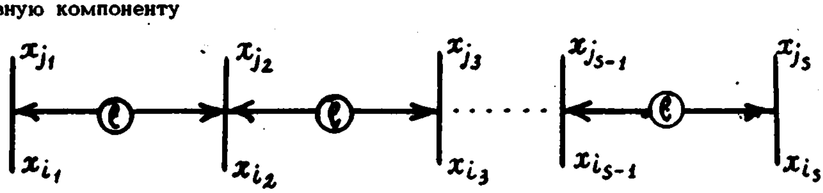
Если при этом известно, что

$$\alpha((x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2})) \le \alpha_{K,\ell} \tag{5}$$

при некотором $\ell \ge 2$, то соответствующий цикл будем называть ℓ-циклом и изображать в виде



Связную компоненту



условимся называть ℓ-частью графа $G_n(X)$. При этом ребра (x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_s}, x_{j_s}) назовем крайними ребрами данной компоненты.

Положим $m = [n/2]$. Рассмотрим натуральное ℓ, $2 \le \ell \le \left[\frac{m+1}{2}\right]$. Опишем алгоритм A_ℓ решения ЗК в графе $G_n(X)$. Алгоритм A_ℓ состоит из пяти этапов.

<u>Первый этап.</u> Строится паросочетание

$$\omega = \{(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2}), \dots, (x_{i_m}, x_{j_m})\},$$

имеющее максимальный вес в $G_n(X)$, причем ребра ω упорядочиваются таким образом, чтобы

$$d_{i_s j_s} \geqslant d_{i_t j_t}, \; 1 \leq s \leq m-\ell+1 < t \leq m. \tag{6}$$

Ребра $\omega_* = \{(x_{i_s}, x_{j_s}), 1 \leq s \leq m-\ell+1\}$ паросочетания ω назовем основными, остальные из $\omega_{**} = \omega \setminus \omega_*$ – вспомогательными.

Второй этап состоит из $m-2\ell+2$ шагов. На каждом шаге рассматриваются ℓ основных ребер из ω.

i-й шаг $(1 \leq i \leq m-2\ell+2)$. Переобозначая вершины основных ребер из ω (на первом шаге переобозначение не проделывается), считаем, что рассматриваемыми ребрами на данном шаге являются

$$(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2}), \ldots, (x_{i_\ell}, x_{j_\ell}) \tag{7}$$

и первые два из них удовлетворяют (5) (достаточно чтобы косинус угла между первыми двумя отрезками достигал максимальной величины среди всех пар рассматриваемых ребер).

Ребра $(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2})$ связываются ℓ-циклом. Если $i = m - 2\ell + 2$, то переходим к третьему этапу. Из множества (7) удаляются ребра $(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2})$. К полученному множеству добавляются одно из двух крайних ребер максимальной по включению текущей ℓ-части, содержащей ребра $(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2})$, а также одно из основных ребер паросочетания ω, не рассматривавшихся на предыдущих шагах. Переходим к $(i+1)$-му шагу.

Третий этап. Набор основных ребер вместе с ℓ-частями, построенными на втором этапе алгоритма, распадается на $\ell-1$ компоненту связности, которые обозначим через $S_1, S_2, \ldots, S_{\ell-1}$. На третьем этапе строится граф G^*, изображенный на рис. 3.

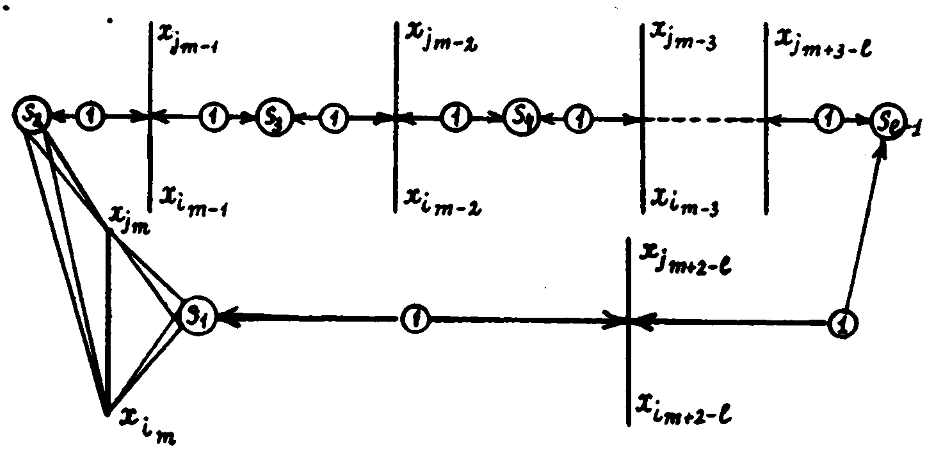


Рис. 3.

