Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1987 г., вып. 27

УДК 519.854

ОБОСНОВАНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК КАЧЕСТВА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТАНДАРТИЗАЦИИ

Э.Х.Гимади

1. Рассмотрим математическую постановку задачи стандартизации (размещения) в классическом виде [1]:

$$L(X) = \sum_{i\in \mathcal{M}} g_i^0 x_i + \sum_{i\in\mathcal{M}}\sum_{j\in\mathcal{N}} g_{ij}x_{ij} \to \min_X ; \quad (1)$$

$$\sum_{i\in\mathcal{M}} x_{ij} = 1 , \quad j\in\mathcal{N} ; \quad (2)$$

$$0 \le x_{ij} \le x_i , \quad i\in\mathcal{M}, \ j\in\mathcal{N} ; \quad (3)$$

$$x_i \in \{0,1\} , \quad i\in\mathcal{M} , \quad (4)$$

где $\mathcal{M} = \{1,\ldots,m\}$ - множество, соответствующее перечню типов изделий;

$\mathcal{N} = \{1,\ldots,n\}$ - множество, соответствующее совокупности видов спроса;

g_i^0 - начальные затраты на ввод в действие изделия i-го типа ($i\in\mathcal{M}$);

g_{ij} - затраты, связанные с обслуживанием спроса j-го вида с помощью изделий i-го типа $(i\in\mathcal{M},\ j\in\mathcal{N})$; $X = (x_i)(x_{ij})$.

Здесь x_i - переменные выбора (ввода в действие) изделий $i\in\mathcal{M}$; x_{ij} - переменные назначения изделий $i\in\mathcal{M}$ на соответствующие виды спроса $j\in\mathcal{N}$ (или доля спроса j-го вида, обслуживаемого изделиями i-го типа).

Через X^* обозначим оптимальное решение; X_A - решение, полученное в результате работы алгоритма A с индивидуальной задачей вида (1)-(4); L^* и L_A - соответствующие значения целевой функции $L(X^*)$ и $L(X_A)$.

Задача (1)-(4) может быть записана в эквивалентной (относительно целевой функции и переменных выбора) форме:

$$L(X) = \sum_{i\in\mathcal{M}} g_i^0 x_i + \sum_{j\in\mathcal{N}} \min_{i|x_i=1,\, i\in\mathcal{M}} g_{ij} \to \min_{X\ne 0} ,$$

где под X понимается булев вектор $(x_i), i \in \mathcal{M}$, переменных выбора.

Поставленная задача является NP-трудной, поскольку ее частным случаем служит задача покрытия множествами [2, 3]. Более того, она остается NP-трудной при отыскании ее решения с ограничением отношения $L_{\mathcal{A}} / L^* \le r_{\mathcal{A},L}$ для каждой конкретной задачи из заданного класса [3].

Целью настоящей статьи является применение идеи построения малотрудоемких (эффективных или статистически эффективных) алгоритмов с оценками $\varepsilon_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}}$ качества решения [4 - 6], где $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ - оценка относительной величины погрешности отыскания значения целевой функции, $\delta_{\mathcal{A}}$ - оценка вероятности несрабатывания алгоритма $\mathcal{A}$ на классе задач, задаваемых с помощью некоторого случайного механизма. При этом указанные оценки связаны между собой соотношением

$$P\{L_{\mathcal{A}} > (1+\varepsilon_{\mathcal{A}}) L^*\} \le \delta_{\mathcal{A}},$$

где $P\{\cdot\}$ - вероятность соответствующего события.

Отметим наличие очевидной связи $\varepsilon_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{A},L} - 1$.

В случае $\varepsilon_{\mathcal{A}}, \delta_{\mathcal{A}} \to 0$ с увеличением размерности задачи алгоритм называют асимптотически точным [4].

2. Определим класс $\mathcal{K}(A_n^0, B_n^0, a_n, b_n)$ задач стандартизации вида (1)-(4) с элементами вектора $(g_i^0), i \in \mathcal{M}$, и матрицы $(g_{ij}), i \in \mathcal{M}, j \in \mathcal{N}$, принадлежащими соответственно числовым отрезкам $[A_n^0, B_n^0]$ и $[a_n, b_n]$, A_n^0 и a_n неотрицательны. При этом элементы матрицы - независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что функция распределения F величин $\xi_{ij} = (g_{ij} - a_n)/(b_n - a_n)$ удовлетворяет условию $F(\xi) \ge \xi, 0 \le \xi \le 1$.

3. Далее мы опишем малотрудоемкий, вообще говоря, приближенный алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}$ для решения задач из класса $\mathcal{K}(A_n^0, B_n^0, a_n, b_n)$. Нашей конечной целью является получение оценок качества его работы на некоторых подклассах задач стандартизации, входящих в описанный выше класс $\mathcal{K}(A_n^0, B_n^0, a_n, b_n)$.

Далее для краткости вместо нижнего индекса $\tilde{\mathcal{A}}$ в обозначении какого-либо символа будем использовать волновую пометку над этим обозначением; например, вместо $L_{\tilde{\mathcal{A}}}$ пишем $\tilde{L}$.

Опишем алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}$.

<u>Этап 1.</u> Если $m \le \log_2 n$, то, перебрав не более n различных ненулевых наборов $(x_i), i \in \mathcal{M}$, находим точное решение X^* и заканчиваем работу алгоритма. В противном случае переходим на следующий, второй этап.

