Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1985 г., вып. 26

УДК 519.1

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ 3/4 И 5/6 ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ

А.В.Косточка, А.И.Сердюков

Рассмотрим полный n -вершинный ориентированный граф $G=(V,E)$ (с $n\cdot(n-1)$ дугами). Пусть дугам $e\in E$ приписаны веса $\rho(e)$ - вещественные неотрицательные числа. Под задачей коммивояжера на максимум (минимум) будем понимать задачу отыскания в графе G гамильтонова контура, имеющего максимальный (минимальный) вес. Обозначим через L_A гамильтонов контур в графе G, построенный при помощи алгоритма A, а через L_* - оптимальное решение задачи коммивояжера на максимум (минимум) в G. Введем величину $\Delta_A=\rho(L_A)/\rho(L_*)$. Будем говорить, что алгоритм A обладает оценкой точности ε (или ε -оптимален) для задачи коммивояжера на максимум (минимум), если при любых исходных данных задачи имеет место соотношение

$$\Delta_A\geqslant\varepsilon\quad(\Delta_A\leqslant\varepsilon).$$

Такое определение сейчас общепринято.

К настоящему времени имеется большое количество публикаций, связанных с разработкой ε -оптимальных алгоритмов как для задачи коммивояжера, так и для ее частных постановок. (Если на исходную информацию задачи накладываются специальные ограничения.) Среди отдельных постановок задачи коммивояжера выделим три наиболее часто встречающиеся в литературе:

1) веса дуг графа G обладают свойством симметрии, т.е. $\rho(e_1)=\rho(e_2)$ для любой пары дуг $e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_2,v_1)$, $v_1,v_2\in V$ (симметричная задача);

2) веса дуг графа G удовлетворяют неравенству треугольника, т.е. $\rho(e_1)+\rho(e_2)\geqslant\rho(e_3)$ для любой тройки дуг $e_1=(v_1,v_2)$, $e_2=(v_2,v_3)$, $e_3=(v_1,v_3)$; $v_1,v_2,v_3\in V$ (полуметрическая задача);

3) веса дуг графа G удовлетворяют неравенству треугольника и обладают свойством симметрии (метрическая задача).

Ниже в таблице приведены наилучшие из известных нам оценок точности полиномиальных алгоритмов для задачи коммивояжера и трех вышеприведенных частных постановок.

	Задача коммивояжера	Полуметрическая задача коммивояжера	симметричная задача коммивояжера	метрическая задача коммивояжера
На максимум	$\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ (см.[1]) $T \sim O(n^3)$	ж)	$\varepsilon \geq \frac{3}{4}$ (см.[2]) $T \sim O(n^4)$	$\varepsilon \geq \frac{3}{4}$ (см.[3]) $T \sim O(n^3)$
На минимум	жж)	жжж)	жж)	$\varepsilon \leq \frac{3}{2}$ (см.[5,6]) $T \sim O(n^3)$

ж) Для данной задачи не известны алгоритмы с оценками точности и трудоемкости лучшими, чем для задачи коммивояжера на максимум.

жж) Существование ε-оптимального полиномиального алгоритма для некоторого $\varepsilon \geq 1$ равносильно утверждению: $P = NP$ (см. [4, 7]).

жжж) Неизвестны полиномиальные алгоритмы построения ε-оптимального решения для любого $\varepsilon \geq 1$.

В настоящей работе для метрической и полуметрической задач коммивояжера на максимум построены полиномиальные алгоритмы с оценками точности 5/6 и 3/4 соответственно.

Определение. Назовем 2-сочетанием в G остовный подграф, в котором полустепени исхода и захода равны 1.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{L}$ - 2-сочетание в $G=(V,E)$. Тогда в графе G существует гамильтонов контур L с весом $\rho(L) \geq \frac{2k-1}{2k}\cdot\rho(\mathcal{L})$, где k - наименьшее число дуг в контурах из $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть 2-сочетание $\mathcal{L}$ состоит из контуров $C_1,\dots,C_s$, где C_i содержит m_i вершин $(1 \leq i \leq s)$, которые занумерованы от 1 до m_i по контуру. Если $s=1$, то все доказано. Каждую вершину $v \in V$ будем обозначать парой (i,j), где i - номер контура, которому принадлежит v, а j - ее номер в контуре. Через $e_{i,j}$ обозначим дугу контура C_i, заходящую в (i,j) $(i=\overline{1,s};\ j=\overline{1,m_i})$. Будем считать, что $m_1 = k$. Кроме того, можно считать, что

$$\sum_{j=1}^{k} \rho((1,j),(s,j+1)) \geq \sum_{j=1}^{k} \rho((1,j),(s,j+\ell)), \quad 0 \leq \ell \leq k-1, \tag{1}$$

где суммы $j+1$ и $j+\ell$ подсчитываются по $\bmod k$. В противном случае можно сдвинуть нумерацию вершин по контуру C_1.

