Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1985 г., вып. 26

УДК 519.1

# СЛОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С ПРЕДПИСАНИЕМ НА ГРАФАХ С МАЛЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕРШИН

А.И.Сердюков

Рассматривается $n$-вершинный неориентированный (ориентированный) граф $G=(X,\mathcal{U})$ с определенной вещественной весовой функцией $\rho: \mathcal{U} \to R$ на элементах множества $\mathcal{U}$. Пусть на множестве вершин $X$ задана система подмножеств $X^i \subseteq X$, $|X^i| \leq k$, $1 \leq i \leq n$, $\bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} X^i = X$, для некоторого натурального $K \leq n$. Обозначим через $\mathcal{F} = \{f\}$ множество взаимно-однозначных отображений из $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ в $X$ таких, что $f(i) \in X^i$, $(f(i), f(j)) \in \mathcal{U}$, $1 \leq i \leq n$, $j \equiv i+1 \pmod{n}$, для любого $f \in \mathcal{F}$. Задача состоит в выборе такого элемента $f_0 \in \mathcal{F}$, для которого

$$\rho(f_0) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \equiv i+1 \pmod{n}}} \rho(f_0(i), f_0(j)) = \min_{f \in \mathcal{F}} \rho(f).$$

(Задача в такой постановке рассмотрена в [1, 2], где называется $K$-задачей коммивояжера.) Если при этом для некоторого натурального $S \leq n-1$ выполняется

$$S \geq \max_{x \in X} \begin{cases} d_x, & \text{граф } G \text{ неориентированный}, \\ \max\{d_x^+, d_x^-\}, & \text{граф } G \text{ ориентированный}, \end{cases}$$

где $d_x, d_x^+, d_x^-$ – степень, полустепень исхода, полустепень захода вершины $x \in X$, соответственно, то поставленную задачу назовем $(K,S)$-задачей.

В [1, 4] установлено, что $(K,S)$-задача является $NP$-трудной в случаях:

1) $k \geq 2$, $S = n-1$, граф $G$ неориентированный (ориентированный);
2) $k = n$, $S \geq 3$, граф $G$ неориентированный.

В [2] предложен алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ операций для нахождения допустимого решения $(k,S)$-задачи в неориентированном (ориентированном) графе $G$ при $k \leq 2$, $S \leq n-1$.

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В §§ 1–2 вводится определенный подкласс индивидуальных $(2,2)$-задач на ориентированных графах и изучаются его свойства (леммы 1–5), позволяющие установить $NP$-трудность $(k,S)$-задачи при $2 \leq k \leq n$, $2 \leq S \leq n-1$ $(3 \leq S \leq n-1)$ на ориентированном (неориентированном) графе $G$ (лемма 6, теорема и ее следствия). При остальных парах значений $k$ и $S$ задача тривиальна и не представляет интереса.

## § 1. Описание одного класса графов. Некоторые свойства таких графов

Рассмотрим множество $X^{(\ell)}$ мощности $n=\ell\cdot(2\ell-1)$ для некоторого натурального $\ell$:

$$X^{(\ell)}=\{(i,j,\kappa)/1\le i,j\le \ell,\ i\ne j,\ \kappa\in\{0,1\}\}\cup\{y_i/1\le i\le \ell\}. \tag{1}$$