<u>Этап 2</u> (случай $m > \log_2 n$).

2.1. Вычисляем параметры m_0 и $\tilde{m}$ по формулам:

$$m_0 = \sqrt{n(b_n - a_n)/B_n^o - 1}\ ;$$

$$\tilde{m} = \begin{cases} \lceil m_0 \rceil & \text{при} \quad m \geq m_0 ; \\ m & \text{при} \quad m < m_0 . \end{cases}$$

2.2. Отыскиваем подмножество $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$, состоящее из $\tilde{m}$ первых в порядке неубывания элементов вектора (g_i^o), $i \in \mathcal{M}$:

$$\max_{i \in \tilde{\mathcal{M}}} g_i^o \leq \min_{i \in \mathcal{M} \setminus \tilde{\mathcal{M}}} g_i^o .$$

2.3. Вычисляем вектор назначения (i_j), $j \in \mathcal{N}$, где

$$i_j = \operatorname{argmin}\{g_{ij} \mid i \in \tilde{\mathcal{M}}\},\ j \in \mathcal{N} .$$

2.4. В качестве выходного результата работы алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}$ принимаем решение $\tilde{X} = (\tilde{x}_i)(\tilde{x}_{ij})$, компоненты которого определяются естественным образом:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i \in \tilde{\mathcal{M}} ; \\ 0 & \text{при} \quad i \notin \tilde{\mathcal{M}} , \end{cases} \qquad \tilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = i_j , \\ 0 & \text{при} \quad i \neq i_j . \end{cases}$$

Выдачей решения $\tilde{X}$ и значения целевой функции $\tilde{L} = L(\tilde{X})$ алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}$ заканчивает свою работу.

Оценим трудоемкость алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}$.

Покажем, что трудоемкость алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}$ ограничена величинами $O(n^2)$ при $m \leq \log_2 n$ и $O(\tilde{m}(n + \log_2 m))$ при $m > \log_2 n$.

Можно показать, что точное решение задачи (1)-(4) можно получить за число действий порядка $n \cdot 2^m$ (см., например, доказательство леммы 2 в [7]). Следовательно, при $m \leq \log_2 n$ мы получаем оценку $O(n^2)$.

В случае $m > \log_2 n$ оценка $O(\tilde{m}(n + \log_2 m))$ следует из того, что $\tilde{m}$ первых (в порядке неубывания величины g_i^o) элементов множества $\mathcal{M}$ отыскиваются с трудоемкостью $O(\tilde{m} \log_2 n)$ действий, а вектор назначения (i_j), $j \in \mathcal{M}$, может быть найден за $O(\tilde{m} n)$ действий. При этом отыскание ненулевых компонент решения $\tilde{X} = (\tilde{x}_i)(\tilde{x}_{ij})$ и значения целевой функции $\tilde{L}$ можно осуществить за $O(\tilde{m} + n)$ действий.

В целом трудоемкость описанного алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}$ оценивается величиной $O(n^2 + \tilde{m} n + \tilde{m} \log_2 m)$ или, более грубо, $O(\nu^2)$, где $\nu = \max(m, n)$. При весьма правдоподобном предположении $m \leq 2^n$ оценка имеет порядок величины $\sim n(n + \tilde{m})$.

4. Далее нам будет удобнее иметь дело с эквивалентной в смысле получаемого решения $\tilde{X}$ задачей $\mathcal{K}(a_n^o, b_n^o, 0, 1)$:

$$f(X) = \sum_{i \in \mathcal{M}} c_i^o x_i + \sum_{i \in \mathcal{M}} \sum_{j \in \mathcal{N}} c_{ij} x_{ij} \to \min_X \tag{5}$$

при ограничениях (2)-(4), в которой осуществлена нормализация входных данных:

$$c_i^0 = g_i^0 / (b_n - a_n), \quad i \in \mathcal{M};$$

$$c_{ij} = (g_{ij} - a_n)/(b_n - a_n), \, i \in \mathcal{M}, \, j \in \mathcal{N};$$

$$a_n^0 = A_n^0 / (b_n - a_n);$$

$$b_n^0 = B_n^0 / (b_n - a_n).$$

Понятно, что целевая функция $L(X)$ исходной задачи связана с целевой функцией $f(X)$ задачи с нормализованными данными с помощью линейного преобразования

$$L(X) = n a_n + (b_n - a_n) f(X). \tag{6}$$

Формула для вычисления параметра m_0 алгоритма $\tilde{A}$ в этом случае имеет вид $m_0 = \sqrt{n / b_n^0} - 1$.

5. Далее займемся оценками качества алгоритма $\tilde{A}$ на классе $\mathcal{K}$.

