Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25

УДК 519.1

АЛГОРИТМ С ОЦЕНКОЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ

А.И.Сердюков

Пусть $G=(X,U)$ - полный n-вершинный неориентированный граф с неотрицательными весами $\rho(u)$, $u \in U$, заданными на ребрах.

Гамильтоновым циклом в графе G называется цикл, содержащий каждую вершину множества X ровно один раз. Задачей коммивояжера на максимум (в дальнейшем задачей коммивояжера) назовем задачу нахождения в графе G гамильтонова цикла, имеющего максимальный вес. Обозначим через $L_{\mathcal{A}}$ решение задачи коммивояжера, построенное при помощи алгоритма $\mathcal{A}$, а через L_0 - оптимальное решение. Под оценкой точности $\Delta_{\mathcal{A}}$ алгоритма $\mathcal{A}$ будем понимать точную нижнюю грань отношений $\rho(L_{\mathcal{A}})/\rho(L_0)$ по всем индивидуальным задачам. Величина $\Delta_{\mathcal{A}}$ показывает погрешность приближенного алгоритма $\mathcal{A}$ в наихудшем случае.

Среди известных к настоящему времени полиномиальных алгоритмов для задачи коммивояжера наибольшая оценка точности установлена для алгоритма $\mathcal{A}_1$, изложенного в [1]. Авторами [1] показано, что $\Delta_{\mathcal{A}_1} \geqslant 13/18$, и сформулирована гипотеза: $\Delta_{\mathcal{A}_1} = 3/4$. Трудоемкость алгоритма - $O(n^4)$ операций.

В настоящей работе для указанной задачи строится приближенный алгоритм $\mathcal{A}_2$ с трудоемкостью $O(n^4)$ операций, имеющий оценку точности $3/4$. Приводятся примеры задачи, на которых эта оценка достигается.

§ 1. Основные понятия и определения

Под 2-сочетанием S в графе G будем понимать однородный степени 2 остовный подграф графа G. Подмножество $T \subseteq U$ ребер графа G назовем частичным туром, если существует гамильтонов цикл в графе G, содержащий все ребра из T. (Эти определения можно найти в [1].)

Пусть S и W - некоторые 2-сочетание и паросочетание в графе G. Обозначим через $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_K$ компоненты связности 2-сочетания S. Рассмотрим множество $T_1 \subset U$, построенное с помощью следующей процедуры $P(S,W)$.

Описание процедуры $P(S,W)$

<u>Предварительный шаг</u>. Положим $T_1^0 = W$, $T_2^0 = \emptyset$.

<u>i-й шаг ($1 \le i \le K$)</u>. Пусть множества T_1^{i-1}, T_2^{i-1} уже построены. Рассмотрим цикл C_i. Возможны два случая:

а) Существует ребро $u \in W$, концевые вершины которого принадлежат циклу C_i. Тогда рассмотрим ребро $u_1 \in C_i$, $u_1 \notin W$, смежное с ребром u. Далее, полагаем

$$T_1^i = T_1^{i-1} \cup u_1, \quad T_2^i = T_2^{i-1} \cup (C_i \setminus u_1).$$

в) Такого ребра не существует. Рассмотрим два смежных ребра $u_1 \in C_i$, $u_2 \in C_i$ и положим

$$T_1^i = T_1^{i-1} \cup \begin{cases} u_1, & \text{если } T_1^{i-1} \cup u_1 \text{ – частичный тур в графе } G, \\ u_2 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$

$$T_2^i = T_2^{i-1} \cup (C_i \setminus T_1^i).$$

В обоих случаях при $i < K$ переходим к $i+1$ -му шагу, в противном случае положим

$$T_1 = \begin{cases} T_1^K, & \text{если } \rho(T_1^K) \ge \rho(T_2^K), \\ T_2^K & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

Конец описания процедуры.

