Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25.

УДК 519.854

БАЗИСНЫЕ СИСТЕМЫ И ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ БАЗИСНЫХ СИСТЕМ

Н.И.Глебов

В работе вводится понятие базисной системы, тесно связанное с понятием полиматроида, но по сравнению с последним в некоторых отношениях более естественное и удобное, например, для обобщения задачи о потоке в сети.

Результаты, касающиеся пересечения полиматроидов [1], переносятся на случай пересечения базисных систем, что позволяет предложить и обосновать метод "сокращения невязок" для решения задачи минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении двух базисных систем. Показано также, что к числу таких задач относится задача о базисном потоке минимальной стоимости [2], частными случаями которой являются задачи, рассматривавшиеся в [3, 4]. Наконец, для базисных потоков сформулирован и доказан некоторый аналог теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе [2].

1. Используемые в дальнейшем обозначения:

$\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел;

$\mathbb{Z}^E$ – множество всех функций $x : E \to \mathbb{Z}$, называемых также векторами;

$x \leq y$ – эквивалентно тому, что все компоненты вектора $y - x$ неотрицательны;

$x(i)$ – i-я компонента вектора x (или значение x на элементе $i \in E$);

$x \wedge y$ $(x \vee y)$ – точная нижняя (верхняя) грань векторов (функций) x и y относительно частичного порядка $\leq$;

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{Z}^E \mid x \wedge y \leq z \leq x \vee y\};$$

$$|x| = \sum\{|x(i)| \mid i \in E\};$$

$$x[A] = \sum\{x(i) \mid i \in A\}, \ A \subset E;$$

δ^i – функция, равная всюду в области определения нулю, за исключением точки i, где она равна 1; область ее определения специально не уточняется, но легко усматривается из контекста.

(x, y) – элемент из $\mathbb{Z}^{E_1 \cup E_2}$, совпадающий с x на E_1 и с y на E_2, если $x \in \mathbb{Z}^{E_1}$, $y \in \mathbb{Z}^{E_2}$ и $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

Определение 1. Базисной системой будем называть пару $(E, \mathcal{B})$, где E - непустое конечное множество, а $\mathcal{B}$ - подмножество $\mathbb{Z}^E$, удовлетворяющее условию:

$$(A)\quad \begin{cases} \text{для любых } x, y \in \mathcal{B} \text{ имеет место} \\ x(i) > y(i) \Rightarrow \exists j \in E(x(j) < y(j) \,\&\, x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}). \end{cases} \qquad (1)$$

. Множество $\mathcal{B}$ будем также называть базисной системой на E.

Легко видеть, что для базисной системы $\mathcal{B}$ существует число $r(\mathcal{B})$ такое, что при любом x из $\mathcal{B}$ имеет место $x[E] = r(\mathcal{B})$. В случае $\mathcal{B} \neq \emptyset$ такое число единственно, и оно будет называться рангом системы.

Примеры базисных систем.

1) Пусть P - полиматроид на E (см. [1]). Тогда $\mathcal{B}=\{x \in P \mid x[E] = b_0\}$ - базисная система на E (ранга b_0).

2) Если P_1 и P_2 - полиматроиды на E_1 и E_2 соответственно, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \mid -x \in P_1,\ y \in P_2,\ x[E_1] + y[E_2] = b_0\}$$

- базисная система на $E_1 \cup E_2$ (ранга b_0).

3) Пусть (X, Y, L) - сцепленная векторная система (в смысле Шрайвера [3, 5]). Тогда $\mathcal{B} = \{(x, y) \mid (-x, y) \in L\}$ - базисная система на $X \cup Y$ (ранга 0).

2. Пусть $\mathcal{B}$ - базисная система на E и $a, b \in \mathbb{Z}^E$. Тогда справедливы следующие свойства:

I) $a + \mathcal{B} = \{x \mid x - a \in \mathcal{B}\}$ - базисная система на E (a - сдвиг $\mathcal{B}$).

II) $\mathcal{B} \cap [a, b]$ - базисная система на E ($[a, b]$ - ограничение $\mathcal{B}$).

III) аксиома (A), положенная в основу определения базисн системы, эквивалентна (двойственной) аксиоме

$$(A^*)\quad \begin{cases} \text{для любых } x, y \in \mathcal{B} \text{ имеет место} \\ x(j) < y(j) \Rightarrow \exists i \in E(x(i) > y(i) \,\&\, x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}). \end{cases} \qquad (1^*)$$

Докажем, что из (A) следует (A^*). Фиксируем $j_0 \in E$, для которого $x(j_0) < y(j_0)$, и предполагаем свойство (1^*) выполненным для x и всех $y' \in \mathcal{B}$ таких, что $|x - y'| < |x - y|$. (В случае $|x - y| = 2$ утверждение (1^*) очевидным образом выполняется.)