Изображенные на рис. 3 связи между ℓ -частями (основными ребрами) и вспомогательными ребрами из ω означают соответствующие связи между крайними ребрами ℓ -частей (основными ребрами) и вспомогательными. Более наглядно граф G^* изображен на рис. 4, где жирными линиями выделены ребра паросочетания ω

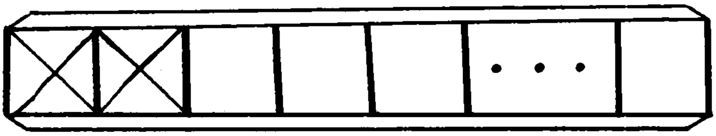
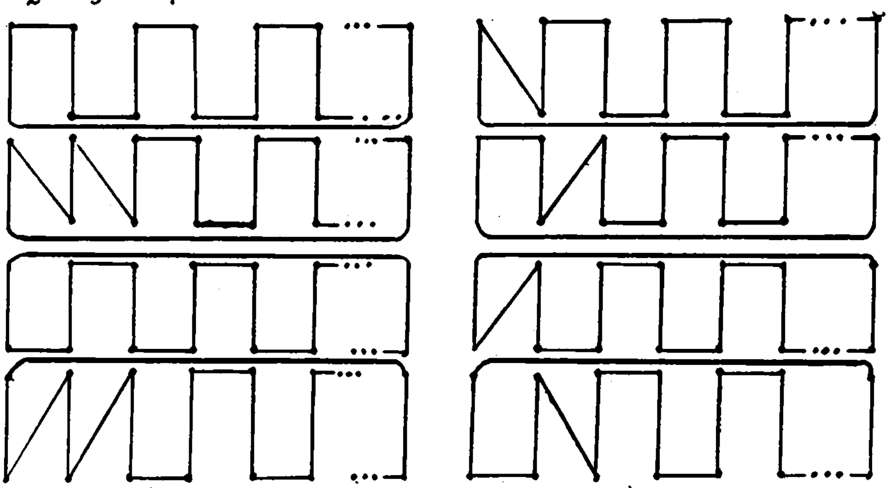


Рис. 4.

Четвертый этап. В графе G^* строятся четыре гамильтоновых цикла L_1, L_2, L_3, L_4, изображенных на рис. 5:



а) m -четное в) m -нечетное

Рис. 5.

Среди циклов L_1, L_2, L_3, L_4 выбирается максимальный по весу, который обозначим через L_0 (проще вначале сравнивать L_1 с L_2 и L_3 с L_4, а затем из двух полученных циклов выбирать максимальный). Если n четно, то полагаем $L_{A_\ell} = L_0$ и идем на конец.

Пятый этап. Пусть $x_{i_*} \in X$ не является концевой вершиной ребер множества ω. Цикл L_0 разрывается по любому ребру. Полученная цепь достраивается до гамильтонова цикла L_{A_ℓ} в $G_n(X)$. Идем на конец.

Конец. Цикл L_{A_ℓ} объявляется решением ЗК в $G_n(X)$.

При оценке трудоемкости работы алгоритма A_ℓ достаточно заметить, что на каждом этапе его работы затрачивается не более $O(n^3)$ операций. Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. Имеет место неравенство

$$d(L_{A_\ell}) \geq d(\omega) + \frac{\sqrt{2+2\cos\alpha_{\kappa,\ell}}}{2}\left(1-\frac{\ell-1}{m}\right)d(\omega). \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о достаточно провести для случая, когда n четное.

. Рассмотрим мультиграф $\bar{G}_n(X)$, полученный путем объединения циклов L_1, L_2, L_3, L_4

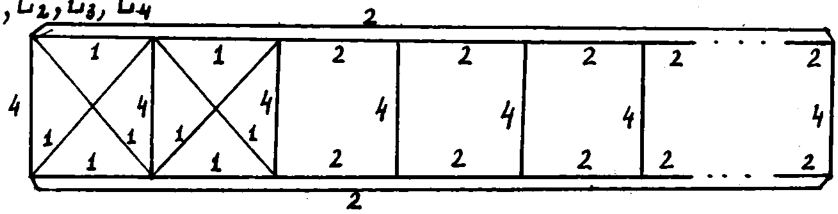


Рис. 6.

На рис. 6 изображены все ребра мультиграфа $\bar{G}_n(X)$ вместе с кратностью их вхождения. Обозначим через $\bar{G}_n^q$ часть мультиграфа $\bar{G}_n(X)$, $1 \le q \le \ell - 1$, изображенного на рис. 7, со всеми кратностями ребер (ребра, изображенные на рис. пунктирными линиями, в $\bar{G}_n^q$ не входят).

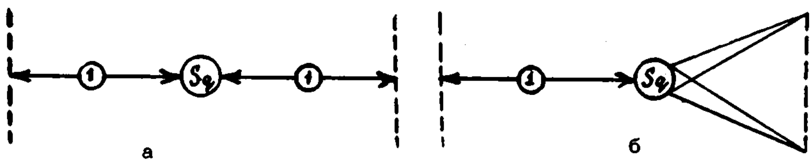


Рис. 7.