Л е м м а 1. Множество T_1, построенное при помощи процедуры $P(S,W)$, является частичным туром в графе G, причем

$$\rho(T_1) \ge 1/2\left[\rho(S) + \rho(W)\right]. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество T_1 является частичным туром, поскольку на каждом i-м шаге, $1 \le i \le K$, процедуры множества T_1^i и T_2^i являются частичными турами в графе G. Из очевидных равенств $\rho(T_1^i) + \rho(T_2^i) = \rho(T_1^{i-1}) + \rho(T_2^{i-1}) + \rho(C_i)$, $1 \le i \le K$, и определения T_1 следует справедливость (1). Лемма 1 доказана.

Пусть вершина $x \in X$ не является концевой для ребер из W, а ребро $u = (x, x_1) \notin S$. Без ограничения общности положим $x \in C_1$, $x_1 \in C_1 \cup C_2$. Определим множество $T_2 \subset U$ с помощью процедуры $P(x, u, S, W)$.

Описание процедуры $P(x,u,S,W)$.

Предварительный шаг. Полагаем $T_1^0 = W,\ T_2^0 = u$.

Первый шаг. Возможны 2 случая:

а) $x_1 \in C_1$. Рассмотрим ребра u_1, u_2, u_3, u_4 из цикла C_1 такие, что x - общая вершина для ребер u_1 и u_2, а x_1 - для ребер u_3 и u_4 (см. рис. 1).

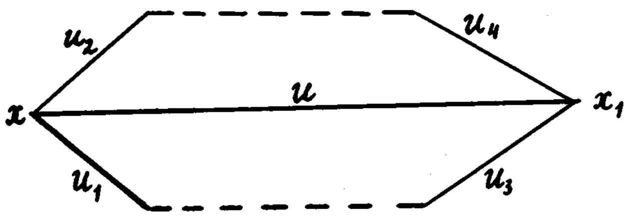

Рис. 1.

Положим $T_1^1 = W \cup \overline{T}^1$, где $\overline{T}_1^1 = \begin{cases} u_2 \cup u_3, & \text{если } u_3 \notin W, \\ u_1 \cup u_4 & \text{- в противном случае}, \end{cases}$

$T_2^1 = u \cup (C_1 \setminus \overline{T}_1^1)$, и переходим ко второму шагу.

в) $x_1 \in C_2$. Рассмотрим ребра $u_1 \in C_1$, $u_3 \in C_2$, $u_4 \in C_2$ такие, что вершина x инцидентна ребру u_1 , а вершина x_1 общая для ребер u_3 и u_4 (см. рис. 2).

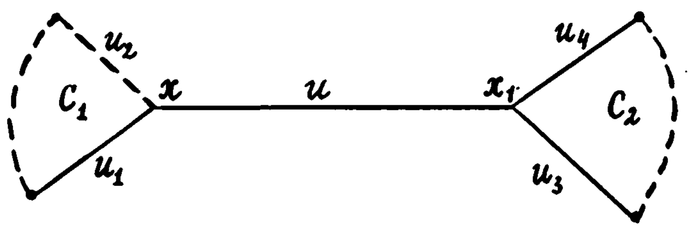

Рис. 2.

Положим $T_1^2 = W \cup u_1 \cup \overline{T}_1^2$, где $\overline{T}_1^2 = \begin{cases} u_4, & \text{если } u_4 \notin W, \\ u_3 & \text{- в противном случае}. \end{cases}$

$T_2^2 = u \cup (C_1 \cup C_2 \setminus \overline{T}_1^2)$, и переходим к третьему шагу.

i-й шаг ($2 \le i \le K$). Работа шага i аналогична работе соответствующего шага процедуры $P(S,W)$. В конце работы K -го шага строится множество

$$T_2 = \begin{cases} T_1^K, & \text{если } \rho(T_1^K) \geq \rho(T_2^K), \\ T_2^K & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Конец описания процедуры.

