Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1987 г., вып. 27

УДК 519.854.2

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА С ОГРАНИЧЕННЫМ РАДИУСОМ

А.И.Ерзин

1. Постановка задачи

Задан полный неориентированный взвешенный граф $G=(V,E)$, $V=\{0,1,\dots,n\}$, с неотрицательными весами ребер $a_{ij}\geqslant 0$, $(i,j)\in E$. Пусть $\mathcal{F}=\mathcal{F}(G)$ – множество остовных деревьев графа G, а $C_K(T)$ – цепь, связывающая вершины $K\in V$ и 0 в дереве $T\in\mathcal{F}$. Требуется построить дерево $T^*\in\mathcal{F}$, являющееся решением задачи

$$\sum_{(i,j)\in T} a_{ij} \longrightarrow \max_{T\in\mathcal{F}}; \tag{1}$$

$$|C_K(T)|\leqslant R,\quad K=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где $R\leqslant n$ – положительное целое число, а через $|C_K(T)|$ обозначено количество ребер в цепи $C_K(T)$.

Назовем число, равное $\max\limits_{K=\overline{1,n}}|C_K(T)|$, радиусом дерева $T\in\mathcal{F}$.

Тогда задачу (1)-(2) можно трактовать как задачу построения остова максимального веса с ограниченным радиусом, которая при $R\geqslant 2$ является NP-трудной. Покажем последнее. Известно [1], что задача построения остова минимального веса с ограниченным диаметром NP-трудна. Однако ее нетрудно свести к задаче, аналогичной рассматриваемой.

Пусть на графе G с весами ребер $b_{ij}\geqslant 0$, $i,j\in V$, требуется построить остовное дерево T_D минимального веса с диаметром (т.е. числом ребер в любой цепи, связывающей две вершины), не превосходящим четного $D=2R$. Очевидно, что решение такой задачи сводится к решению $(n+1)$-й задачи вида

$$\sum_{(i,j)\in T} b_{ij} \longrightarrow \min_{T\in\mathcal{F}}; \tag{1'}$$

$$|C_{Kq}(T)| \le R, \quad K \in V \setminus q, \tag{2'}$$

где $C_{Kq}(T)$ - цепь, связывающая вершину K с вершиной q в дереве T, $q = 0, 1, \ldots, n$, , т.е. в качестве центральной (выделенной) вершины q берутся по очереди все вершины графа. Пусть T_q - оптимальное решение задачи (1′)-(2′). Тогда дерево наименьшего веса среди деревьев T_q, $q = 0, 1, \ldots, n$, и есть искомый минимальный остов ограниченного диаметра.

Задача же (1′)-(2′) сводится к задаче (1)-(2) простой заменой весов ребер b_{ij} на веса $a_{ij} = B - b_{ij}$, где $B = \max\limits_{(i,j)\in E} b_{ij}$.

Следовательно, задача (1)-(2) является NP-трудной.

Предлагается использовать серии приближенных алгоритмов для эффективного (с трудоемкостью и памятью, равными $O(n^2)$) построения решения с гарантированной оценкой относительной погрешности, в наихудшем случае равной 1/2. В случае выполнения для весов ребер неравенства треугольника оценку относительной погрешности удается улучшить до величины, равной

$$\max\left\{\frac{3}{5}, \frac{R+3}{R+7}, \frac{R-1}{R+1}\right\}.$$

2. Метод решения

Пусть

$$W(D) = \sum_{(i,j)\in D} a_{ij},$$

где $D \subset G$. Под относительной погрешностью $\mathcal{E}(T)$ приближенного решения $T \in \mathcal{F}$ задачи (1)-(2) будем понимать величину отношения

$$\mathcal{E}(T) = \frac{W(T)}{W^*},$$

где $W^* = W(T^*)$. Очевидно, что $0 \le \mathcal{E}(T) \le 1$ для всех допустимых $T \in \mathcal{F}$. Причем чем ближе $\mathcal{E}(T)$ к единице, тем точнее решение.

Обозначим через $P \in \mathcal{F}$ остов максимального веса в графе G, т.е. остовное дерево, для которого $W(P) \ge W(T)$, $T \in \mathcal{F}$. В общем случае дерево P не является допустимым решением рассматриваемой задачи (не всегда выполняется условие (2)). Ниже будет описана процедура (алгоритм $\mathcal{A}_1$) построения из дерева P деревьев $T_1 \in \mathcal{F}$ и $T_2 \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих ограничению (2).