Построим $n$-вершинный ориентированный граф $G^{(\ell)}=(X^{(\ell)},\mathcal{U}^{(\ell)})$ с множеством дуг $\mathcal{U}^{(\ell)}=\mathcal{U}_1^{(\ell)}\cup\mathcal{U}_2^{(\ell)}\cup\mathcal{U}_3^{(\ell)}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1^{(\ell)}=&\{((i,j,\kappa_1),(i,j,\kappa_2))/1\le i<j\le \ell,\ i+j\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),\ \kappa_1\in\{0,1\},\ \kappa_2\in\{0,1\}\}\cup\\ \cup&\{((i,j,\kappa_1),(j,i,\kappa_2))/1\le j<i\le \ell,\ i+j\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ \kappa_1\in\{0,1\},\ \kappa_2\in\{0,1\}\};\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_2^{(\ell)}=&\{((i,j,\kappa_1),(i,j+1,\kappa_2))/1<j+1<i\le \ell,\ i+j\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),\ \kappa_1\ne\kappa_2\}\cup\\ \cup&\{((i,j,\kappa_1),(i,j-1,\kappa_2))/1<j<i\le \ell,\ i+j\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),\ \kappa_1\ne\kappa_2\}\cup\\ \cup&\{((i,j+1,\kappa_1),(i,j,\kappa_2))/1\le i<j<\ell,\ i+j\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),\ \kappa_1\ne\kappa_2\}\cup\\ \cup&\{((i,j-1,\kappa_1),(i,j,\kappa_2))/1\le i<j-1<\ell,\ i+j\equiv 1(\mathrm{mod}\,2),\ \kappa_1\ne\kappa_2\}\cup\\ \cup&\{((i,i-1,\kappa_1),(i,i+1,\kappa_2))/1<i<\ell,\ \kappa_1\ne\kappa_2\};\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_3^{(\ell)}=&\{((2i,1,\kappa),y_i),(y_i(2i+1,1,\kappa))/\kappa\in\{0,1\},\ 1\le i\le \tfrac{\ell-1}{2}\}\cup\\ \cup&\{((2i-1,\ell,\kappa),y_{\frac{\ell-1}{2}+i}),(y_{\frac{\ell-1}{2}+i},(2i,\ell,\kappa))/\kappa\in\{0,1\},\ 1\le i\le\tfrac{\ell-1}{2}\}\cup\\ \cup&\{((\ell,\ell-1,\kappa),y_\ell),(y_\ell,(1,2,\kappa))/\kappa\in\{0,1\}\},\ \ell\equiv 1(\mathrm{mod}\,2);\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_3^{(\ell)}=&\{((2i,1,\kappa),y_i),(y_i(2i+1,1,\kappa))/\kappa\in\{0,1\},\ 1\le i<\ell/2\}\cup\\ \cup&\{((2i,\ell,\kappa),y_{\ell/2+i}),(y_{\ell/2+i},(2i+1,\ell,\kappa))/\kappa\in\{0,1\},\ 1\le i<\ell/2\}\cup\\ \cup&\{((\ell,1,\kappa),y_{\ell/2}),(y_{\ell/2},(1,\ell,\kappa))/\kappa\in\{0,1\}\}\cup\\ \cup&\{((\ell,\ell-1,\kappa),y_\ell),(y_\ell,(1,2,\kappa))/\kappa\in\{0,1\}\},\ \ell\equiv 0(\mathrm{mod}\,2).\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим некоторые свойства графа $G^{(\ell)}$. Справедлива

Л е м м а 1. Полустепени исхода и захода для каждой вершины графа $G^{(\ell)}$ равны двум.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для вершин из множества $\{y_i / 1 \le i \le \ell\}$ утверждение очевидно. Проверим утверждение для вершин из множества $\{(i,j,\kappa) / 1 \le i, j \le \ell, i \ne j, \kappa \in \{0,1\}\}$. Например, рассмотрим вершину $(i,j,\kappa) \in X^{(\ell)}$ типа

$$1 \le j < i \le \ell, \; i+j \equiv 1 (mod 2), \; \kappa = 0. \tag{6}$$

Тогда, используя (2)-(5), получим

$$\mathcal{U}_1^{(\ell)} \cap \{((i,j,0), x) / x \in X^{(\ell)}\} = \emptyset, \tag{7}$$

$$\mathcal{U}_3^{(\ell)} \cap \{((i,j,0), x) / x \in X^{(\ell)}\} = \tag{8}$$

$$= \begin{cases} \{((i,j,0), y_\ell), & j \ne 1, \; i = j+1 = \ell, \\ \{((i,j,0), y_{i/2}), & j = 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_2^{(\ell)} \cap \{((i,j,0), x) / x \in X^{(\ell)}\} =$$