Л е м м а 2. Множество T_2, построенное с помощью процедуры $P(x, u, S, W)$, является частичным туром в графе G, причем

$$\rho(T_2) \geqslant 1/2 \left[\rho(S) + \rho(W) + \rho(u)\right]. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 1.

Рассмотрим произвольную вершину $x \in X$. Без ограничения общности можно положить $x \in C_1$. Пусть $u_1 \in C_1$, $u_2 \in C_1$ - два смежных ребра в вершине x. Построим множество $T_3 \subset U$ с помощью процедуры $P(x, S)$.

Описание процедуры $P(x, S)$

Пусть $\bar{G} = (X \setminus x, \bar{U})$ - полный неориентированный граф с весами $\bar{\rho}(u)$, $u \in \bar{U}$, заданными на ребрах,

$$\bar{\rho}(u) = \begin{cases} \rho(u), & \text{если } u \neq u_3, \\ \rho(u_1) + \rho(u_2) & \text{- в противном случае} \end{cases}$$

(ребро u_3 таково, что ребра u_1, u_2, u_3 образуют 3-цикл).

1. В графе $\bar{G}$ строятся 2-сочетание, содержащее ребро u_3, максимального веса и паросочетание максимального веса. Обозначим их через $\bar{S}_0$ и $\bar{W}_0$ соответственно. Такие построения можно осуществить за $O(n^4)$ операций [2].

2. В графе $\bar{G}$ строится частичный тур $\bar{T}_1$ с помощью процедуры $P(S, W)$ с входными данными $S = \bar{S}_0$, $W = \bar{W}_0$. Далее, положим

$$T_3 = \begin{cases} (\bar{T}_1 \setminus u_3) \cup u_2 \cup u_1 & \text{, если } u_3 \in \bar{T}_1, \\ \bar{T}_1 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Конец описания процедуры $P(x, S)$.

Следствием описанной процедуры служит

Л е м м а 3. Множество T_3, построенное с помощью процедуры $P(x, S)$, является частичным туром в графе G, причем

$$\rho(T_3) \geqslant \frac{1}{2}\left[\bar{\rho}(\bar{S}_0) + \bar{\rho}(\bar{W}_0)\right]. \qquad (3)$$

§ 2. Полиномиальный алгоритм для задачи коммивояжера. Его свойства

Опишем алгоритм A_2 для задачи коммивояжера, который состоит из пяти

Первый этап. В графе G строятся 2-сочетание максимального веса и паросочетание максимального веса. Обозначим их через S_0 и W_0 соответственно. Такие построения можно осуществить за $O(n^4)$ операций [2]. Если число вершин в графе G четно, то переходим ко второму этапу, в противном случае – к третьему.

Второй этап. Строится частичный тур T_1 в графе G с помощью процедуры $P(S, W)$ с входными данными $S = S_0$, $W = W_0$. Полагаем $T_0 = T_1$ и переходим к пятому этапу.

Третий этап. Пусть x_0 – вершина, не являющаяся концевой для ребер из W_0, а u_0 – ребро максимального веса в графе G, не принадлежащее S_0 и содержащее вершину x_0 в качестве концевой. При помощи процедуры $P(x, u, S, W)$ с входными данными $x = x_0$, $u = u_0$, $S = S_0$, $W = W_0$ строится частичный тур T_2 в графе G.

Четвертый этап. При помощи процедуры $P(x, S)$ с входными данными $x = x_0$, $S = S_0$ строится частичный тур T_3 в графе G. Полагаем

$$T_0 = \begin{cases} T_2, & \text{если } \rho(T_2) \geq \rho(T_3), \\ T_3 & \text{– в противном случае} \end{cases}$$

и переходим к пятому этапу.

Пятый этап. Частичный тур T_0 достраивается до гамильтонова цикла L_{A_2}, например, с помощью градиентного алгоритма [1]. Алгоритм A_2 описан полностью.