Построим два семейства $\{P_j\}_{j=1}^{k}$ и $\{Q_j\}_{j=1}^{k}$ гамильтоновых контуров в G, сумма весов которых не меньше

$$(2k-1)\cdot\sum_{i=1}^{s}\rho(C_i).$$

Этого достаточно для доказательства, так как тогда хотя бы один из P_j или Q_j имеет вес, не меньший

$$\frac{2k-1}{2k} \cdot \sum_{i=1}^{s} \rho(C_i) .$$

Контур $P_j\ (1 \le j \le k)$ содержит для каждого $1 \le i \le s$ все дуги из C_i, кроме дуги $e_{i,j}$. Кроме того, при $2 \le j \le k$ контур P_j содержит дугу $((1, j-1), (s, j))$, а также дуги $((i+1, j-1),(i, j))$ для $i = s-1, s-2, \ldots, 1$. Контур P_1 содержит дугу $((1, k), (s, 1))$, а также дуги $((i+1, m_{i+1}), (i, 1))$ для $i = s-1, s-2, \ldots, 1$.

Каждый контур $Q_j\ (1 \le j \le k)$ тоже получается удалением одной дуги из каждого $C_i\ (1 \le i \le s)$ и добавлением дуг, соединяющих получившиеся пути в гамильтонов контур. Контур $Q_j\ (1 \le j \le k)$ строится по следующим правилам.

1) Из C_1 удаляется дуга $e_{1,j}$.

2) Пусть уже удалено по одной дуге из $C_1, \ldots, C_{i-1}$ и $i \le s$. Если из C_{i-1} удалена дуга $e_{i-1,1}$, то из C_i удаляем дугу $e_{i,k}$, но зато добавляем дугу $((i-1, m_{i-1}), (i, k))$. Если из C_{i-1} удалена дуга $e_{i-1,q}\ (2 \le q \le k)$, то из C_i удаляем дугу $e_{i,q-1}$, но добавляем дугу $((i-1, q-1), (i, q-1))$.

3) Если из C_s удалена дуга $e_{s,q}$, то добавим дугу, соединяющую начальную вершину дуги $e_{s,q}$ с вершиной $(1, j)$.

Пусть, для определенности, контур Q_1 проходит через дугу $((s, r), (1, 1))$.

Подсчитаем $\sum_{j=1}^{k} \rho(P_j)$ и $\sum_{j=1}^{k} \rho(Q_j)$.

$$\sum_{j=1}^{k} \rho(P_j) = \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{s} \big(\rho(C_i) - \rho(e_{i,j})\big)\Big) + \sum_{i=1}^{s-1} \big(\rho((i+1, m_{i+1})(i, 1)\big) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \rho((i+1, j), (i, j+1))) + \sum_{j=1}^{k-1} \rho((1, j), (s, j+1)) + \rho((1, k), (s, 1)) .$$

Ясно, что

$$\sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=1}^{s} \big(\rho(C_i) - \rho(e_{i,j})\big)\Big) = (k-1) \cdot \sum_{i=1}^{s} \rho(C_i) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=}^{m_i} \rho(e_{i,j}) .$$

Аналогично

$$\sum_{j=1}^{k} \rho(Q_j) = (k-1) \cdot \sum_{i=1}^{s} \rho(C_i) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=k+1}^{m_i} \rho(e_{i,j}) + \sum_{i=1}^{s-1} \big(\rho((i, m_i), (i+1, k)\big) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \rho((i, j), (i+1, j))) + \sum_{j=1}^{k} \rho\, ((s, \alpha(r, j)), (1, j)),$$