$$= \begin{cases} \{((i,j,0),(i,j \pm 1,1))\}, & j \ne 1, \; i \ne j+1, \\ \{((i,j,0),(i,j+2,1)),((i,j,0),(i,j-1,1))\}, & j \ne 1, \; i = j+1 \ne \ell, \\ \{((i,j,0),(i,j-1,1))\}, & j \ne 1, \; i = j+1 = \ell, \\ \{((i,j,0),(i,j+1,1))\}, & j = 1, \; i \ne j+1, \\ \{((i,j,0),(i,j+2,1))\}, & j = 1, \; i = 2 \end{cases} \tag{9}$$

$$(\mathcal{U}_2^{(\ell)} \cup \mathcal{U}_3^{(\ell)}) \cap \{(x,(i,j,0)) / x \in X^{(\ell)}\} = \emptyset, \tag{10}$$

$$\mathcal{U}_1^{(\ell)} \cap \{(x,(i,j,0)) / x \in X^{(\ell)}\} = \{((j,i,\kappa),(i,j,0)) / \kappa \in \{0,1\}\}. \tag{11}$$

Теперь, сравнивая (7)-(11), убеждаемся в справедливости утверждения для вершин типа (6). Для оставшихся вершин множества (1) рассуждения аналогичные.

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. В графе $G^{(\ell)}$ существует гамильтонов контур $L_0^{(\ell)}$, в котором порядок прохождения вершин $y_i$ монотонный по $i$, $1 \le i \le n$, и

$$L_0^{(\ell)} \cap \mathcal{U}_1^{(\ell)} = \{u = ((i,j,\kappa),(j,i,\kappa)) / u \in \mathcal{U}_1^{(\ell)},\ \kappa \in \{0,1\}\}. \tag{12}$$

Доказательство проведем методом математической индукции по $\ell$. При $\ell = 2$ рассмотрим контур $L_0^{(2)} = ((1,2,0),(2,1,0),y_1,(1,2,1),(2,1,1),y_2)$, который удовлетворяет условиям леммы. Предположим, что лемма справедлива при всех $\ell \le \ell_0$. Положим $\ell = \ell_0 + 1$. Возможны два случая: а) $\ell_0 \equiv 0 (mod 2)$; б) $\ell_0 = 1 (mod 2)$.

Случай "а". Представим гамильтонов контур $L_0^{(\ell)}$ в виде $L_0^{(\ell)} = (\tilde{L}_0, y_{\ell_0/2}, \tilde{L}_1, y_{\ell_0/2+1}, \dots, \tilde{L}_{\ell_0/2}, y_{\ell_0})$. Рассмотрим множество вершин $(X^{(\ell)} \setminus X^{\ell_0}) \cup \{y_i / \ell_0/2 \le i \le \ell_0\}$. На этом множестве вершин с учетом (2)-(4) построим $\ell_0/2+1$ путей $\{L_i / 0 \le i \le \ell_0/2\}$, лежащих в $G^{(\ell)}$ и попарно изолированных друг от друга:

$$L_0 = (y_{\ell_0/2}, (\ell,1,0), (1,\ell,0));$$

$$L_i = ((2i,\ell,0),(\ell,2i,0),(\ell,2i-1,1),(2i-1,\ell,1), y_{\ell_0/2+i},$$

$$(2i,\ell,1),(\ell,2i,1),(\ell,2i+1,0),(2i+1,\ell,0)),\ 1 \le i < \ell_0/2;$$

$$L_{\ell_0/2} = ((\ell_0,\ell,0),(\ell,\ell_0,0),(\ell,\ell_0-1,1)(\ell_0-1,\ell,1), y_{\ell_0}, (\ell_0,\ell,1),(\ell,\ell_0,1), y_\ell).$$

В этом случае, как нетрудно заметить, последовательность путей

$$L_0^{(\ell)} = (\tilde{L}_0, L_0, \tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{\ell_0/2}, L_{\ell_0/2})$$

образует искомый гамильтонов контур в $G^{(\ell)}$.