Алгоритм $\mathcal{A}_1$

Пусть $K(i) = |C_i(P)|,\ i \in V;\ t = \max\limits_{i=\overline{1,n}} K(i);$

$P_m = (V, E_m),\ m = 1,2;\ P = (V, E_P)$, где E_P – множество ребер дерева P.

Шаг 0. Положим $M = \Pi = E_2 = \emptyset;\ E_1 = E_P;\ \tau = R+1$. Если $t \le R$, то переходим на шаг 2.

Шаг 1. Если $\tau \geq t + R$, то переходим на шаг 2. Найдем вершину $i \in V \setminus \Pi$ такую, что $K(i) = \tau$. Если такой вершины нет, то положим $\tau = \tau + R,\ \Pi = \emptyset$ и переходим на шаг 1.

Пусть $j \in V$ такая, что ребро $(i,j) \in C_i(P)$. Тогда положим:

$$\Pi = \Pi \cup \{i\},$$

$$M = M \cup \{i\},$$

$$E_1 = E_1 \setminus \{(i,j)\},$$

$$E_2 = E_2 \cup \{(i,j)\}.$$ Переходим на шаг 1.

Шаг 2. Положим $P_1 = (V, E_1);\ P_2 = (V, E_2)$. Стоп.

Очевидно, что $E_1 \cup E_2 = E_P$. Положим

$$E_1 = E_1 \bigcup_{i \in M} \{(i,0)\};\quad E_2 = E_2 \bigcup_{i \in V \setminus M} \{(i,0)\}.$$

Тогда деревья $T_1 = (V, E_1)$ и $T_2 = (V, E_2)$ являются допустимыми. Значит,

$$W^* \le W(P) = W(P_1) + W(P_2), \tag{3}$$

а

$$W(T_1) = W(P_1) + \sum_{i \in M} a_{i0},$$

$$W(T_2) = W(P_2) + \sum_{i \in V \setminus M} a_{i0} .$$

Оценим трудоемкость построения деревьев T_1 и T_2. Для построения дерева P требуется выполнить $O(n^2)$ арифметических операций при такой же памяти [2]. Матрица K насчитывается с аналогичной эффективностью. Сложность одного шага 1 в алгоритме A_1 ограничена величиной $O(n)$. Суммарное число обращений к шагу 1, очевидно, не превосходит $O(n)$. При этом объем необходимой памяти ограничен длиной записи исходной информации $(O(n^2))$. Следовательно, для реализации алгоритма A_1 достаточно выполнить $O(n^2)$ арифметических операций, храня в памяти не более $O(n^2)$ чисел.

Обозначим через $\bar{T}$ наилучшее из деревьев T_1 и T_2, т.е.

$$W(\bar{T}) = \max_{T = T_1, T_2} W(T). \tag{4}$$

Т е о р е м а 1. Для дерева $\bar{T}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}(\bar{T}) \geq \frac{1}{2} .$$

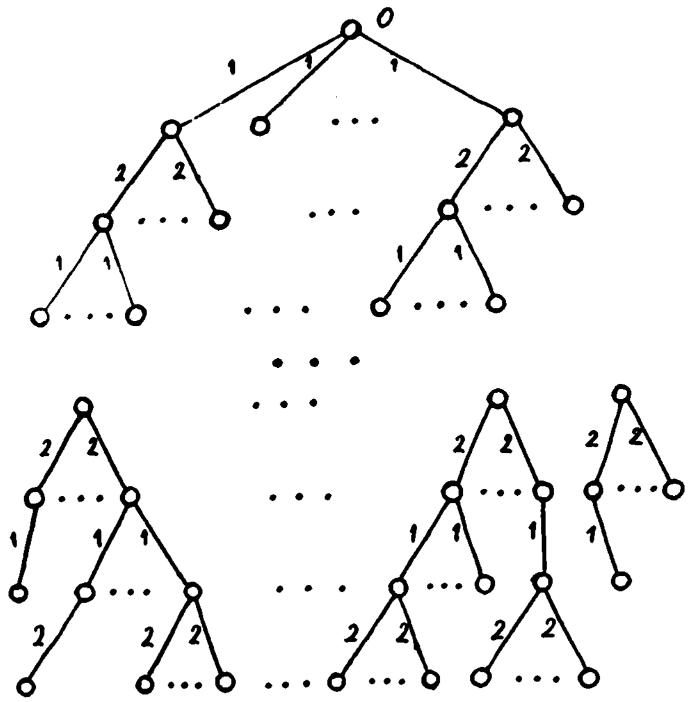
Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенств (3), (4) следует, что