Лемма 1 (о верхней оценке для значения целевой функции $\tilde{f}$). Алгоритм $\tilde{A}$ гарантирует получение решения $\tilde{X}$ задачи из класса $\mathcal{K}(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ со значением целевой функции $\tilde{f}$ таким, что $P(\tilde{f} > \hat{f}) \to 0$ при $n \to \infty$, где

$$\hat{f} = \tilde{m} b_n^0 + (1 + \varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{\tilde{m} + 1}, \tag{7}$$

$\varepsilon_n^{(1)} = \sqrt{\ln n / n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Подлемма 1.1. Для математического ожидания и дисперсии случайной величины

$$C_m = \sum_{j=1}^{n} \min_{1 \le i \le m} c_{ij},$$

где c_{ij} - независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения $F(\xi) \geq \xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, справедливы следующие оценки:

$$M C_m \leq \frac{n}{m+1}, \tag{8}$$

$$D C_m \leq \frac{2n}{(m+1)(m+2)}. \tag{9}$$

Доказательство. Вероятность того, что для фиксированного j, $j=1,\dots,n$, минимум θ_m из m случайных независимых величин c_{ij}, $i=1,\dots,m$, не превышает значения ξ, равна

$$P_m(\xi) = P\{\theta_m \le \xi\} = 1-(1-F(\xi))^m .$$

Отсюда для математического ожидания величины θ имеем

$$M\theta_m = \int_0^1 \xi\, dP_m(\xi) = \xi P_m(\xi)\Big|_0^1 - \int_0^1 P_m(\xi)\, d\xi = 1 -$$

$$-\int_0^1 [1-(1-F(\xi))^m]\, d\xi = \int_0^1 (1-F(\xi))^m d\xi \le \int_0^1 (1-\xi)^m d\xi = \frac{1}{m+1},$$

откуда следует оценка для математического ожидания случайной величины C_m:

$$M C_m = \sum_{j=1}^{n} M(\min_{1\le i\le m} c_{ij}) = n M\theta_m \le \frac{n}{m+1} .$$

Оценим дисперсию случайной величины θ_m:

$$D\theta_m = M\theta_m^2 - (M\theta_m)^2 \le M\theta_m^2 = \int_0^1 \xi^2 dP_m(\xi) =$$

$$= 1 - 2\int_0^1 \xi P_m(\xi)\, d\xi = 1 - 2\int_0^1 \xi[1-(1-F(\xi))^m]\, d\xi =$$

$$= 2\int_0^1 \xi[1-F(\xi)]^m d\xi \le 2\int_0^1 \xi(1-\xi)^m d\xi = \frac{2}{(m+1)(m+2)},$$

откуда получим требуемую оценку для дисперсии величины C_m:

$$D C_m = n D\theta_m \le \frac{2n}{(m+1)(m+2)} .$$

Доказательство леммы 1. Покажем, что $P\{\tilde f > \hat f\} \to 0$ при $n \to \infty$. Согласно выбору решения $\tilde X$ с помощью алгоритма $\tilde{A}$ имеем

$$\tilde f = f(\tilde X) = \sum_{k=1}^{\tilde m} c^0_{i_k} + \sum_{j=1}^{n} \min_{1\le k\le \tilde m} c_{i_k j} \le \tilde m b^0_n + C_{\tilde m}, \qquad (10)$$

где

$$C_{\tilde m} = \sum_{j=1}^{n} \min_{1\le k\le \tilde m} c_{i_k j} -$$

случайная величина, для математического ожидания и дисперсии которой, согласно подлемме 1.1, справедливы оценки вида (8) и (9):

$$MC_{\tilde m} \le \frac{n}{\tilde m+1}, \ DC_{\tilde m} \le \frac{2n}{(\tilde m+1)(\tilde m+2)} .$$

С учетом формулы (7), оценок (8)-(10) и неравенства Чебышева имеем

$$P\{\tilde f > \hat f\} \le P\{C_{\tilde m} > (1+\varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{\tilde m+1}\} \le$$

$$\le P\{|C_{\tilde m} - MC_{\tilde m}| > \varepsilon_n^{(1)} \frac{n}{\tilde m+1}\} \le \frac{DC_{\tilde m}}{\left(\varepsilon_n^{(1)} \frac{n}{\tilde m+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{2n}{(\tilde m+1)(\tilde m+2)} \Big/ \left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}} \cdot \frac{n}{\tilde m+1}\right)^2 < \frac{2}{\ln n} \to 0$$

при $n \to \infty$, что и требовалось показать.

Л е м м а 2. Алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}$ дает решение задачи $\mathcal{K}(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ с таким значением целевой функции $\tilde f$, что с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, справедливы неравенства:

$$\tilde f \le m b_n^0 + (1+\varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{m+1} \quad \text{при} \quad m+1 < \sqrt{n/b_n^0}, \tag{11}$$

$$\tilde f \le (2+\varepsilon_n^{(1)}) \sqrt{n b_n^0} \quad \text{при} \quad m+1 \ge \sqrt{n/b_n^0} . \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует, что с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$,

$$\tilde f \le \tilde m b_n^0 + (1+\varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{\tilde m+1} .$$

Следовательно, при $m+1 < \sqrt{n/b_n^0}$ (т.е. при $m < m_0$) с учетом обозначения для $\tilde m$ получим справедливость первого утверждения - неравенства леммы. В случае $m+1 \ge \sqrt{n/b_n^0}$ (или, другими словами, при $m \ge m_0$), по определению, имеем $\tilde m = \lceil m_0 \rceil = \lceil \sqrt{n/b_n^0} - 1 \rceil$ и, таким образом, убеждаемся в справедливости утверждения для второго неравенства леммы:

$$\tilde f \le \lceil \sqrt{n/b_n^0} - 1 \rceil b_n^0 + (1+\varepsilon_n^{(1)}) n / \sqrt{n/b_n^0} \le$$

$$\le \sqrt{n b_n^0} + (1+\varepsilon_n^{(1)}) \sqrt{n b_n^0} = (2+\varepsilon_n^{(1)}) \sqrt{n b_n^0} .$$

З а м е ч а н и е. Из доказанных выше лемм становится ясным, что число элементов множества $\mathfrak{M}$ в алгоритме $\tilde{A}$ (см. п п. 2.2, 2.3) выбрано из экстремальных соображений, а именно: при таком выборе параметра $\tilde{m}$, как видно из формулы (7), верхняя оценка $\hat{f}$ для целевой функции, получаемой в результате работы алгоритма, при малых $\varepsilon_n^{(1)}$ близка к своему минимальному значению.

