Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1985 г., вып. 26

УДК 519.3

О ЛОКАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Н.М.Левченко

Под локальным синтезом оптимального управления динамической системой понимается синтез в малой окрестности номинальной (программной) экстремали задачи оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

В [1] предложена методика качественного решения проблемы локального синтеза, основанная на локальном исследовании экстремалей методами математического анализа, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории поля экстремалей. Следуя ей, получены конструктивные условия существования кусочно-непрерывного, кусочно-гладкого оптимального управления, вычислены производные оптимального управления и построены нормали к поверхностям разрыва его значений вдоль номинальной экстремали.

В настоящей работе рассмотрение проблемы ведется в случае нарушения одного из условий [1] - аналога известного в вариационном исчислении условия Якоби.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\Phi_0(t_1, x(t_1)) \to min, \tag{1}$$

$$x_{|t=t_0} = \xi, \quad \Phi(t_1, x(t_1)) = 0, \tag{2}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U \tag{3}$$

минимизации терминального функционала на решениях управляемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с фиксированными начальными данными, ограничениями типа равенства на терминальные концы интегральных кривых и типа включения на управляющие воздействия. Здесь t - независимая переменная (время), x, u - векторы фазовых координат и управляющих воздействий из евклидовых пространств E^n, E^r, U - непустое множество E^r, $\Phi_0 : E^{n+1} \to E^1$ - скалярная, $\Phi_0 : E^{n+1} \to E^m$, $f : E^{n+r+1} \to E^1$ - векторные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Тройку $\{t_1, x(t), u(t)\}$, составленную из числа $t_1 \geq t_0$, кусочно-непрерывного на интервале $T \supset [t_0, t_1]$ управления $u: T \to U$ и соответствующего кусочно-гладкого решения $x: T \to E^n$ системы (3), назовем допустимым процессом, если он удовлетворяет краевым условиям (2).

Пусть допустимый процесс $\{t_1, x(t), u(t)\}$ удовлетворяет принципу максимума Л.С.Понтрягина [2] в таком виде: существуют соответствующие ему вектор $\lambda \in E^m$ и кусочно-гладкое решение $\psi: T \to E^n$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(t, \psi, x, u) \tag{4}$$

такие, что

$$\psi_{|t=t_1} = -L_x(\lambda, t_1, x(t_1)), \quad \dot{L}(\lambda, t_1, x(t_1)) = 0, \tag{5}$$

$$H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(t, \psi(t), x(t), u), \; t \in T,$$

где $H = \psi' f(t, x, u)$ - гамильтониан системы (3), $L = \Phi_0(t, x) + \lambda' \Phi(t, x)$ - (нормальная) функция Лагранжа терминальной части задачи (1)-(3), H_x, L_x - векторы частных производных функции H, L по компонентам векторного аргумента x, $\dot{L}$ - полная производная L по t в силу условия (3), штрих используется как знак транспонирования. Тогда набор $\pi = \{\lambda, t_1, \psi(t), x(t), u(t)\}$ назовем нормальной экстремалью Понтрягина, а функцию $x(t)$ и ее график $\Gamma = \{(t, x(t)) : t_0 \leq t \leq t_1\}$ - нормальной экстремалью.

Пусть G - непустое множество E^{n+1}. Вектор-функцию $v: G \to U$ назовем оптимальным управлением, если для любых начальных данных $(t_0, \xi) \in G$ существует допустимый процесс $\{t_1, x(t), u(t)\}$, оптимальный в G [3] и такой, что $u(t) = v(t, x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Далее символом $\pi = \{\lambda, t_1, \psi(t), x(t), u(t)\}$ обозначаем нормальную экстремаль Понтрягина при номинальных начальных значениях $\xi = \xi^0$, считая ее известной. Нормальную экстремаль Понтрягина, отвечающую произвольным значениям ξ, обозначаем $\pi(\xi) = \{\lambda(\xi), t_1(\xi), \psi(t, \xi), x(t, \xi), u(t, \xi)\}$. Если функция $y(\lambda, t, \psi, x, u)$ определена вдоль π, то под символами $y_{|t}$, $y_{|t\mp}$, $\Delta y(t)$ понимаем сложную функцию $t \to y(\lambda, t, \psi(t), x(t), u(t))$, ее односторонние пределы и величину скачка $y_{|t-} - y_{|t+}$. Полагаем

$$u = w(t, \psi, x) = \arg\max_{u \in U} H(t, \psi, x, u) - \tag{6}$$

точка максимального значения H по u на U.

Изучим возможность синтеза оптимального управления в малой окрестности (номинальной) нормальной экстремали Γ, следуя предложенной в [1] методике. Прежде всего, опираясь на выводы [1], выясним свойства $\pi(\xi)$ для значений ξ, близких к ξ^0.