Случай "б". Положим

$$L_0^{(\ell_0)} = (\tilde{L}_0, y_{\ell/2}, \tilde{L}_1, y_{\ell/2+1}, \dots, \tilde{L}_{\ell/2-1}, y_{\ell_0}).$$

На множестве вершин $(X^{(\ell)} \setminus X^{(\ell_0)}) \cup \{y_i / \ell/2 \le i \le \ell_0\}$ с учетом (2), (3), (5) построим $\ell/2$ путей $\{L_i / 1 \le i \le \ell/2\}$, лежащих в $G^{(\ell)}$ и попарно изолированных друг от друга:

$$L_1 = ((1,\ell,0),(\ell,1,0), y_{\ell/2}, (1,\ell,1),(\ell,1,1),(\ell,2,0),(2,\ell,0));$$

$$L_i = ((2i-1,\ell,0),(\ell,2i-1,0),(\ell,2i-2,1),(2i-2,\ell,1), y_{\ell/2+i-1},$$

$$(2i-1,\ell,1),(\ell,2i-1,1),(\ell,2i,0)),\ 2 \le i < \ell/2;$$

$$L_{\ell/2} = ((\ell_0,\ell,0),(\ell,\ell_0,0),(\ell,\ell_0-1,1),(\ell_0-1,\ell,1), y_{\ell-1}, (\ell_0,\ell,1),(\ell,\ell_0,1), y_\ell).$$

Тогда контур

$$L_0^{(\ell)} = (\tilde{L}_0, L_1, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{\ell/2-1}, L_{\ell/2})$$

является гамильтоновым в $G^{(\ell)}$ и удовлетворяет условиям леммы.

Итак, в обоих случаях на шаге $\ell$ выполнены индукционные предположения. Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е. Доказательство леммы 2 содержит в себе полиномиальный алгоритм, однозначно строящий контур $L_0^{(\ell)}$.

Л е м м а 3. При $\ell \geqslant 3$ для любой тройки натуральных чисел $i_0 \leq \ell$, $j_1 \leq \ell$, $j_2 \leq \ell$, удовлетворяющей одному из условий: а) $j_1 + 1 = j_2 < i_0$; в) $i_0 < j_1 = j_2 - 1$; с) $j_1 + 2 = i_0 + 1 = j_2$, выполнено соотношение

$$L_0^{(\ell)} \cap \{((i_0, j_1, 0), (i_0, j_2, 1)), ((i_0, j_1, 1), (i_0, j_2, 0)),$$
$$((i_0, j_2, 0), (i_0, j_1, 1)), ((i_0, j_2, 1), (i_0, j_1, 0))\} \neq \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем при помощи математической индукции по $\ell$. При $\ell = 3$ контур $L_0^{(3)}$ имеет вид

$$((1,2,0), (2,1,0), y_1, (3,1,0), (1,3,0), (1,2,1), (2,1,1), (2,3,0),$$
$$(3,2,0), (3,1,1), (1,3,1), y_2, (2,3,1), (3,2,1), y_3)$$

и удовлетворяет условиям леммы. Пусть лемма справедлива при всех $3 \leq \ell \leq \ell_0$. Положим $\ell = \ell_0 + 1$. Возможны три случая.

1. $i_0 < \ell$, $j_2 < \ell$. Поскольку контур $L_0^{(\ell_0)}$ удовлетворяет условиям леммы, то в этом случае все необходимые дуги для выполнения индукционных предположений на шаге $\ell$ содержатся в путях $\{\tilde{L}_i\}$.

2. $i_0 = \ell$, $j_2 < \ell$. В этом случае все необходимые дуги для выполнения условий леммы на шаге $\ell$ содержатся в путях $\{L_i\}$.

3. $i_0 < \ell$, $j_2 = \ell$. При этом условии все необходимые дуги возникают в контуре $L_0^{(\ell)}$ при стыковке элементарных путей $\{\tilde{L}_i\}$ и $\{L_i\}$.

Итак, на шаге $\ell$ индукционные предположения выполнены во всех трех случаях.