Если других j (отличных от j_0) со свойством $x(j) < y(j)$ не существует, то для любого $i \in E$ такого, что $x(i) > y(i)$, имеет место $x + \delta^{j_0} - \delta^i \in \mathcal{B}$. Поскольку в данном случае множество таких i непусто, то утверждение доказано.

Пусть $j_1 \neq j_0$ и $x(j_1) < y(j_1)$. По свойству (А), существует $i_1 \in E$ такой, что $x(i_1) > y(i_1)$ и $y' = y + \delta^{i_1} - \delta^{j_1} \in \mathcal{B} \cap [x,y]$. Так как $y'(j_0) > x(j_0)$ и $|x - y'| < |x - y|$, то, по индуктивному предположению, при некотором $i_0 \in E$ будем иметь $x + \delta^{j_0} - \delta^{i_0} \in \mathcal{B} \cap [x, y'] \subset \mathcal{B} \cap [x, y]$, что и требовалось доказать. Утверждение $(A^*) \Longrightarrow (A)$ доказывается аналогично.

IY) $-\mathcal{B} = \{x \mid -x \in \mathcal{B}\}$ – базисная система на E (двойственная $\mathcal{B}$). Утверждение непосредственно следует из предыдущего.

Y) если $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ – базисные системы на E_1 и E_2 соответственно, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{(x,y) \mid x \in \mathcal{B}_1,\ y \in \mathcal{B}_2\}$ – базисная система на $E_1 \cup E_2$ (декартово произведение).

YI) пусть $\mathcal{B}^{\leq} = \{x \in Z^E \mid x \leq z$ при некотором $z \in \mathcal{B}\}$. Тогда (А) эквивалентно следующему свойству:

$$(A')\ \begin{cases} \text{для любых } x, y \in \mathcal{B}^{\leq} \text{ имеет место} \\ x[E] < y[E] \Rightarrow \exists i \in E\,(x + \delta^i \in [x,y] \cap \mathcal{B}^{\leq}) \end{cases} \qquad (1')$$

В самом деле, пусть $x, y \in \mathcal{B}^{\leq}$, $x[E] < y[E]$ и (1′) не выполняется, т.е. $\forall i \in E\,(x + \delta^i \in [x,y] \Rightarrow x + \delta^i \notin \mathcal{B}^{\leq})$. Отсюда непосредственно следует, что $\forall \bar{x} \in \mathcal{B}\ (x \leq \bar{x}\ \&\ x(i) < y(i) \Longrightarrow x(i) = \bar{x}(i))$.

Выберем $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{B}$ так, чтобы выполнялись неравенства $\bar{x} \geq x$, $\bar{y} \geq y$ и $|\bar{x} - \bar{y}|$ было минимальным. Тогда будем иметь

$$x(i) < y(i) \Longrightarrow \bar{x}(i) = x(i),$$
$$\bar{x}(j) > \bar{y}(j) \Longrightarrow \bar{x}(j) = x(j).$$

Первое из этих утверждений фигурировало выше, а второе справедливо в силу выбора $\bar{x}$ и $\bar{y}$, так как, опираясь на свойство (А), при некотором $i \in E$, $i \neq j$, мы имеем $\tilde{x} = \bar{x} - \delta^j + \delta^i \in \mathcal{B}$, что в случае $\bar{x}(j) > x(j)$ приводит к противоречию: $x \leq \tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathcal{B}$ и $|\tilde{x} - \bar{y}| < |\bar{x} - \bar{y}|$.

Таким образом, в случае $\bar{x}(k) > x(k)$ должны выполняться неравенства $x(k) \geq y(k)$ и $\bar{x}(k) \leq \bar{y}(k)$, из которых следует $\bar{x}(k) - x(k) \leq \bar{y}(k) - y(k)$. Последнее неравенство справедливо и при $\bar{x}(k) = x(k)$. Следовательно, $(\bar{x} - x)[E] \leq (\bar{y} - y)[E]$, и $x[E] \geq y[E]$. Полученное противоречие завершает наше доказательство. (Утверждение $(A') \Longrightarrow (A)$ достаточно очевидно.)

Свойство (A') означает, что множество $\mathcal{B}^{\leq}$ фактически является "неограниченным полиматроидом" и, следовательно, для него справедливы все утверждения п. 3° из [1] (с заменой в некоторых случаях $|x|$ на $x[E]$).