§ 2. Система уравнений в вариациях

Предположим, нормальная экстремаль Понтрягина π и функция $w(t,\psi,x)$ обладают такими свойствами:

1) функция $w(t,\psi,x)$ определена, однозначна, ограничена и непрерывна в малой окрестности графика Σ функции $(\psi(t),x(t))$, за исключением K гладких поверхностей $Y_1,\ldots,Y_K$, и в каждой из областей непрерывности вплоть до границы либо постоянна, либо удовлетворяет условиям:

$$H_u(t,\psi,x,w(t,\psi,x)),\ H_{uu}(t,\psi,x,w(t,\psi,x))<0;$$

2) график Σ пересекает поверхность Y_i, $i=1,\ldots,K$, в единственной точке, соответствующей $t=\tau_i$, при этом $t_0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{K+1}=t_1$ и

$$-\Delta H_{t|\tau_i}-\Delta\dot{x}'(\tau_i)\,\psi(\tau_i\mp)+\Delta\dot{\psi}'(\tau_i)\,x(\tau_i\mp)>0,\quad i=1,\ldots,K. \tag{7}$$

Неравенства (7) означают [1], что Σ пересекает $Y_1,\ldots,Y_K$ без односторонних касаний.

Теперь можем определить матрицы

$$A(t)=(f_x+f_u w_x)_{|t},\quad B(t)=f_u w_{\psi|t},$$

$$C(t)=(H_{xx}+H_{xu}w_x)_{|t},\quad t_0\le t\le t_1,\quad t\ne\tau_1,\ldots,\tau_K,$$

и ввести в рассмотрение систему уравнений в вариациях (по начальным значениям) краевой задачи принципа максимума (2)-(6) при номинальных начальных значениях.

$$\dot{X}=A(t)X+B(t)\Psi,\qquad \dot{\Psi}=-A'(t)\Psi-C(t)X, \tag{8}$$

$$X_{|t=t_0}=E \text{ (единичная матрица порядка } n\text{)}, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}X_{|t=\tau_i+}=X(\tau_i-)+\Delta\dot{x}(\tau_i)T_i',\quad \Psi_{|t=\tau_i+}=\Psi(\tau_i-)+\Delta\dot{\Psi}(\tau_i)T_i',\\ T_i=-\frac{1}{\rho_i}\left[X'(\tau_i-)\,\Delta\dot{\psi}(\tau_i)-\psi'(\tau_i-)\,\Delta\dot{x}(\tau_i)\right],\\ \rho_i=-\Delta H_{t|\tau_i}-\Delta\dot{x}'(\tau_i)\,\dot{\psi}(\tau_i-)+\Delta\dot{\psi}'(\tau_i)\,\dot{x}(\tau_i-),\quad i=1,\ldots,K,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\Psi(t_1)+L_{xx|t_1}X(t_1)+L_{x\lambda|t_1}\Lambda+(\dot{L})_{x|t_1}T'_{K+1}=0,\\ L_{\lambda x|t_1}X(t_1)+(\dot{L})_{\lambda|t_1}T'_{K+1}=0,\\ (\dot{L})'_{x|t_1}X(t_1)+(\dot{L})'_{\lambda|t_1}\Lambda+\ddot{L}_{|t_1}T'_{K+1}=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Набор $\{X(t), \Psi(t), \Lambda, T_1, \ldots, T_{K+1}\}$, составленный из гладких на отрезке $t_0 \le t \le t_1$, $t \ne \tau_1, \ldots, \tau_K$, решений $X(t)$, $\Psi(t)$ матричных уравнений (8), матрицы Λ и векторов $T_1, \ldots, T_{K+1}$, назовем решением системы (8)-(11), если он удовлетворяет краевым условиям (9), (11) и условиям скачка (10).

Система уравнений в вариациях играет важную роль в изучении поставленных вопросов. Оказывается [1], если эта система имеет единственное решение, то при малых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ для любого ξ из открытого шара $B_\varepsilon(\xi^0)$ радиуса ε с центром в точке ξ^0 нормальная экстремаль Понтрягина $\pi(\xi)$ такая, что $(\lambda(\xi), t_1(\xi), \psi(t_0, \xi)) \in B_\delta(\lambda, t_1, \psi(t_0))$, существует и единственна на интервале $t_0 - \delta < t < t_1 + \delta$, причем график функции $t \to (\psi(t, \xi), x(t, \xi))$ пересекает поверхность Y_i, $i = 1, \ldots, K$, в единственной точке, соответствующей $t = \tau_i(\xi)$. Составляющие $\pi(\xi)$ и функции $\tau_1(\xi), \ldots, \tau_K(\xi)$ обладают такими свойствами: функции $\lambda(\xi), t_1(\xi), \tau_1(\xi), \ldots, \tau_K(\xi)$ непрерывно дифференцируемы, а функции $\psi(t, \xi), x(t, \xi), u(t, \xi)$ непрерывно дифференцируемы, за исключением непересекающихся гладких поверхностей $t - \tau_1(\xi) = 0, \ldots, t - \tau_K(\xi) = 0$, в точках которых возможны разрывы 1 рода функции u и частных производных функций ψ, x, u; при $\xi = \xi^0$ имеют место равенства:

$$\pi(\xi^0) = \pi, \quad \tau_i(\xi^0) = \tau_i, \quad i = 1, \ldots, K, \tag{12}$$

$$\lambda_\xi(\xi^0) = \Lambda, \quad t_{1\xi}(\xi^0) = T_{K+1},$$

$$\psi_\xi(t, \xi^0) = \Psi(t), \quad x_\xi(t, \xi^0) = X(t),$$

$$u_t(t, \xi^0) = w_{t|t} + w_{\psi|t}\dot{\psi}(t) + w_{x|t}\dot{x}(t), \tag{13}$$

$$u_\xi(t, \xi^0) = w_{\psi|t}\Psi(t) + w_{x|t}X(t), \quad t_0 \le t \le t_1,$$

$$\tau_{i\xi}(\xi^0) = T_i, \quad i = 1, \ldots, K.$$

Выясним критерии единственности решения системы уравнений в вариациях. С этой целью дополнительно предположим:

3) $\Delta_{K+1} = \ddot{L}_{|t_1} > 0$;

4) существует непрерывное при $t_0 \le t \le t_1$, $t \ne \tau_1, \ldots, \tau_K$, решение $S(t)$ задачи Коши для матричного уравнения Риккати:

$$\dot{S} = -A'(t)S - SA(t) - SB(t)S - C(t),$$

$$S|_{t=t_1} = -\left[L_{xx} - \frac{1}{\Delta_{K+1}}(\dot{L})_x(\dot{L})'_x\right]|_{t_1},$$

удовлетворяющее условиям

$$\Delta_i = 1 + \frac{1}{\rho_i} a^{i'} \Delta \dot{x}(\tau_i) > 0,$$

$$S|_{t=\tau_i-} = S(\tau_i+) + \frac{1}{\rho_i \Delta_i} a^i a^{i'},$$

$$a^i = \Delta\dot{\psi}(\tau_i) - S(\tau_i+)\Delta\dot{x}(\tau_i), \quad i = 1, \dots, K.$$

В таком случае решение $X(t)$, $\Psi(t)$ уравнений (8) с условиями скачка (10), матрица Λ и вектор T_{K+1} удовлетворяют краевым условиям (11) тогда и только тогда, когда

$$T_{K+1} = -\frac{1}{\Delta_{K+1}}\left[X'(t_1)(\dot{L})_x|_{t_1} + \Lambda'(\dot{L})_\lambda|_{t_1}\right]$$

и для произвольной точки $t \in [t_0, t_1]$, $t \neq \tau_1, \dots, \tau_K$, справедливы равенства

$$\Psi(t) - S(t)X(t) - R(t)\Lambda = 0,$$

$$-R'(t)X(t) + Q(t)\Lambda = 0.$$

Здесь $R(t)$, $Q(t)$ – непрерывные при $t_0 \le t \le t_1$, $t \neq \tau_1, \dots, \tau_K$, решения следующих задач Коши с условиями скачка:

$$\dot{R} = -[A'(t) + S(t)B(t)]R, \quad R|_{t=t_1} = -\left[L_{x\lambda} - \frac{1}{\Delta_{K+1}}(\dot{L})_x(\dot{L})'_\lambda\right]|_{t_1},$$

$$R|_{t=\tau_i-} = \left[E - \frac{1}{\rho_i \Delta_i} a^i \Delta\dot{x}'(\tau_i)\right]R(\tau_i+), \quad i = 1, \dots, K; \tag{14}$$

$$\dot{Q} = R'(t)B(t)R(t), \quad Q|_{t=t_1} = -\frac{1}{\Delta_{K+1}}(\dot{L})_\lambda(\dot{L})'_\lambda|_{t_1}, \tag{15}$$

$$Q|_{t=\tau_i-} = Q(\tau_i+) - \frac{1}{\rho_i \Delta_i} R'(\tau_i+)\Delta\dot{x}(\tau_i)\Delta\dot{x}'(\tau_i)R(\tau_i+), \quad i = 1, \dots, K. \tag{16}$$

Поэтому решение системы уравнений в вариациях сводится к решению задачи Коши с условиями скачка:

$$\dot{X} = [A(t) + B(t)S(t)]X + B(t)R(t)\Lambda, \quad t_0 \le t \le t_1,$$

$$X|_{t=t_0} = E,$$

$$X|_{t=\tau_i+} = \left[E - \frac{1}{\rho_i \Delta_i}\Delta\dot{x}(\tau_i)a^{i'}\right]X(\tau_i-) + \frac{1}{\rho_i \Delta_i}\Delta\dot{x}(\tau_i)\Delta\dot{x}'(\tau_i)R(\tau_i+)\Lambda, \tag{17}$$

$$i = 1, \dots, K,$$

при этом составляющие $\Psi(t), \Lambda, T_1, \dots, T_K$ определяются из формул

$$\Psi(t) = S(t)\, X(t) + R(t)\Lambda, \quad t_0 \le t \le t_1,$$

$$Q(t_0)\Lambda - R'(t_0) = 0,$$

$$T_i = -\frac{1}{\rho_i \Delta_i}\left[X'(\tau_i -) a^i - \Lambda' R'(\tau_i +)\Delta\dot{x}(\tau_i)\right], \; i = 1, \dots, K. \tag{18}$$

Отсюда следует, что условие единственности решения равносильно условию невырожденности матрицы $Q(t_0)$.