Лемма 3 доказана.

## § 2. Описание множества отображений из $\mathcal{F}^{(\ell)}$. Их свойства. Постановка (2,2)-задачи коммивояжера на графе $G^{(\ell)}$

Рассмотрим взаимно-однозначное отображение $f_* : X_n = \{1, 2, \ldots, n\} \to X^{(\ell)}$, где $f_*(i)$ – $i$-я по порядку вершина в контуре $L_0^{(\ell)}$, при этом $f_*(1) = (1,2,0)$. Построим систему подмножеств $X^i \subset X^{(\ell)}$, $|X^i| \leq 2$, $1 \leq i \leq n$, $\bigcup_{1 \leq i \leq n} X^i = X^{(\ell)}$ вида

$$X^{f_*^{-1}(i,j,1)} = X^{f_*^{-1}(i,j,0)} = \{(i,j,1), (i,j,0)\}, \ 1 \leq i, j \leq \ell, \ i \neq j, \quad (13)$$
$$X^{f_*^{-1}(y_i)} = y_i, \ 1 \leq i \leq \ell.$$

Пусть $\mathcal{F}^{(\ell)}=\{f\}$ – множество взаимно-однозначных отображений из $X_n$ в $X^{(\ell)}$ таких, что

$$f(i)\in X^{i},\ (f(i),f(j))\in \mathcal{U}^{(\ell)},\ 1\le i\le n,\ j\equiv i+1\ (mod\ n) \tag{14}$$

для любого $f\in \mathcal{F}^{(\ell)}$

Опишем некоторые свойства этих отображений.

Лемма 4. Для любых фиксированных $f\in\mathcal{F}^{(\ell)}$ и $i_0\le \ell$ верно одно из двух:

либо при любых $K_0\in\{0,1\}$, $j_0\ne i_0$, $1\le j_0\le \ell$, выполняется

$$f\circ f_*^{-1}(i_0,j_0,K_0)=(i_0,j_0,K_0), \tag{15}$$

либо при любых $K_0\in\{0,1\}$, $j_0\ne i_0$, $1\le j_0\le \ell$, выполняется

$$f\circ f_*^{-1}(i_0,j_0,K_0)=(i_0,j_0,\bar K_0),\ \bar K_0=1-K_0. \tag{16}$$

Доказательство. Предположим противное: существуют $j_0\ne i_0$, $j_1\ne i_0$, $1\le j_0$, $j_1\le \ell$, $K_0\in\{0,1\}$, такие, что

$$f\circ f_*^{-1}(i_0,j_0,K_0)=(i_0,j_0,K_0),$$

$$f\circ f_*^{-1}(i_0,j_1,K_0)=(i_0,j_1,\bar K_0),\ \bar K_0=1-K_0.$$

Без ограничений общности положим, что тройка чисел $i_0$, $j_0$, $j_1$ удовлетворяет одному из условий леммы 3. Тогда, по лемме 3,

$$L_0^{(\ell)}\cap\{((i_0,j_0,K),(i_0,j_1,\bar K)),\ ((i_0,j_1,K),(i_0,j_0,\bar K))\,/\,K\in\{0,1\}\}\ne\varnothing.$$

Рассмотрим вариант $((i_0,j_0,K),(i_0,j_1,\bar K))\in L_0^{(\ell)}$ (доказательство при другом варианте аналогичное). По определению $f_*$ имеем

$$f_*(i_0,j_0,K)+1\equiv f_*(i_0,j_1,\bar K)\ (mod\ n),$$

или, учитывая (14),

$$(f\circ f_*^{-1}(i_0,j_0,K),\ f\circ f_*^{-1}(i_0,j_1,\bar K))\in \mathcal{U}^{(\ell)}.$$

Далее, учитывая основное предположение, получим

$$((i_0,j_0,K),(i_0,j_1,K))\in \mathcal{U}^{(\ell)}.$$

Последнее соотношение противоречит определению $\mathcal{U}^{(\ell)}$.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если отображение $f: X_n \to X^{(\ell)}$ таково, что $f \circ f_*^{-1}(y_i) = y_i$, $1 \le i \le n$, и при любом $i_0 \le \ell$ выполняется либо (15), либо (16), то $f \in \mathcal{F}^{(\ell)}$.