Т е о р е м а 1. Алгоритм $\tilde{A}$ решения задачи $\mathcal{K}(A_n^0, B_n^0, a_n, b_n)$, $a_n > 0$, асимптотически точен, если

$$(b_n - a_n)/a_n = o(\log_2 n), \tag{13}$$

$$B_n^0/a_n = o(n/\log_2 n). \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при $m \leq \log_2 n$ алгоритм $\tilde{A}$ находит точное решение, то для доказательства утверждения достаточно показать, что при $m > \log_2 n$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, справедливо неравенство $\tilde{L} \leq (1+\tilde{\varepsilon}_n)L^*$, где $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

С учетом преобразования (6) и очевидного неравенства $L^* \geq na_n$ имеем

$$\frac{\tilde{L}}{L^*} \leq \frac{na_n + (b_n - a_n)\tilde{f}}{na_n} = 1 + \frac{(b_n - a_n)}{na_n}\tilde{f}.$$

При $m+1 \leq \sqrt{n/b_n^0}$ с учетом неравенства (11) леммы 2, имея в виду интересующую нас область значений $m > \log_2 n$, с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, получим

$$\frac{\tilde{L}}{L^*} \leq 1 + \frac{b_n - a_n}{na_n}\left(mb_n^0 + (1+\varepsilon_n^{(1)})\frac{n}{m+1}\right) \leq 1 +$$
$$+ \frac{b_n - a_n}{na_n}\left(b_n^0 \log_2 n + (1+\varepsilon_n^{(1)})\frac{n}{\log_2 n}\right) \leq$$
$$\leq 1 + (1+\varepsilon_n^{(1)})\left(\frac{B_n^0/a_n}{n/\log_2 n} + \frac{b_n/a_n - 1}{\log_2 n}\right).$$

В случае же $m+1 \geq \sqrt{n/b_n^0}$ из неравенства (12) леммы 2 с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, следует

$$\frac{\tilde{L}}{L^*} \leq 1 + \frac{b_n - a_n}{na_n}(2+\varepsilon_n^{(1)})\sqrt{nb_n^0} \leq 1 +$$
$$+ 2(1+\varepsilon_n^{(1)})\sqrt{\frac{(b_n/a_n - 1)}{\log_2 n}\cdot\frac{B_n^0/a_n}{n/\log_2 n}} \leq$$
$$\leq 1 + (1+\varepsilon_n^{(1)})\left(\frac{b_n/a_n - 1}{\log_2 n} + \frac{B_n^0/a_n}{n/\log_2 n}\right).$$

Положив

$$\tilde{\varepsilon}_n = (1+\varepsilon_n^{(1)})\left(\frac{b_n/a_n - 1}{\log_2 n} + \frac{b_n^0/a_n}{n/\log_2 n}\right),$$

имеем неравенство $\tilde{L} \leq (1+\tilde{\varepsilon}_n)L^*$. В силу условий (13)–14) и того, что $\varepsilon_n^{(1)} = \sqrt{\ln n/n} \to 0$ при $n\to\infty$, следует, что $\tilde{\varepsilon}_n \to 0$ при $n\to\infty$. Тем самым доказана асимптотическая точность алгоритма $\tilde{A}$ в условиях сформулированной теоремы.

Следствие 1. Утверждение теоремы 1 справедливо и для класса задач стандартизации, у которых требование $F(\xi)\geq\xi$ для функции распределения заменено на условие ее вогнутости.

Действительно, можно показать, что из вогнутости $F(\xi)$ по ξ, $0\leq\xi\leq 1$, следует, что $F(\xi)\geq\xi$ для всякого $\xi\in[0,1]$. По определению вогнутой функции имеем $F(\xi)\geq(1-\alpha)F(\xi_1)+\alpha F(\xi_2)$ при $0\leq\xi_1\leq\xi\leq\xi_2\leq 1$ и $0\leq\alpha\leq 1$. Положив $\alpha=\xi$, $\xi_1=0$, $\xi_2=1$, получим

$$F(\xi)\geq(1-\xi)F(0)+\xi F(1)\geq\xi .$$

6. Перейдем к обоснованию оценок качества алгоритма на подклассе $\mathcal{K}'\subset\mathcal{K}$ задач стандартизации с равномерным распределением случайных величин $c_{ij}=(g_{ij}-a_n)/(b_n-a_n)$:

$$F(\xi)=\xi,\quad 0\leq\xi\leq 1, \tag{15}$$

и с параметрами m, n, a_n^0, удовлетворяющими следующим условиям:

$$m = o(n^\lambda); \tag{16}$$

$$a_n^0 \geq \Psi_n \ln^2 n/n, \tag{17}$$

где λ – константа, $\lambda = 1$; Ψ_n – растущая медленнее, чем n, функция: $\Psi_n\to\infty$ при $n\to\infty$, $\Psi_n = o(n)$.