Заметим, что в предположении 1 производная $\dot{Q}(t)$ неотрицательно определена в каждой точке $t \in [t_0, t_1]$, $t \ne \tau_1, \dots, \tau_K$, а так как в условиях (15), (16) $\rho_i > 0$, $\Delta_i > 0$, то $Q(t)$ неположительно определена при $t_0 \le$ $\le t \le t_1$, $t \ne \tau_1, \dots, \tau_K$, и, более того, отрицательно определена вместе с предельными матрицами $Q(\tau_i^{\pm})$, $i = 1, \dots, K$, если, например, имеет место одно из условий:

$$m = 1 \quad \text{и} \quad (\dot{L})_{\lambda | t_1} \ne 0; \quad \dot{Q}(t_1) > 0. \tag{19}$$

Это довольно жесткие условия. Так последнее из них не выполняется, если функция $w(t, \psi, x)$ постоянна в окрестности точки $(t_1, \psi(t_1), x(t_1))$. Рассмотрим подробнее следующий случай:

5) $m - 1 > 0$, $K - m + 2 > 0$, система векторов $R'(\tau_{K-m+2}+)\Delta\dot{x}(\tau_{K-m+2}), \dots$ $\dots, R'(\tau_K +)\Delta\dot{x}(\tau_K), (\dot{L})_{\lambda | t_1}$ линейно независима и функция $w(t, \psi, x)$ кусочно-постоянна в малой окрестности дуги графика $\sum$, соответствующей промежутку $\tau_{K-m+2} < t \le t_1$.

Здесь $B(t) = 0$, $\tau_{K-m+2} < t \le t_1$. Поэтому

$$Q(t) = Q(\tau_{i+1}-), \; \tau_i < t < \tau_{i+1}, \; i = K - m + 2, \dots, K,$$

причем

$$Q(\tau_i -) = -\sum_{j=i}^{K} \frac{1}{\rho_j \Delta_j} R'(\tau_j +)\Delta\dot{x}(\tau_j)\Delta\dot{x}'(\tau_j) R(\tau_j +) - \frac{1}{\Delta_{K+1}}(\dot{L})_\lambda (\dot{L})_{\lambda | t_1}, \tag{20}$$

$$i = K - m + 2, \dots, K + 1.$$

Легко видеть, что ранг матрицы $Q(\tau_i -)$ равен числу слагаемых правой части (20), т.е. $K - i + 2$, а матрица $Q(\tau_{K-m+2} -)$ отрицательно определена. Значит, матрица $Q(t)$ при $t_0 \le t < \tau_{K-m+2}$ обладает свойствами, характерными для случаев (19). Тогда $X(t)$ – непрерывное на отрезке $t_0 \le$ $\le t \le t_1$, $t \ne \tau_1, \dots, \tau_K$, решение задачи Коши

$$\dot{X} = \begin{cases} \{A(t) + B(t)[S(t) + R(t)Q^{-1}(t)R'(t)]\}X, t_0 \le t < \tau_{K-m+2}, \\ A(t)X, \; \tau_{K-m+2} < t \le t_1, \end{cases} \tag{21}$$

$$X|_{t=t_0} = E,$$

отвечающее вместе с T_i при $i = 1, \dots, K-m+1$ условиям

$$X|_{t=\tau_i+} = [E - \Delta\dot{x}(\tau_i)\tilde{a}^{i'}]X(\tau_i-), \; T_i = -X'(\tau_i-)\tilde{a}^i, \tag{22}$$

где

$$\tilde{a}^i = \frac{1}{\rho_i\tilde{\Delta}_i}\{\Delta\dot{\psi}(\tau_i) - [S(\tau_i+) + R(\tau_i+)Q^{-1}(\tau_i+)R'(\tau_i+)]\Delta\dot{x}(\tau_i)\},$$

$$\tilde{\Delta}_i = \Delta_i - \frac{1}{\rho_i}\Delta\dot{x}'(\tau_i)R(\tau_i+)Q^{-1}(\tau_i+)R'(\tau_i+)\Delta\dot{x}(\tau_i). \tag{23}$$

По определению, $\tilde{\Delta}_i > 0$. Покажем, что условия (17), (18) можно привести к виду (22) и при $i = K-m+2, \dots, K$. Введем необходимые обозначения.