Доказательство. Очевидно, что $f(i) \in X^i$, $1 \le i \le n$, и $f$ – взаимно-однозначное. Предположим, что $f \notin \mathcal{F}^{(\ell)}$. Тогда существует $i_1 \le n$ такое, что

$$(f(i_1),\ f(j_1)) \notin \mathcal{U}^{(\ell)},\ j_1 \equiv i_1 + 1 (mod\, n). \qquad (17)$$

Поскольку $(f_*(i_1), f_*(j_1)) \in \mathcal{U}^{(\ell)}$, то возможны три варианта:
а) $(f_*(i_1), f_*(j_1)) \in \mathcal{U}_1^{(\ell)}$; в) $(f_*(i_1), f_*(j_1)) \in \mathcal{U}_2^{(\ell)}$; с) $(f_*(i_1), f_*(j_1)) \in \mathcal{U}_3^{(\ell)}$.

Случай "а". Пусть $f_*(i_1) = (i, j, k_1)$, $f_*(j_1) = (j, i, k_1)$.

$$f(i_1) = f \circ f_*^{-1}(i,j,k_1) = (i,j,k_2),\ f_*(j_1) = f \circ f_*^{-1}(j,i,k_1) = (j,i,k_3).$$

По определению $\mathcal{U}_1^{(\ell)}$ дуги $((i,j,k_1),(j,i,k_1))$ и $((i,j,k_2),(j,i,k_3))$ могут только одновременно принадлежать $\mathcal{U}_1^{(\ell)}$. Таким образом, в случае "а" имеем противоречие с (17).

Случай "в". Пусть $f_*(i_1) = (i, j, k_1)$, $f_*(j_1) = (i, j_1, k_2)$, $k_1 \ne k_2$. Тогда

$$f \circ f_*^{-1}(i,j,k_1) = (i,j,k_3),\ f \circ f_*^{-1}(i,j_1,k_2) = (i,j_1,k_4),\ k_3 \ne k_4.$$

По определению $\mathcal{U}_2^{(\ell)}$, как и в случае "а", дуги $((i,j,k_1),\ (i,j_1,k_2))$ и $((i,j,k_3),(i_1,j_1,k_4))$ могут только одновременно принадлежать $\mathcal{U}_2^{(\ell)}$. Опять имеем противоречие с (17).

Случай "с". Пусть $f_*(i_1) = y_i$, $f_*(j_1) = (i,j,k)$ (вариант $f_*(i_1) = (i,j,k)$, $f_*(j_1) = y_i$ аналогичен). Тогда $f(i_1) = f \circ f_*^{-1}(y_i) = y_i$, $f(j_1) = f \circ f_*^{-1}(i,j,k) = (i,j,k_1)$. Поскольку $(y_i,(i,j,k)) \in \mathcal{U}_3^{(\ell)}$, то $(y_i\,(i,j,k_1)) \in \mathcal{U}_3^{(\ell)}$. Имеем противоречие с (17).

Лемма 5 доказана.

Теперь рассмотрим граф $G^{(\ell)} = (X^{(\ell)}, \mathcal{U}^{(\ell)})$. Пусть дугам $u \in \mathcal{U}^{(\ell)}$ приписаны веса $\rho(u)$ – вещественные неотрицательные числа. По лемме 1 в графе $G^{(\ell)}$ полустепени исхода и захода вершин равны 2. Рассмотрим (2,2) – задачу коммивояжера в $G^{(\ell)}$ с системой подмножеств, удовлетворяющей (13). Пользуясь вышеприведенными свойствами графа $G^{(\ell)}$ и отображений из $\mathcal{F}^{(\ell)}$, установим $NP$-трудность этой задачи.