$$W^* \leq W(P_1) + W(P_2) \leq 2W(\bar{T}) - \sum_{i=1}^{n} a_{i0} \leq 2W(\bar{T}),$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Теорему 1 можно доказать и более наглядным способом. Например, дерево максимального веса можно разбить на два подграфа $P' \subset P$ и $P'' \subset P$ по схеме, изображенной на рисунке. Пусть ребра с пометкой "1" (т.е. нечетные от вершины 0 ребра в каждой цепи дерева P) составляют подграф P', а ребра с пометкой "2" - подграф P''. Если подграф с большим весом достроить до остовного дерева радиуса 2, то, очевидно, для него будет справедливо утверждение теоремы.

Однако для получения оценок относительной погрешности в дальнейшем нам понадобится дерево $\bar{T}$, полученное с помощью алгоритма A_1.



3. Построение приближенного решения в случае выполнения неравенства треугольника

Пусть для весов ребер выполняется неравенство треугольника, т.е. $a_{ij} + a_{jk} \geq a_{ik}$, где $i, j, k \in V$. При этом рассматриваемая задача остается NP-трудной, так как добавление к весам ребер достаточно большой положительной константы сводит к этой задаче любую задачу (1)-(2) на произвольном взвешенном графе.

Построим из дерева P дерево T', используя следующий

Алгоритм $\mathcal{A}_2$

Пусть $B(T)$ - множество висячих вершин в графе $T \subset G$; $V_k(T) = \{\ell \in V / C_k(T) < C_\ell(T)\}$; $C_{ij}(T)$ - цепь из вершины i в вершину j в дереве $T \in \mathcal{F}$, а $|C_{ij}(T)|$ - количество ребер в этой цепи $(|C_{ii}(T)| = 0)$.

<u>Шаг 0.</u> Используя алгоритм Прима [2], строим дерево P, начиная с вершины 0. Положим $P' = (V, E')$; $E' = E_P$; $\Pi = M = \emptyset$.

<u>Шаг 1.</u> Если $t \leq R$ (t определено в алгоритме $\mathcal{A}_1$), то переходим на шаг 2. Найдем $\ell \in B(P') \setminus \Pi$ такую, что $K(\ell) = t$. Если такой вершины нет, то полагаем $t = t - 1$ и переходим на шаг 1.

Пусть вершины $i,\ j,\ K \in V$ удовлетворяют условиям:

$$(K,i) \in C_K(P') \subset C_\ell(P');\ (i,j) \in C_i(P') \subset C_K(P') \text{ и } |C_{i\ell}(P')| = R-1.$$

Положим:

$$\Pi = \Pi \cup V_i(P'),$$

$$E' = E' \setminus \{(i,j)\},$$

$$M = M \cup \{i\}.$$ Переходим на шаг 1.

Шаг 2. Положим $E' = E' \bigcup\limits_{i \in M} \{(i,0)\}$. Стоп.

Очевидно, что построенное дерево $T' = (V, E')$ является допустимым и получено с трудоемкостью и памятью, равными $O(n^2)$. Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Если для весов ребер a_{ij} выполняется неравенство треугольника, то

$$\mathcal{E}(T') \geqslant \frac{R-1}{R+1}. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$W^* \leq W(P') \cdot \frac{R+1}{R-1}. \tag{6}$$

Так как

$$W^* \leq W(P) = W(P') + W',\ W' = \sum_{(i,j) \in E_P \setminus E'} a_{ij},$$

то для доказательства неравенства (6) достаточно показать, что $W' \leq \frac{2}{R-1} \times$ $\times\ W(P')$, т.е. суммарный вес исключенных (при построении P') из P ребер не превосходит $2/(R-1) \cdot W(P')$).