Положим: q_ℓ^j – вектор, компонентами которого являются последние $m-\ell$ элементов j-го столбца матрицы $Q(\tau_{K-m+2+\ell}-)$, $\tau^j(t)$ – j-й столбец матрицы $R(t)$. Матрицы $\tilde{Q}_\ell$, Q_ℓ порядка $(m-\ell)\times\ell$, $(m-\ell)\times(m-\ell)$ определим так, что матрица, полученная из $Q(\tau_{K-m+2+\ell}-)$ удалением первых ℓ строк, равна $(\tilde{Q}_\ell, Q_\ell)$. Матрицы $\tilde{R}_\ell(t)$, $R_\ell(t)$ порядка $n\times\ell$, $n\times(m-\ell)$ подчиним условию $R(t) = [\tilde{R}_\ell(t)\; R_\ell(t)]$. Считаем, что $Q_0 = Q(\tau_{K-m+2}-)$, $R_0(t) = R(t)$.

Поскольку $\operatorname{rank} Q(\tau_i-) = K-i+2$, $i = K-m+2, \dots, K+1$, то некоторый минор порядка $K-i+2$ матрицы $Q(\tau_i-)$ отличен от нуля. За счет перестановки компонент Φ можно удовлетворить условию

$$|Q_{i-(K-m+2)}-| \ne 0, \; i = K-m+2, \dots, K+1. \tag{24}$$

Пусть $i = K-m+2$, $\ell = 1$. В силу (24), предельное равенство

$$-R'(\tau_i-)X(\tau_i-) + Q(\tau_i-)\Lambda = 0 \tag{25}$$

равносильно равенству $\Lambda = Q_{\ell-1}^{-1}R'_{\ell-1}(\tau_i-)X(\tau_i-)$ и, следовательно, условия (22) имеют место; здесь

$$\tilde{a}^i = \frac{1}{\rho_i\Delta_i}\{\Delta\dot{\psi}(\tau_i) - [S(\tau_i+) + R_{\ell-1}(\tau_i-)Q_{\ell-1}^{-1}R'_{\ell-1}(\tau_i+)]\Delta\dot{x}(\tau_i)\}. \tag{26}$$

Пусть i – произвольный индекс, $k-m+2 < i \leq k$, и, по-прежнему, $\ell = i-(k-m+1)$. В силу (24), из (25) вытекает равенство

$$\Lambda_{\ell-1} = Q^{-1}_{\ell-1}[-\tilde{Q}_{\ell-1}\tilde{\Lambda}_{\ell-1} + R'_{\ell-1}(\tau_i -)X(\tau_i -)],$$

где $\Lambda_{\ell-1}$, $\tilde{\Lambda}_{\ell-1}$ – матрицы порядка $(m-\ell+1)\times n$, $(\ell-1)\times n$ такие, что $\Lambda' = [\tilde{\Lambda}'_{\ell-1}\ \Lambda'_{\ell-1}]$. Следовательно, условия (17), (18) равносильны условиям (22), (26) в том и только том случае, когда

$$\tilde{\Lambda}'_{\ell-1}[\tilde{R}_{\ell-1}(\tau_i +) - R_{\ell-1}(\tau_i +)Q^{-1}_{\ell-1}\tilde{Q}_{\ell-1}]'\Delta\dot{x}(\tau_i) = 0. \tag{27}$$

Допустим, что j – произвольный индекс, $1 \leq j \leq \ell-1$. Пользуясь условиями (14), (16), (24), можем выразить вектор $Q^{-1}_{\ell-1}q^j_{\ell-1}$ в терминах матриц $R(\tau_i +)$, $Q(\tau_i +)$ и затем обосновать формулу

$$\begin{aligned} \tau^j(\tau_i +) - R_{\ell-1}(\tau_i +)Q^{-1}_{\ell-1}q^j_{\ell-1} = \Delta_i\{\tau^j(\tau_i +) - R_\ell(\tau_i +)Q^{-1}_\ell q^j_\ell + \\ + \nu_{j\ell}[\tau^\ell(\tau_i +) - R_\ell(\tau_i +)Q^{-1}_\ell q^\ell_\ell]\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \nu_{j\ell} &= -\frac{1}{\tilde{\Delta}_i}\{[\tau^j(\tau_i +) - R_\ell(\tau_i +)Q^{-1}_\ell q^j_\ell]'\Delta\dot{x}(\tau_i)\}, \\ \tilde{\Delta}_i &= [\tau^\ell(\tau_i +) - R_\ell(\tau_i +)Q^{-1}_\ell q^\ell_\ell]'\Delta\dot{x}(\tau_i). \end{aligned} \tag{28}$$

Нетривиальность $\tilde{\Delta}_i$ гарантируется. В силу произвольности j, отсюда следует (27).

В заключение, вновь пользуясь условиями (14), (16), (24), выразим вектор $\tilde{a}^i$ в терминах $R(\tau_i +)$; $Q(\tau_i +)$:

$$\tilde{a}^i = \frac{1}{\tilde{\Delta}_i}[\tau^\ell(\tau_i +) - R_\ell(\tau_i +)Q^{-1}_\ell q^\ell_\ell],\quad \ell = i-(k-m+1). \tag{29}$$

Подведем итог.