## § 3. Сложность решения ($k$, $S$)-задачи коммивояжера

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задан $2\ell$-вершинный неориентированный граф $G' = (X', \mathcal{U}')$ с множеством вершин $X' = \{1, 2, 3, \dots, 2\ell\}$ и множеством ребер $\mathcal{U}' = \{(i,j) \mid 1 \le i, j \le 2\ell, i \ne j (mod \ell)\}$. Ребрам $u' \in \mathcal{U}'$

приписаны веса $\rho'(u')$ - вещественные неотрицательные числа, причем

$$\rho'(i,j) = \rho'(i+\ell, j+\ell),\ 1 \le i, j \le \ell,$$

$$\rho'(i,j) = \rho'(i+\ell, j-\ell) = 0,\ 1 \le i \le \ell < j \le 2\ell. \tag{18}$$

Обозначим через $\mathcal{K}' = \{K'\}$ множество клик мощности $\ell$ в графе $G'$. Требуется указать клику $K_0' \in \mathcal{K}'$ такую, что

$$\rho(K_0') = \sum_{(i,j)\in K_0'} \rho'(i,j) = \min_{K' \in \mathcal{K}'} \rho'(K').$$

Нетрудно проверить, что сформулированная задача $NP$-трудна, поскольку она эквивалентна $NP$-трудной задаче [3] отыскания максимального разреза в индуцированном $\ell$ -вершинном подграфе графа $G'$ с множеством вершин $\{1, 2, 3, \dots, \ell\}$ .

Рассмотрим взаимно-однозначное соответствие $\alpha : \mathcal{K}' \to \mathcal{F}^{(\ell)}$, построенное следующим образом. По произвольной клике $K' = (t_1, t_2, \dots, t_\ell) \in \mathcal{K}'$ , $t_i' \equiv i \ (mod\, \ell),\ 1 \le i \le \ell$ , строится отображение $f : X_n \to X^{(\ell)}$ (и наоборот) при соблюдении следующих условий:

$$f \circ f_*^{-1}(y_i) = y_i,\ 1 \le i \le \ell,$$

$$f \circ f_*^{-1}(i,j,K) = \begin{cases} (i,j,K) & \text{, если } t_i = i,\ 1 \le i, j \le \ell,\ K \in \{0,1\}, \\ (i,j,K_1) & \text{, если } t_i = i+\ell,\ 1 \le i, j \le \ell,\ K_1 \ne K. \end{cases} \tag{19}$$

По лемме 5, $f \in \mathcal{F}^{(\ell)}$ . Причем условия (19) таковы, что разным кликам из $\mathcal{K}'$ соответствуют разные отображения из $\mathcal{F}^{(\ell)}$. Теперь взаимная однозначность соответствия $\alpha : \mathcal{K}' \to \mathcal{F}^{(\ell)}$ следует из того, что $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{F}^{(\ell)}| = 2^{\ell}$ .

Припишем дугам $u \in \mathcal{U}^{(\ell)}$ веса:

$$\rho(u) = \begin{cases} \rho'(i,j) & \text{, если } u \in ((i,j,K),(j,i,K) \in \mathcal{U}_1^{(\ell)}, \\ & \quad 1 \le i, j \le \ell,\ K \in \{0,1\}, \\ 0 & \text{, в противном случае.} \end{cases} \tag{20}$$

Имеет место

Л е м м а 6. Справедливо следующее соотношение:

$$2\rho'(K') = \rho(\alpha(K')) \qquad \text{для любого } K' \in \mathcal{K}'$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K' = (t_1, t_2, \dots, t_\ell)$ и $f = \alpha(K')$. Тогда, учитывая (18), имеем

$$2\rho'(K') = 2 \cdot \sum_{1 \le i < j \le \ell} \rho'(t_i, t_j) = 2 \cdot \Big( \sum_{1 \le t_i < t_j \le \ell} \rho'(i,j) +$$

$$+ \sum_{\ell+1 \le t_i < t_j \le 2\ell} \rho'(i,j) \Big) = \sum_{1 \le t_i < t_j \le \ell} \big( \rho'(i,j) + \rho'(i+\ell, j+\ell) \big) +$$