Тогда, учитывая (1), получим

$$d(\bar{G}_n^q) \ge \left(4 + 2\sqrt{2 + 2\cos d_{K,\ell}}\right) d(\omega_q), \quad 1 \le q \le \ell - 1,$$

где ω_q - множество основных ребер, входящих в S_q. Или, используя (6),

$$d(\bar{G}_n(X)) \ge 4\, d(\omega_{**}) + \left(4 + 2\sqrt{2 + 2\cos d_{K,\ell}}\right) d(\omega_*) =$$

$$= 4\, d(\omega) + 2\sqrt{2 + 2\cos d_{K,\ell}} \cdot d(\omega_*) \ge 4 d(\omega) + 2\sqrt{2 + 2\cos d_{K,\ell}}\left(1 - \frac{\ell - 1}{m}\right) d(\omega).$$

Следовательно,

$$d(L_{A_\ell}) \ge \frac{d(\bar{G}_n(X))}{4} \ge d(\omega)\left[1 + \frac{\sqrt{2 + 2\cos d_{K,\ell}}}{2}\left(1 - \frac{\ell - 1}{m}\right)\right].$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е теоремы. Для ЗК в R^K с евклидовой нормой существует асимптотически точный алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ операций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\ell = \ell(n) = o(n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Тогда, воспользовавшись (8), а также очевидным неравенством

$$d(\omega) \ge \frac{1}{2}\, d(L_*)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

(здесь через L_* обозначено оптимальное решение ЗК в $G_n(X)$), получим

$$1 \geq \frac{d(L_{A_\ell})}{d(L_*)} \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{\sqrt{2+2\cos\alpha_{K,\ell}}}{2}\left(1-\frac{\ell-1}{m}\right)\right]. \qquad (10)$$

Теперь, с учетом (4), (9), правая часть неравенства (10) стремится к единице при $n \to \infty$.

Следствие теоремы доказано.

В заключение приведем наилучшие оценки точности для алгоритмов из класса $\{A_\ell\}$, $2 \leq \ell \leq \left[\frac{m+1}{2}\right]$, для различных $K \geq 2$. Для этого вначале установим, что

$$\cos\alpha_{K,\ell} \geq 1 - C'_K/\ell^{2/(K-1)}, \qquad (11)$$

где C'_K не зависит от ℓ.

Итак, в R^K рассмотрим систему $\{O_i\}$, $1 \leq i \leq \ell$, из ℓ отрезков. Путем параллельного переноса, сжатия или растяжения отрезков добьемся, чтобы каждый из отрезков O_i, $1 \leq i \leq \ell$, являлся диаметром единичного шара в R^K с центром в начале координат. Обозначим через V_K K-мерный объем единичного шара в R^K, а через S_{K-1} – $(K-1)$-мерный объем его поверхности. Тогда

$$2\ell\cdot V_{K-1}\cdot\sin^{K-1}\left(\frac{\alpha_{K,\ell}}{2}\right) \leq S_{K-1} \quad \text{или} \quad \sin^2\left(\frac{\alpha_{K,\ell}}{2}\right) \leq \left(\frac{S_{K-1}}{2\ell\cdot V_{K-1}}\right)^{2/(K-1)}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha_{K,\ell} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha_{K,\ell}}{2}\right) \geq 1 - C'_K/\ell^{2/(K-1)},$$

где $C'_K = 2\cdot(2S_{K-1}/V_{K-1})^{2/(K-1)}$. Теперь, учитывая (11), (10) и полагая

$$\ell = \ell(K,n) = \left[n^{(K-1)/(K+1)}\right],$$

имеем

$$\Delta_K = \Delta(K) \geq 1 - \frac{C_K}{n^{2/(K+1)}},$$

и величина C_K не зависит от n.

Поступила в ред.-изд. отдел
22 декабря 1986 г.

Литература

1. Сердюков А.И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум// Дискретные задачи оптимизации (Управляемые системы).-Новосибирск,

1984. - Вып. 25. - С. 80-86.

2. Косточка А.В., Сердюков А.И. Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум// Управление и оптимизация (Управляемые системы). - Новосибирск, 1985. - Вып. 26. - С. 55-59.

3. Сердюков А.И. Полиномиальные алгоритмы с оценками для задачи коммивояжера// 30. Международный научный коллоквиум, Ильменау (ГДР).-1985.- С. 105-108.

4. Ковалев М.М., Котов В.М. Оценки погрешности серий приближенных алгоритмов// Вест. Белорус. гос. ун-та им. В.И.Ленина. - 1986. - Вып. 3(1). - С. 44-48.

5. Сердюков А.И. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности $\sim(6+\sqrt{2})/8$ для задачи о максимальном гамильтоновом цикле на евклидовой плоскости// Методы дискретного анализа в теории графов и логических функций.- Новосибирск, 1986. - Вып. 43. - С. 87-96.