Л е м м а. Пусть выполнены предположения 1 – 5. Тогда система уравнений в вариациях (8)–(11) имеет единственное решение, при этом его составляющие $X(t), T_1, \dots, T_k$ определяются решением задачи Коши (21) с условиями (22), в которых векторы $\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^{k-m+1}$ и $\tilde{a}^{k-m+1}, \dots, \tilde{a}^k$ вычислены по формулам (23) и (29), (28) соответственно.

С л е д с т в и е. Пусть $a^i(t)$, $i = k-m+2, \dots, k$ – гладкое на отрезке $[\tau_i, t_1]$ решение задачи Коши

$$\dot{a} = -A'(t)a,\quad a_{|t=\tau_i} = \tilde{a}^i. \tag{30}$$

В предположениях леммы ранг матрицы $X(t)$ при $\tau_i \le t \le \tau_{i+1}$ равен n, если $i = 0, \ldots, k-m+1$ или $n - i + (k-m+1)$, если $i = k-m+2, \ldots, k$, причем в последнем случае $a^{k-m+2}(t), \ldots, a^i(t)$ - фундаментальная система решений системы $X'(t)a = 0$ для любого $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$.

Здесь под значениями $X(t)$ в концах отрезка $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ понимаем односторонние пределы $X(\tau_i+)$, $X(\tau_{i+1}-)$.

Справедливость следствия при $i = 0, \ldots, k-m+1$ очевидна. Доказательство следствия при $i = k-m+2, \ldots, k$ ведется индукцией по i с использованием вытекающего из определения свойства $a^i(t)$:

$$a^{i'}(\tau_{i+j})\Delta\dot{x}(\tau_{i+j}) = 0,\ j = 1,\ldots,k-i;\ i = k-m+2,\ldots,k-1.$$

§ 3. Оптимальное управление

Т е о р е м а . Пусть выполнены предположения 1–5. Тогда найдутся открытое множество $G \subset E^{n+1}$ и гладкие многообразия $P_{k-m+2}, \ldots, P_k \subset E^{n+1}$ размерности $n, \ldots, n-m+2$, содержащие номинальную нормальную экстремаль Γ на полуотрезках $[t_0, \tau_{k-m+2})$ и $[\tau_{k-m+2}, \tau_{k-m+3}), \ldots, [\tau_k, t_1)$ соответственно, такие, что оптимальное управление $v(t,x)$ существует в области $G \cup (\bigcup_{i=k-m+2}^{k} P_i)$ непрерывно и непрерывно дифференцируемо всюду в G, за исключением $k-m+1$ гладких поверхностей $P_1, \ldots, P_{k-m+1}$, в точках которых функции v, v_t, v_x допускают разрывы 1 рода, и постоянно на P_i, $i = k-m+2, \ldots, k$. При этом:

а) $(\tau_i, x(\tau_i))$, $i = 1, \ldots, k-m+1$, - единственная точка пересечения Γ с P_i. $[1 - \dot{x}'(\tau_i-)\tilde{a}^i, \tilde{a}^i]$ - нормаль P_i в этой точке,

$$[-\dot{x}'(\tau)a^j(\tau)](t-\tau) + a^{j'}(\tau)[x - x(\tau)] = 0,\ j = k-m+2,\ldots,i, \qquad (31)$$

$i = k-m+2,\ldots,k$, - система уравнений, определяющая многообразие, касательное к P_i в точке $(\tau, x(\tau))$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$;

б) вдоль Γ имеют место равенства

$$v(t, x(t)) = u(t),\quad t_0 \le t \le t_1,$$

$$v_t(t, x(t)) = w_{t|t} + w_{\psi|t}\{\dot{\psi}(t) - [S(t) + R(t)Q^{-1}(t)R'(t)]\dot{x}(t)\},$$

$$v_x(t, x(t)) = w_{\psi|t}[S(t) + R(t)Q^{-1}(t)R'(t)] + w_{x|t},\quad t_0 \le t < \tau_{k-m+2}.$$

Здесь векторы $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^{k-m+1}$ определяются по формуле (23), а вектор-функции $a^{k-m+2}(t), \ldots, a^k(t)$ - из решения задачи Коши (28)-(30). Функция $\dot{x}(t)$ доопределяется в точках $\tau_{k-m+2}, \ldots, \tau_k$ по правилу $\dot{x}(\tau_i) = \dot{x}(\tau_i+)$.

Доказательство. Допустим, ε, δ – числа, отвечающие требованиям § 2, W – множество точек (t,ξ) : $t_0-\delta < t < \tau_{k-m+2}(\xi)$, $\xi \in B_\varepsilon(\xi^0)$. Следуя [4], через $dx(t,\xi)$ обозначим выпуклую оболочку всевозможных пределов последовательностей производных $\{x_\xi(t,\xi^i)\}$, когда $\xi^i \to \xi$ при $i \to \infty$ и $x_\xi(t,\xi^i)$ существует.