$$+\sum_{l+1\le t_i<t_j\le 2l}\left(\rho'(i,j)+\rho'(i+l,j+l)\right),$$

или, учитывая (19), (20), (12),

$$\rho'(K')=\sum_{\kappa\in\{0,1\}}\Big\{\sum_{1\le t_i<t_j\le l}\Big[\sum_{((i,j,\kappa),(j,i,\kappa))\in U_1^{(l)}}\rho((i,j,\kappa),(j,i,\kappa))+$$

$$+\sum_{((j,i,\kappa),(i,j,\kappa))\in U_1^{(l)}}\rho((j,i,\kappa),(i,j,\kappa))\Big]+\sum_{l+1\le t_i<t_j\le 2l}\Big[\sum_{((i,j,\kappa),(j,i,\kappa))\in U_1^{(l)}}\rho((i,j,\kappa),(j,i,\kappa))+$$

$$+\sum_{((j,i,\kappa),(i,j,\kappa))\in U_1^{(l)}}\rho((j,i,\kappa),(i,j,\kappa))\Big]\Big\}=\sum_{(x_1,x_2)\in L_0^{(l)}}\rho(f\circ f_*^{-1}(x_1),f\circ f_*^{-1}(x_2))=$$

$$=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ j\equiv i+1(\mathrm{mod}\,n)}}\rho(f(i),f(j))=\rho(f).$$

Лемма 6 доказана.

Справедлива следующая

Теорема (2,2)-задача коммивояжера на ориентированном графе-$NP$-трудная проблема.

Доказательство основано на полиномиальной сводимости поиска клики мощности $l$ минимального веса в графе $G'$ к соответствующей (2,2)-задаче коммивояжера. Алгоритм сведения следующий.

1) Строится граф $G^{(l)}$ с системой подмножеств $X^i$, $|X^i|\le 2$, удовлетворяющий (13). С учетом высказанного замечания такое построение осуществляется за полиномиальное время.

2) На дугах $u\in U^{(l)}$ графа $G^{(l)}$ задаются веса в соответствии с (20).

3) Строится оптимальное решение $f_0\in \mathcal{F}^{(l)}$ (2,2)- задачи коммивояжера в графе $G^{(l)}$.

4) В графе $G'$ строится клика $K_0'=\alpha^{-1}(f_0)$ мощности $l$ в соответствии с (19).

Оптимальность построенной клики $K_0'$ гарантируется леммой 6, а реализация этапов 1, 2, 4 настоящего сведения одной задачи к другой осуществляется за полиномиальное время.

Теорема доказана.

Следствие 1. (2,3)-задача коммивояжера на неориентированном графе — $NP$-трудная проблема.

Доказательство основано на сведении (2,2)-задачи коммивояжера на ориентированном графе к (2,3)-задаче на неориентированном графе путем замены каждой вершины тремя вершинами [3] и заданием соответствующей системы подмножеств $X^i$, $|X^i| \le 2$, $1 \le i \le 3n$, как это было проделано, например, в работе [2] при $K = 3$.

Следствие 2. ( $k, s$ )-задача коммивояжера, $k \ge 2$, $s \ge 2 (s \ge 3)$, на ориентированном (неориентированном) графе – $NP$-трудная проблема.

Поступила в ред.-изд. отдел
22 мая 1985 г.

Литература

1. Сердюков А.И. О задаче коммивояжера при наличии запретов. - В кн.: Дискретные экстремальные задачи (Управляемые системы). Новосибирск, 1978, вып. 17, с. 80-86.

2. Сердюков А.И. О задаче отыскания гамильтонова цикла (контура) при наличии запретов. - В кн.: Дискретные экстремальные задачи (Управляемые системы). Новосибирск, 1979, вып. 19, с. 57-64.

3. Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем.- Кибернетический сборник. М.: Мир, 1975, вып. 12, с. 16-38.

4. Garey M., Johnson D., Tarjan R. Planar Hamiltonian circuit problem.- SIAM J. Comp., 1976, v. 5. N 4, p. 704-714.