Пусть (i,j) - произвольное исключенное из P ребро, т.е. $(i,j) \in$ $\in E_P,\ (i,j) \notin E',\ j \in C_i(P)$, а T_i - поддерево текущего подграфа P' , ставшее не связанным (после исключения ребра (i,j)) с поддеревом, содержащим вершину 0. Пусть $(\ell, m) \in T_i$. Из неравенства треугольника имеем $a_{\ell i} + a_{\ell j} \geqslant a_{ij}$. Но по свойству дерева P справедливо неравенство $a_{\ell i} \leq a_{\ell p}$ и $a_{\ell j} \leq a_{\ell p}$, где вершина $p \in T_i$ такая, что $C_\ell(P) = C_P(P) \cup \{(\ell, p)\}$. Следовательно,

$$a_{ij} \le 2 a_{lp} . \tag{7}$$

Всего в T_i не менее $(R-1)$ ребер, и для каждого справедливо неравенство типа (7). Просуммировав их, получим

$$(R-1)\, a_{ij} \le 2 \sum_{(l,p)\in T_i} a_{lp} . \tag{8}$$

Если теперь просуммировать все неравенства (8).для различных ребер $(i,j) \in E_p \setminus E'$, то получим неравенство (6). Что и требовалось.

Обозначим через $\tilde{T}$ наилучшее из деревьев $\bar{\bar{T}}$ и T'. Следовательно, выполняются соотношения:

$$W^* \le 2W(\tilde{T}) - \sum_{i=1}^{n} a_{i0} ; \tag{9}$$

$$W(\tilde{T}) \ge W(P') ; \tag{10}$$

$$W^* \le W(P') + W', \tag{11}$$

где
$$W' = \sum_{(i,j)\in E_p \setminus E'} a_{ij} .$$

Т е о р е м а 3. Если для весов ребер a_{ij} выполняется неравенство треугольника, то

$$\varepsilon(\tilde{T}) \ge max\left\{\frac{3}{5}, \frac{R+3}{R+7}, \frac{R-1}{R+1}\right\} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим W' сверху. Из неравенства треугольника имеем

$$a_{ij} \le 2a_{Kl} \le 2(a_{K0} + a_{l0}) , \tag{12}$$

где $(K,l) \in C_K(P)$; $C_K(P) \supset C_i(P)$. Всего неравенств типа (12) для различных ребер (K,l) не менее $(R-1)$. Если их просуммировать для ребер одной цепи каждого поддерева T_i, то получим неравенства

$$(R-1)\, W' \le 4 \sum_{i=1}^{n} a_{i0} . \tag{13}$$

Из неравенств (10), (11) и (13) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i0} \geq \frac{R-1}{4} W^* - \frac{R-1}{4} W(\tilde{T}).$$

Используя неравенство (9), получаем

$$\left(1+\frac{R-1}{4}\right) W^* \leq \left(2+\frac{R-1}{4}\right) W(\tilde{T}),$$

или

$$\frac{W(\tilde{T})}{W^*} \geq \frac{R+3}{R+7}.$$

Теперь докажем, что $\mathcal{E}(\tilde{T}) \geq 3/5$. Действительно, из (12) имеем

$$W' \leq 2 \sum_{i=1}^{n} a_{i0}.$$

Следовательно, используя неравенства (9) и (10), получим

$$\frac{3}{2} W^* \leq \frac{5}{2} W(\tilde{T}) \qquad \text{или} \qquad \frac{W(\tilde{T})}{W^*} = \mathcal{E}(\tilde{T}) \geq \frac{3}{5}.$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть $a_{ij} = \varphi(c_i) * \varphi(c_j)$, где операция $*$ есть либо умножение, либо сложение, а $\varphi(c)$ – неотрицательная однозначная функция. Тогда дерево-звезда

$$Z = (V, E_z), \ E_z = \{(i, i^*) / i = \overline{0,n}, \ \varphi(c_{i^*}) = \max_{i=\overline{0,n}} \varphi(c_i)\}$$

является оптимальным, т.е. $\mathcal{E}(Z) = 1$.

Очевидно, что

$$W^* \leq \sum_{i=0}^{n} A_i,$$

где

$$A_i = a_{ij(i)} = \max_{j=\overline{0,n}} a_{ij}.$$

В случае, когда $a_{ij} = \varphi(c_i) * \varphi(c_j)$, в качестве вершины $j(i)$ для всех $i = \overline{0,n}$ можно взять i^*. Следовательно, $W^* \leq W(Z)$.

Поступила в ред.-изд. отдел
22 ноября 1985 г.

Л и т е р а т у р а

1. Гэри М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416 с.

2. Прим Р.К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения// Киб. сб. - 1961. - Вып. 2. - С. 95-107.