Очевидно, в каждой точке $(t,\xi) \in W$, $t-\tau_i(\xi) \neq 0$, $i=1,\dots,k-m+1$, множество $dx(t,\xi)$ содержит единственный элемент-матрицу $x_\xi(t,\xi)$. При достаточно малых ε и δ в силу кусочной гладкости функции $x(t,\xi)$, равенств (12), (13) и следствия леммы эта матрица невырождена. Если же $t-\tau_i(\xi)=0$ для некоторого i, $1 \le i \le k-m+1$, то $dx(t,\xi)$ состоит из матриц $D_\alpha(t,\xi)=\alpha x_\xi(t^-,\xi)+(1-\alpha)x_\xi(t^+,\xi)$, $0 \le \alpha \le 1$. В соответствии с условиями (12), (13), (22), (23) и следствием леммы имеем

$$|D_\alpha(\tau_i,\xi^0)|=(1-\alpha+\alpha/\tilde{\Delta}_i)|X(\tau_i-)| \neq 0, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Считаем ε настолько малым, что это неравенство выполнено всюду на поверхности $t-\tau_i(\xi)=0$, $i=1,\dots,k-m+1$.

В таком случае [4, 5] существуют окрестность G соответствующей промежутку $t_0 \le t < \tau_{k-m+2}$ дуги Γ и липшицева функция $\xi : G \to B_\varepsilon(\xi^0)$ такие, что отображение $(t,\xi) \to (t, x(t,\xi))$ есть гомеоморфизм W на G, $(t,x) \to (t,\xi(t,x))$ – обратное отображение, при этом

$$\xi(t,x(t))=\xi^0, \quad t_0 \le t < \tau_{k-m+2}.$$

Далее, согласно классической теореме о локальном обращении [6], функция $\xi(t,x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $G \setminus \bigcup_{i=1}^{k-m+1} P_i$, причем

$$\xi_t(t,x(t))=-X^{-1}(t)\dot{x}(t), \quad \xi_x(t,x(t))=X^{-1}(t),$$

$$t_0 \le t < \tau_{k-m+2}.$$

Здесь

$$P_i=\{t=\tau_i(\xi),\ x=x(\tau_i(\xi),\xi) : \xi \in B_\varepsilon(\xi^0)\} -$$

многообразие, гомеоморфное поверхности $t-\tau_i(\xi)=0$. Уточним свойства P_i.

При малых ε и δ функцию $x(t,\xi)$ можно продолжить с множества $\{t,\xi : \tau_i(\xi) < t < \tau_{i+1}(\xi), \xi \in B_\varepsilon(\xi^0)\}$ на множество $\{t,\xi : \tau_i-\delta < t < \tau_{i+1}+\delta,\ \xi \in B_\varepsilon(\xi^0)\}$ с сохранением свойств гладкости $x(t,\xi)$ и невырожденности $x_\xi(t,\xi)$. Пусть $x^i(t,\xi)$ – искомое продолжение. Поскольку

$x^i(t,\xi)=x(t,\xi)$ при $t=\tau_i(\xi)$, $\xi\in B_\varepsilon(\xi^0)$, то P_i - образ $B_\varepsilon(\xi^0)$ при отображении $\xi\to(\tau_i(\xi),x^i(\tau_i(\xi),\xi))$. В силу (13), (22) матрица Якоби этого отображения в точке ξ^0 равна

$$D_i=\mathcal{L}_i' X(\tau_i-),\ \mathcal{L}_i=[-\tilde{a}^i E-\tilde{a}^{i'}\dot{x}(\tau_i-)].$$

Так как $\operatorname{rank}X(\tau_i-)=n$, то $\operatorname{rank}D_i=\operatorname{rank}\mathcal{L}_i$. Легко видеть, что любое решение линейной однородной системы с матрицей $\mathcal{L}_i$ пропорционально вектору $[1-\dot{x}'(\tau_i-)\tilde{a}^i,\tilde{a}^i]$, т.е. $\operatorname{rank}\mathcal{L}_i=n$. Поэтому P_i - гладкая поверхность в G, $[1-\dot{x}'(\tau_i-)\tilde{a}^i,\tilde{a}^i]$ - нормаль P_i в точке $(\tau_i,x(\tau_i))$, причем, по определению P_i, это единственная общая точка Γ и P_i.

Выясним свойства отображения $(t,\xi)\to(t,x(t,\xi))$ на множестве $W_i=\{t,\xi:\tau_i(\xi)\le t<\tau_{i+1}(\xi),\xi\in B_\varepsilon(\xi^0)\}$ при $K-m+2\le i\le K$, положив $\tau_{K+1}(\xi)\equiv t_1(\xi)$.