Наряду с результатами, полученными выше для верхней оценки $\hat{f}$ целевой функции задачи $\mathcal{K}$, нам понадобятся некоторые нижние оценки целевой функции $\tilde{f}$ в задаче $\mathcal{K}'$. Оценочной снизу для задачи $\mathcal{K}'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$, т.е. задачи (5), (2)-(4), является двойственная к ней задача со снятием ограничений (4) на целочисленность переменных выбора x_i, $i\in m$:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j\in n} v_j \to \max_{(v_j)}; \\ &\sum_{j\in n}(v_j - c_{ij})^+ \leq c_i^0,\ i\in m, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где обозначено $(v_j - c_{ij})^+ = max(0, v_j - c_{ij})$.

Условимся искать такое допустимое (точнее, допустимое с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$) решение последней задачи, что $v_j = v$, $0 \le v \le 1$, для любого $j \in \mathcal{N}$.

Обозначим

$$Q_i(v) = \sum_{j \in \mathcal{N}} (v - c_{ij})^+, \quad i \in \mathcal{M}.$$

Нетрудно вычислить первые два момента случайной величины $Q_i(v)$:

$$MQ_i(v) = \frac{1}{2} n v^2, \; i \in \mathcal{M}; \tag{19}$$

$$DQ_i(v) = \frac{1}{3} n v^3 \left(1 - \frac{3}{4} v\right), \; i \in \mathcal{M}. \tag{20}$$

Через v_0 обозначим решение уравнения

$$MQ_i(v) + 2\sqrt{\lambda \ln n \, DQ_i(v)} = a_n^0,$$

с учетом (19), (20), имеющего вид

$$nv^2/2 + \sqrt{\lambda \ln n \, v^3 (4/3 - v)} = a_n^0. \tag{21}$$

Л е м м а 3. Для задачи из класса $\mathcal{K}'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ справедливы оценки для решения уравнения (21):

$$\sqrt{2(1 - \varepsilon_n^{(2)}) a_n^0 / n} \le v_0 \le \sqrt{2 a_n^0 / n}, \tag{22}$$

где $\varepsilon_n^{(2)} = 4\sqrt{\lambda}/(18\Psi_n)^{1/4} \to 0$ при $n \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху для v_0 следует непосредственно из уравнения (21). С ее использованием из того же уравнения имеем

$$nv_0^2/2 + \sqrt{\frac{4}{3} \lambda n \ln n \left(\frac{2a_n^0}{n}\right)^{3/2}} \ge a_n^0,$$

$$nv_0^2/2 + a_n^0 \sqrt{\frac{8 \lambda \ln n \sqrt{2}}{3 (n a_n)^{1/2}}} \ge a_n^0,$$

откуда с учетом условия (17) получаем

$$v_0 \ge \sqrt{(1 - 4\sqrt{\lambda}/(18\Psi_n)^{1/4}) \cdot 2a_n / n} = \sqrt{(1 - \varepsilon_n^{(2)}) 2 a_n^0 / n}.$$

Л е м м а 4. Вектор $(v_j), j \in \mathcal{N}$, где $v_j = v_0, j \in \mathcal{N}$, с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, допустим в задаче (18), двойственной к задаче $\mathcal{K}'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ без условия целочисленности на переменные x_i, $i \in \mathcal{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Надо показать, что

$$P\{Q_i(v_0) \le c_i^0, \; i = 1, \dots, m\} \to 1, \quad \text{при } n \to \infty.$$

С учетом независимости случайных величин $Q_i(v_0),\ i=1,\dots,m$, и неравенств $c_i^0 \geq a_n^0,\ i=1,\dots,m$, имеем:

$$P\{Q_i(v_0)\leq c_i^0,\ i=1,\dots,m\} \geq P\{Q_i(v_0)\leq a_n^0,\ i=1,\dots,m\} =$$

$$=\left(P\{Q_1(v_0)\leq a_n^0\}\right)^m = \left(1-P\{Q_1(v_0)>a_n^0\}\right)^m \geq$$

$$\geq 1-mP\{Q_1(v_0)>a_n^0\}.$$

Таким образом, для доказательства справедливости утверждения леммы достаточно показать, что

$$mP\{Q_1(v_0)>a_n^0\} \longrightarrow 0 \quad \text{при } n\to\infty. \tag{23}$$

Для этого воспользуемся следующим результатом из теории оценивания сумм независимых случайных величин:

Т е о р е м а В.В.Петрова [8]. Пусть $\eta_1,\dots,\eta_n$ – независимые случайные величины с $M\eta_j=0,\ j=1,\dots,n$, и для некоторых T и h_j, $j=1,\dots,n$, при любых $t,\ 0\leq t\leq T$, выполнено

$$Me^{t\eta_j}\leq e^{\frac{1}{2}h_j t^2},\quad j=1,\dots,n. \tag{24}$$

Тогда имеют место неравенства:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}\eta_j\geq\theta\right\}\leq \begin{cases} \exp(-0{,}5\,\theta^2/H) & \text{при } \theta\leq HT,\\ \exp(-\theta T/2) & \text{при } \theta>HT,\end{cases} \tag{25}$$

где $H=\sum_{j=1}^{n}h_j$.