где $\alpha(r,j)=\begin{cases} r+j-1 \pmod{m_s} & \text{, если } r=m_s; \\ r+j-1 \pmod{K} & \text{, если } r\neq m_s, r+j-1\neq K; \\ m_s & \text{, если } r\neq m_s, r+j-1=K. \end{cases}$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{K}(\rho(P_j)+\rho(Q_j))=2\cdot(K-1)\cdot\sum_{i=1}^{s}\rho(C_i)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=K+1}^{m_i}\rho(e_{i,j})+$$
$$+\sum_{i=1}^{s-1}\Big(\sum_{j=2}^{K}\underbrace{(\rho((i,j-1),(i+1,j-1))+\rho((i+1,j-1),(i,j)))}_{A_{ij}}+$$
$$+\underbrace{(\rho((i,m_i),(i+1,K))+\sum_{j=K+1}^{m_{i+1}}\rho(e_{i+1,j})+\rho((i+1,m_{i+1}),(i,1)))\Big)+}_{A_{i1}}$$
$$+\underbrace{\sum_{j=1}^{K}\rho((s,\alpha(r,j)),(1,j))+\sum_{j=1}^{K-1}\rho((1,j),(s,j+1))+\rho((1,K),(s,1))}_{B} \qquad (2)$$

Так как длины дуг в G удовлетворяют неравенству треугольника, то при любых $1\le i\le s-1$, $1\le j\le K$ имеем

$$A_{ij}\ge\rho(e_{i,j}). \qquad (3)$$

Кроме того, в силу (1),

$$B\ge\sum_{j=1}^{K}(\rho((s,\alpha(r,j)),(1,j))+\rho((1,j),(s,\alpha(r,j)+1))) ,$$ где

суммирование $\alpha(r,j)+1$ ведется по $(\bmod\ m_s)$. Снова учитывая неравенство треугольника в G, получим

$$B\ge\sum_{j=1}^{K}\rho(e_{s,j}). \qquad (4)$$

Итак, из (2), (3), (4) следует, что

$$\sum_{j=1}^{K}(\rho(P_j)+\rho(Q_j))\ge 2\cdot(K-1)\cdot\sum_{i=1}^{s}\rho(C_i)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=K+1}^{m_i}\rho(e_{i,j})+$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{K}\rho(e_{i,j})=(2K-1)\cdot\sum_{i=1}^{s}\rho(C_i).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Доказательство теоремы 1 содержит в себе алгоритм сложности $O(n^3)$ операций, позволяющий строить искомый контур L из данного 2-сочетания $\mathcal{L}$.

Следствие 1. Существует 3/4 – оптимальный алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ операций для полуметрической задачи коммивояжера на максимум.

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_1$ – решение задачи о назначениях на максимум [8] в графе G. По определению, $\mathcal{L}_1$ – 2-сочетание в G и $\rho(\mathcal{L}_1) \geqslant \rho(L_*)$. По теореме 1, в G существует гамильтонов контур L_1 с весом $\rho(L_1) \geqslant (3/4)\cdot\rho(\mathcal{L}_1)$ (2-сочетание $\mathcal{L}_1$ может содержать контуры с двумя вершинами), или $\rho(L_1) \geqslant \frac{3}{4}\rho(L_*)$. Поскольку $\mathcal{L}_1$ строится за $O(n^3)$ операций [8], то, учитывая замечание, построение гамильтонова контура L_1 можно осуществить за $O(n^3)$ операций. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Существует 5/6-оптимальный алгоритм с трудоемкостью $O(n^4)$ операций для метрической задачи коммивояжера на максимум.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1. Отличие состоит в том, что в этом случае в G строится 2-сочетание максимального веса, каждый контур которого содержит не менее трех дуг. Такое построение можно осуществить за $O(n^4)$ операций [9]. Следствие 2 доказано.

Поступила в ред.-изд.отдел
12 февраля 1985 г.

Литература

1. Ковалев М.М., Котов В.М. Субоптимальные алгоритмы решения задачи коммивояжера. – Деп. ВИНИТИ № 2403-82-31с.

2. Сердюков А.И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум. – Сб. Дискретные задачи оптимизации (Управляемые системы), Новосибирск, 1984, № 25, с. 80-86.

3. Котов В.М. Анализ градиентных алгоритмов в дискретной оптимизации; автореферат дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук, (01.01.02). – Минск, Б.и., 1983, – 114 с.

4. Гэри М., Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

5. Сердюков А.И. О некоторых экстремальных обходах в графах.– В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1978, вып. 17, с. 76-79.

6. Christofides N. The travelling salesman problem.- Combinatorial Optimization, Wiley & Sons, New York, 1979.

7. Sahni S. and Gonzales T. P-complete approximation problems.- J. assoc. comput. mach., 1976, v. 23, p. 555-565.

8. Диниц Е., Кронрод Н. Один алгоритм решения задачи о назначениях. – Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 1.

9. Bellmore M., Malone J. Pathology of Travelling-salesman subtour-elimination algorithms. - Oper. Res., 1971, v. 19, N 2, p. 278-307.