Теорема. Справедливо следующее соотношение

$$\rho(L_{A_2}) / \rho(L_0) \geq 3/4 . \tag{4}$$

Доказательство. При n четном с учетом (1) имеем

$$\rho(L_{A_2}) \geq \rho(T_0) \geq \frac{1}{2}[\rho(S_0) + \rho(W_0)] \geq 3/4\ \rho(L_0) .$$

При n нечетном возможны два случая:

а) $u_1 \in L_0$, $u_2 \in L_0$. В этом случае $\bar{\rho}(\bar{L}_0) = \rho(L_0)$, где $\bar{L}_0$ – гамильтонов цикл в графе $\bar{G}$, содержащий ребро u_3, имеющий максимальный вес. Тогда, учитывая (3), имеем

$$\rho(L_{A_2}) \geq \rho(T_3) \geq \frac{1}{2}[\bar{\rho}(\bar{S}_0) + \bar{\rho}(W_0)] \geq 3/4\ \bar{\rho}(\bar{L}_0) = 3/4\ \rho(L_0) .$$

в) $u_1 \notin L_0$, либо $u_2 \notin L_0$. В этом случае $\rho(u_0) \geq \rho(u^*)$, где u^* – ребро с минимальным весом в цикле L_0. Тогда, учитывая (2), имеем

$$\rho(L_{A_2}) \geq \rho(T_2) \geq \frac{1}{2}\left[\rho(S_0)+\rho(W_0)+\rho(u_0)\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left[\rho(L_0)+\frac{1}{2}(\rho(L_0)-\rho(u^*))+\rho(u_0)\right] \geq \frac{3}{4}\rho(L_0).$$

Теорема доказана полностью.

Следствие. Имеет место равенство

$$\Delta_{A_2} = \frac{3}{4}.$$

Доказательство. По теореме, $\Delta_{A_2} \geq \frac{3}{4}$. Построим примеры задачи коммивояжера, на которых соотношение (4) выполняется как равенство. Рассмотрим полный шестивершинный граф, изображенный на рис. 3 (выделены только те ребра графа, которые имеют ненулевой вес).

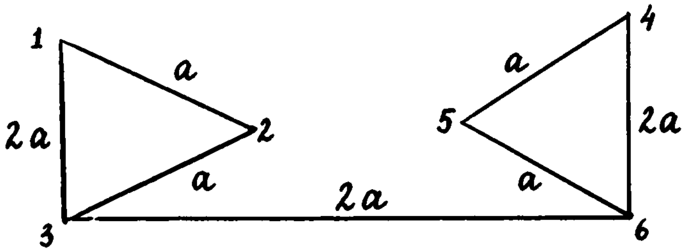

Рис. 3.

Легко проверить, что

$$S_0 = \{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,6),(6,4)\}, \quad \rho(S_0) = 8a,$$

$$L_0 = (1,2,5,4,6,3), \quad \rho(L_0) = 8a,$$

$$W_0 = \{(1,3),(4,6),(2,5)\}, \quad \rho(W_0) = 4a,$$

$$T_0 = \{(1,3),(2,3),(4,6),(5,6)\}, \quad \rho(T_0) = 6a,$$

$$L_{A_2} = (1,3,2,5,6,4), \quad \rho(L_{A_2}) = 6a.$$

Аналогичные примеры можно привести для любого $n = 6m$, где m – натуральное число (достаточно взять m копий графа, изображенного на рис. 3).

Следствие доказано.

При оценке трудоемкости алгоритма A_2 достаточно заметить, что на каждом этапе его работы затрачивается не более Cn^4 операций, где C – некоторая константа.

Поступила в ред.-изд.отдел
1 февраля 1984 г.

Литература

I. Ковалев М.М., Котов В.М. Субоптимальные алгоритмы решения задачи коммивояжера. - Деп. ВИНИТИ, № 2403-82. Деп. - 31с.

2. Bellmore M., Malone J.C. Pathology of Travelling salesman subtour-elimination algorithms. - Oper. Res., 1971, vol.19, N 2, p.278-307.