В данном случае $\operatorname{rank}D_i=\operatorname{rank}X(\tau_i-)=n-i+(K-m+2)$. Пользуясь соображениями непрерывности, заметим: если нормальная экстремаль Понтрягина π удовлетворяет предположениям 1–5, то этим предположениям удовлетворяет каждая из нормальных экстремалей Понтрягина $\pi(\xi)$, $\xi\in B_\varepsilon(\xi^0)$ при соответствующем вычислении матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и замене точек $\tau_1,\dots,\tau_K$, t_1 точками $\tau_1(\xi),\dots,\tau_K(\xi)$, $t_1(\xi)$. Поэтому правомерно заключение: ранг матрицы Якоби отображения $\xi\to(\tau_i(\xi),x^i\tau_i(\xi),\xi))$ не изменяется в шаре $B_\varepsilon(\xi^0)$. Тогда, по теореме о ранге [6], P_i есть $n-i+(K-m+2)$ -мерное гладкое многообразие в E^{n+1}.

Аналогичным образом показываем, что $\operatorname{rank}x_\xi(t,\xi)=n-i+(K-m+1)$ при $t\in(\tau_i(\xi),\tau_{i+1}(\xi))$, $\xi\in B_\varepsilon(\xi^0)$. Поэтому [6] при отображении $(t,\xi)\to\to(t,x(t,\xi))$ образом множества W_i является $n-i+(K-m+2)$ - мерное гладкое многообразие в E^{n+1} - продолжение P_i с окрестности точки $(\tau_i,x(\tau_i))$ на окрестность дуги $\{t,x(t):\tau_i\le t<\tau_{i+1}\}$. Сохраним для него обозначение P_i. Многообразие, касательное к P_i в точке $(\tau,x(\tau))$, $\tau\in[\tau_i,\tau_{i+1})$, дается множеством решений системы

$$c_{0j}(t-\tau)+c^{j'}[x-x(\tau)]=0,\ j=K-m+2,\dots,i,$$

где (c_{0j},c^j), $j=K-m+2,\dots,i$ - фундаментальная система решений системы

$$c_0+c'\dot{x}(\tau)=0,\ X'(\tau)c=0. \tag{32}$$

В силу следствия леммы, условия (32) равносильны (31).

Следуя [1], устанавливаем, что нормальные экстремали $x(t,\xi)$, $\xi\in B_\varepsilon(\xi^0)$ образуют в области $G\cup(\bigcup_{i=K-m+2}^{K}P_i)$ L -непрерывное поле экстремалей [7]. Значит [7], для любой точки (τ, η) этой области, выбранной в качестве начальных данных, допустимый процесс $\{t_1(\xi), x(t,\xi), u(t,\xi)\}$ при условии $x(\tau, \xi) = \eta$ – оптимальный. Оптимальное управление определяется по формуле

$$v(t,x) = \begin{cases} u(t, \xi(t,x)), \ (t,x) \in G, \\ u^i, \ (t,x) \in P_i, \ i = k-m+2, \dots, k. \end{cases} \tag{33}$$

Здесь u^i – постоянное значение номинального управления $u(t)$ на интервале (τ_i, τ_{i+1}).

Указанные в теореме свойства оптимального управления вытекают непосредственно из определения (33).

Теорема доказана.

В задаче с фиксированным терминальным моментом времени в определении π последнее из условий (5) опускается, а в системе (8)-(11) последнее условие заменяется условием $T_{k+1} = 0$. В связи с этим: а) предположение 3 излишне, б) начальные условия для $S(t)$, $R(t)$, $Q(t)$ имеют вид

$$S_{|t=t_1} = -L_{xx|t_1}, \ R_{|t=t_1} = -L_{x\lambda|t_1}, \ Q_{|t=t_1} = 0.$$

Следовательно, $Q(t)$ не зависит от $\dot{L}_{\lambda|t_1}$. Поэтому предположение 5 не дает прежних результатов. Анализ выкладок приводит к такому заключению: для того, чтобы утверждение теоремы осталось в силе, необходимо исключить из системы векторов в 5 вектор $\dot{L}_{\lambda|t_1}$, заменить здесь и далее индекс m индексом $m+1$, положить в формулах (28), (29) $R_m(\tau_k+)\,Q_m^{-1}\,q_m^j = 0$.

Автор благодарен Л.Т.Ашепкову за внимание к работе.

Поступила в ред.-изд.отдел
8 октября 1984 г.

Литература

1. Левченко Н.М. О локальном синтезе оптимального управления. – В кн.: Методы оптимизации и исследование операций. Иркутск, 1984, с. 90-103.

2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Н.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.-392 с.

3. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.– М.: Наука, 1969. – 408 с.

4. Clarke F.H. On the inverse function theorem.- Pacif.J. of Mathematics, 1976, vol. 64, N 1, p. 97-102.

5. Магарил-Ильяев Г.Г. Теорема о неявной функции для липшицевых отображений. - Успехи мат. наук, 1978, т.33, № 1, с. 221-222.

6. Дьедонне Ж. Основы современного анализа/Пер. с англ.И.А.Вайнштейна;Под ред. Н.Х.Розова. - М.: Мир, 1964. - 432 с.

7. Величенко В.В. К достаточным условиям оптимальности в принципе максимума. - Докл. АН СССР, 1968, т.182, № 4, с. 747-749.