Введем обозначения для случайных величин $\eta_j=\dfrac{(v_0-\xi)^+-v_0^2/2}{\sigma}$, $j=1,\dots,n$, где независимые случайные величины $\xi_j,\ j=1,\dots,n$, имеют функцию распределения $F(\xi)=\xi,\ 0\leq\xi\leq 1$; $\sigma=\sqrt{D(v_0-\xi)^+}=\sqrt{v_0^3(1-0{,}75\,v_0)/3}$; $M(v_0-\xi)^+=v_0^2/2$. Очевидно, $M\eta_j=0$, $D\eta_j=1\ (j=1,\dots,n)$.

Покажем, что условия теоремы Петрова выполнены для независимых случайных величин $\eta_j,\ j=1,\dots,n$, при $h_j=2,\ j=1,\dots,n$, и $T=0{,}5\,\sigma/v_0$.

Оценим величину $Me^{t\eta_j}$ в левой части неравенства (24):

$$Me^{t\eta_j} = M\exp\left\{\frac{(v_0-\xi)^+ - v_0^2/2}{\sigma}\, t\right\} =$$

$$= e^{-\frac{v_0^2 t}{2\sigma}} M\left\{e^{(v_0-\xi_j)^+ t/\sigma}\right\} = e^{-\frac{v_0^2 t}{2\sigma}}\left\{\int_0^{v_0} e^{\frac{v_0-\xi}{\sigma}t} d\xi + 1 - v_0\right\} =$$

$$= e^{-\frac{v_0\gamma}{2}}\left\{1 + v_0(e^{\gamma} - 1 - \gamma)/\gamma\right\},$$

где $\gamma = v_0 t/\sigma \le v_0 t/\sigma = 1/2$. Далее, имеем

$$Me^{t\eta_j} = e^{-\frac{v_0\gamma}{2}}\left\{1 + \frac{v_0}{\gamma}\sum_{K=2}^{\infty}\frac{\gamma^K}{K!}\right\} = e^{-\frac{v_0\gamma}{2}}\left(1 + \frac{v_0\gamma}{2} + v_0\sum_{K=2}^{\infty}\frac{\gamma^K}{(K+1)!}\right) =$$

$$= e^{-\frac{v_0\gamma}{2}}\left(e^{\frac{v_0\gamma}{2}} - \sum_{K=2}^{\infty}\frac{(v_0\gamma/2)^K}{K!} + v_0\sum_{K=2}^{\infty}\frac{\gamma^K}{(K+1)!}\right) =$$

$$= 1 + e^{-v_0\gamma/2}\cdot v_0\sum_{K=2}^{\infty}\gamma^K\frac{1-(K+1)v_0^{K-1}/2^K}{(K+1)!} \le 1 + v_0\gamma^2\sum_{K=0}^{\infty}C_K\gamma^K,$$

где обозначено

$$C_K = \frac{1-(K+3)v_0^{K+1}/2^{K+2}}{(K+3)!}, \quad K = 0, 1, \ldots$$

Покажем, что последовательность $\{C_K\}$, $K = 0, 1, \ldots,$ - невозрастающая. Предположим противное: найдется номер $K \geqslant 1$, при котором $C_{K-1} < C_K$. Из этого вытекает эквивалентное неравенство $2^{K+1} < (K+3)\, v_0^K \left(1 - \frac{v_0}{2(K+2)}\right)$, откуда следует противоречивое при $K \geqslant 1$ неравенство $2^{K+1} < K+3$. Итак, можно воспользоваться неравенством $C_K \le C_0 = (1 - \frac{3}{4}v_0)/6$ для любого $K = 1, 2, \ldots$ и продолжить оценку для $Me^{t\eta_j}$:

$$Me^{t\eta_j} \le 1 + v_0 C_0\gamma^2\sum_{K=0}^{\infty}\gamma^K = 1 + \frac{\gamma_0 C_0\gamma^2}{1-\gamma} =$$

$$= 1 + \frac{v_0(1-0{,}75\, v_0)}{6(1-\gamma)}\cdot\left(\frac{v_0 t}{\sigma}\right)^2 = 1 + \frac{t^2}{2(1-\gamma)}\ .$$

Окончательно, учитывая, что $\gamma \le 1/2$ и $h_j = 2$, имеем

$$Me^{t\eta_j} \le 1 + t^2 \le e^{t^2} = e^{\frac{1}{2}h_j t^2},$$

т.е. справедливость неравенства (24) доказана.

Представим теперь левую часть в (23) в эквивалентном виде:

$$m P\left\{\frac{Q_1(v_0)-nv_0^2/2}{\sigma} > \frac{a_n^0-nv_0^2/2}{\sigma}\right\} =$$

$$= m P\left\{\sum_{j=1}^{n}\eta_j > 2\sqrt{\lambda n \ln n}\right\}.$$

Покажем, что $\theta = 2\sqrt{\lambda n \ln n} \le HT$. Поскольку $H=2n$, $T=\sigma/2v_0$, то неравенство

$$2\sqrt{\lambda n \ln n} \le HT = \frac{n\sigma}{v_0} = n\sqrt{\frac{v_0}{3}\left(1-\frac{3}{4}v_0\right)}$$

или

$$v_0\left(1-\frac{3}{4}v_0\right) \ge 12\lambda\frac{\ln n}{n}$$

справедливо при $24\lambda \ln n/n \le v_0 \le 1$, но при достаточно больших n неравенство $v_0 \ge 24\lambda \ln n/n$ выполняется, так как из леммы 3 с учетом условия (17) на класс задач $\mathcal{K}'$ следует, что

$$v_0 \ge \sqrt{(1-\varepsilon_n^{(2)})2a_n^0/n} \ge \sqrt{(1-\varepsilon_n^{(2)})\frac{2\psi_n \ln^2 n}{n^2}} = \sqrt{2(1-\varepsilon_n^{(2)})\psi_n}\cdot\frac{\ln n}{n},$$

а при достаточно больших n неравенство $\sqrt{2(1-\varepsilon_n^{(2)})\psi_n} \ge 24\lambda$ справедливо в силу $\psi_n \to \infty$, $\varepsilon_n^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Окончательно из теоремы Петрова и условия (16) на класс задач $\mathcal{K}'$ получаем:

$$m P\left\{\sum_{j=1}^{n}\eta_j > 2\sqrt{\lambda n \ln n}\right\} \le m\exp\left(-\frac{4\lambda n \ln n}{4n}\right) = \frac{m}{n^\lambda} \to 0$$

при $n \to \infty$. Тем самым лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. Для задачи из класса $\mathcal{K}'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, справедлива следующая нижняя оценка целевой функции:

$$f^* \ge \sqrt{2(1-\varepsilon_n^{(2)})na_n^0}\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидным образом следует из неравенства

$$f^* \ge \max\left\{\sum_{j=1}^{n} v_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n}(v_j - c_{ij})^+ \le c_i^0,\ i=1,\dots,m\right\}$$

и лемм 3 и 4.

Л е м м а 6. Для задачи из класса $\mathcal{K}'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ при $m+1 \le \sqrt{\rho n/a_n^0}$, ρ - константа, $0<\rho\le 1$, в качестве характеристик качества алгоритма $\tilde{A}$ можно указать оценки $\tilde{\varepsilon}_n \to \rho$, $\tilde{\delta}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Справедливо очевидное неравенство $f^* \geqslant a_n^0 + C_m$, где

$$C_m = \sum_{j \in n} \min_{1 \leq i \leq m} c_{ij} -$$

случайная величина с $M\,C_m = n/(m+1)$ и $D\,C_m = mn/((m+2)(m+1)^2)$ (см. [9, с. 49]). Легко показать, что

$$f^* \geqslant a_n^0 + (1 - \varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{m+1}, \tag{26}$$

где $\varepsilon_n^{(1)} = \sqrt{\ln n / n}$, с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$. Действительно, вероятность противоположного события стремится к нулю с ростом n:

$$P\left\{f^* < a_n^0 + (1 - \varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{m+1}\right\} \leq P\left\{C_m < (1 - \varepsilon_n^{(1)}) M\,C_m\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{|C_m - MC_m| > \varepsilon_n^{(1)} M\,C_m\right\} \leq$$

$$\leq \frac{DC_m}{(\varepsilon^{(1)} MC_m)^2} = \frac{mn}{\frac{\ln n}{n}\left(\frac{n}{m+1}\right)^2 (m+2)(m+1)^2} < \frac{1}{\ln n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

С учетом оценки (26) и неравенства (11) леммы 2 получаем

$$\frac{\tilde{f}}{f^*} \leq \frac{m b_n^0 + (1 + \varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{m+1}}{a_n^0 + (1 - \varepsilon_n^{(1)}) \frac{n}{m+1}} \leq \frac{(m+1)^2 b_n^0 / n + 1 + \varepsilon_n^{(1)}}{1 - \varepsilon_n^{(1)}} \leq$$

$$\leq \frac{\rho + 1 + \varepsilon_n^{(1)}}{1 - \varepsilon_n^{(1)}} = 1 + \frac{\rho + 2\varepsilon_n^{(1)}}{1 - \varepsilon_n^{(1)}} = 1 + \tilde{\varepsilon}_n .$$

Итак, получены оценки качества алгоритма $\tilde{A}$ с нужными свойствами:

$$\tilde{\varepsilon}_n = \frac{\rho + 2\varepsilon_n^{(1)}}{1 - \varepsilon_n^{(1)}} \to \rho, \quad \tilde{\delta}_n = \frac{1}{\ln n} \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty .$$

Следствие 2. Относительное значение целевой функции $\tilde{f}/f^*$, полученное алгоритмом $\tilde{A}$ для задачи из класса $\mathcal{K}'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$, с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, ограничено сверху величиной $\tilde{\tau}_f$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\tau}_f = \begin{cases} 3/2 & \text{при} \quad m+1 \le \sqrt{0{,}5n/b_n^0}\,; \\ \sqrt{2} & \text{при} \quad m+1 \le \sqrt{(\sqrt{2}-1)n/b_n^0}\,. \end{cases}$$

Две числовые последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ называют эквивалентными, если $\xi_n/\eta_n \to 1$ при $n\to\infty$, обозначая это символом $\xi_n \sim \eta_n$. Обозначим также $\alpha_n = B_n^0/A_n^0$.

Лемма 7. Алгоритм $\tilde{A}$, примененный к задаче из класса $K'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$, при $m+1 > \sqrt{0{,}5n/b_n^0}$ и $m < m_0$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, дает отношение $\tilde{f}/f^* \le \tilde{\tau}_f \sim 1{,}5\sqrt{\alpha_n}$.

Доказательство. Из леммы 2 и 5 следует, что с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$,

$$\frac{\tilde{f}}{f^*} \le \frac{m b_n^0 + (1+\varepsilon_n^{(1)})\frac{n}{m+1}}{\sqrt{(1-\varepsilon_n^{(1)})\cdot 2n a_n^0}} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{0{,}5n/b_n^0}\cdot b_n^0 + \dfrac{(1+\varepsilon_n^{(1)})n}{\sqrt{0{,}5n/b_n^0}}}{\sqrt{(1-\varepsilon_n^{(1)})2n a_n^0}} =$$

$$= \frac{3/2+\varepsilon_n^{(1)}}{1-\varepsilon_n^{(1)}}\sqrt{\alpha_n} \sim 1{,}5\sqrt{\alpha_n}\,.$$

Лемма 8. Применение алгоритма $\tilde{A}$ к задаче из класса $K'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ в случае $m \ge m_0$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, дает решение с таким значением целевой функции $\tilde{f}$, что

$$\tilde{f}/f^* \le \tilde{\tau}_f \sim \sqrt{2\alpha_n}\,.$$

Доказательство. С учетом неравенства (12) в лемме 2 и леммы 5 имеем

$$\frac{\tilde{f}}{f^*} \le \frac{(2+\varepsilon_n^{(1)})\sqrt{n b_n^0}}{\sqrt{(1-\varepsilon_n^0)2n a_n^0}} = \frac{1+0{,}5\varepsilon_n^{(1)}}{(1-\varepsilon^{(2)})^{1/2}}\sqrt{2\alpha_n} \sim \sqrt{2\alpha_n}$$

с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$.

Из лемм 7 и 8 и следствия 2 вытекает следующая

Теорема 2. Применение алгоритма $\tilde{A}$ к задаче из класса $K'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ гарантирует отношение $\tilde{f}/f^*$, которое с вероятностью, стремящейся к 1 при $n\to\infty$, не превосходит величины $\tilde{\tau}_f \sim 1{,}5\sqrt{\alpha_n}$.

Используя оценки качества алгоритма $\tilde{A}$, доказанные выше для задачи $K'(a_n^0, b_n^0, 0, 1)$ с нормализованными входными данными, можно получить аналогичные результаты для задачи из класса $K'(A_n^0, B_n^0, a_n, b_n)$:

Т е о р е м а 3. Применение алгоритма $\tilde{A}$ к задаче из класса $K'(A_n^0, B_n^0, a_n, b_n)$ дает отношение $\tilde{L}/L^*$ с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, ограниченное величиной $\tilde{\tau}_L \sim 1{,}5\sqrt{\alpha_n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оценки отношения $\tilde{L}/L^*$ воспользуемся преобразованием (6) и неравенством $\tilde{f} \geqslant f^*$:

$$\frac{\tilde{L}}{L^*} = \frac{na_n + (b_n - a_n)\tilde{f}}{na_n + (b_n - a_n)f^*} \leq \frac{na_n \tilde{f}/f^* + (b_n - a_n)\tilde{f}}{na_n + (b_n - a_n)f^*} \leq \frac{\tilde{f}}{f^*},$$

откуда с учетом теоремы 2 с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$, имеет место

$$\frac{\tilde{L}}{L^*} \leq \tilde{\tau}_f = \tilde{\tau}_L \sim 1{,}5\sqrt{\alpha_n}.$$

З а м е ч а н и е. В случае величины $m+1$, не входящей в интервал $(\beta m_0, m_0)$, $\beta = \sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0{,}63$, константа 1,5 в утверждениях теорем 2 и 3 может быть уменьшена до $\sqrt{2}$.

Непосредственно из последних теорем в качестве следствия вытекает следующая практически важная

Т е о р е м а 4. Для алгоритма $\tilde{A}$, применяемого к задаче стандартизации из класса K' с одинаковыми компонентами вектора $(g_i^0), i \in M$: $g_i^0 = g^0$, $i = 1,\dots,m$, справедливы оценки $\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{\delta}_n$, асимптотически равные 1/2 и 0:

$$\tilde{\varepsilon}_n \to 1/2, \quad \tilde{\delta}_n \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

З а м е ч а н и е. Понятно, что в случае одинаковых g_i^0, $i \in M$, в п. 2.2 второго этапа алгоритма $\tilde{A}$ в множество $\tilde{M}$ можно включить произвольные $\tilde{m}$ элементов множества M.

Поступила в ред.-изд. отдел
2 сентября 1986 г.

Л и т е р а т у р а

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. - Новосибирск: Наука. - 1978. - 333 с.

2. Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем // Кибернетический сборник. - М.: Мир, 1975. - С. 16-38.

3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 416 с.

4. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации. // Проблемы кибернетики. - М.: Наука, 1975. - Вып. 31. - С. 35-42.

5. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера. // Управляемые системы. - Новосибирск, 1974.-Вып.12.- С. 35-45.

6. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В. Асимптотически точный подход к решению одномерной задачи упаковки в контейнеры.// Дискретные задачи оптимизации (Управляемые системы). - Новосибирск, 1984. - Вып. 25.- С. 48-57.

7. Гимади Э.Х. Задача размещения на сети с центрально-связными областями обслуживания // Там же. - С. 38-47.

8. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. - М.: Наука, 1972. - 416 с.

9. Дейвид Г. Порядковые статистики. - М.: Наука, 1979. - 336 с.