Л е м м а 1. (Лемма 2 [1].) Если $x \in \mathcal{B}^{\leq}$ и $x \leq z$, то для любого целого числа t, $x[E] \leq t \leq rang(z)$, существует $y \in \in [x,z] \cap \mathcal{B}^{\leq}$ такой, что $y[E] = t$. (Здесь под $rang(z)$ понимается $max\{x[E] \mid x \in \mathcal{B}^{\leq}, x \leq z\}$.)

Л е м м а 2. (Лемма 3 [1].) Пусть $z, g_i \in \mathbf{Z}^E$, $z - g_i \in \mathcal{B}^{\leq}$, $i = 1, \ldots, K$ $rang(z) = z[E] - 1$. Тогда

$$z - \sum_{i=1}^{K} g_i \notin \mathcal{B}^{\leq} .$$

Л е м м а 3. (Лемма 4 [1].) Если $x, y \in \mathcal{B}^{\leq}$ и $x \wedge y + \delta^j \notin \mathcal{B}^{\leq}$, то из $x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}^{\leq}$ следует $y + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}^{\leq}$.

Л е м м а 4. (Лемма 5 [1].) Если $x, x + \delta^K - \delta^i$, $x + \delta^j - \delta^K \in \mathcal{B}$, то $x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}$.

Л е м м а 5. (Лемма 6 [1].) Если $x, y \in \mathcal{B}$ и $(x-y)[A] + + (y-x)[B] > \frac{1}{2} |x-y|$, то найдутся $i \in A$ и $j \in B$ такие, что $x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}$.

Т е о р е м а 1. (Теорема 2 [1].) Если $x, y \in \mathcal{B}$, $\alpha = 0 \vee (x-y)$ и $\beta = 0 \vee (y-x)$, то существует (α, β) - поток в графе $H(x, \mathcal{B})$. ($H(x,\mathcal{B}) = (V, A)$, где $V = E^- \cup E^+$, $E^- = \{e^- \mid e \in E\}$, $E^+ = \{e^+ \mid e \in E\}$ и $A = \{(i^-, j^+) \mid x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}\}$).

3. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - базисные системы на E и $x \in \mathbf{Z}^E$. Ориентированный граф $H(x)$ определим таким же образом, как это делалось в [1] для полиматроидов, а именно:

$$H(x) = (E^- \cup E^+, A_1 \cup A_2),$$

где $A_1 = \{(i^-, j^+) \mid x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}_1\}, A_2 = \{(j^+, i^-) \mid x + \delta^j - \delta^i \in \mathcal{B}_2\}$. Граф $H(x)$, по существу, представляет собой описание окрестностей (первого порядка) точки x в базисных системах $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ и в дальнейшем будет называться <u>графом окрестностей</u> точки x в $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.

Если γ - орцикл графа $H(x)$, то через z_γ обозначается элемент из $\mathbf{Z}^E$, определяемый следующим образом: $z_\gamma(i) = \bar{\gamma}(i^+) - \bar{\gamma}(i^-)$, где $\bar{\gamma}(p) = 1$, если орцикл γ проходит через вершину p, и $\bar{\gamma}(p) = 0$ - в противном случае. Понятия ординарный орцикл и неразложимый орцикл употребляются в том же смысле, что и в [1].

Из сказанного в предыдущем пункте ясно, что для пересечения базисных систем имеют место утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4 из [1].

Т е о р е м а 2. Если $x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ и γ - неразложимый орцикл графа $H(x)$, то $x + z_\gamma \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$.

Т е о р е м а 3. Если $x, y \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, то в графе $H(x)$ существуют ординарные неразложимые орциклы γ_K, $K = 1, \ldots, m$, такие, что $x + z_{\gamma_K} \in [x, y]$ и $y - x = \sum_{K=1}^{m} \lambda_K z_{\gamma_K}$, где $\lambda_K \geq 0$, $K = 1, \ldots, m$.

Важное применение приведенные теоремы находят при обосновании предлагаемых ниже методов решения оптимизационных задач. Здесь же мы используем их для введения (и обоснования) некоторой достаточно общей операции над базисными системами.

Пусть $\mathcal{B}_1 \subset Z^{E_1}$ и $\mathcal{B}_2 \subset Z^{E_1 \cup E_2}$, где E_1 и E_2 - непустые, конечные и непересекающиеся множества.

Определение 2. Отражением $\mathcal{B}_1$ от $\mathcal{B}_2$ будем называть множество $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \subset Z^{E_2}$, представляющее собой образ множества $\mathcal{B}_1$ при (многозначном) отображении, графиком которого является множество $\mathcal{B}_2$, т.е. $\mathcal{B} = \{y \in Z^{E_2} \mid (x,y) \in \mathcal{B}_2$ при некотором $x \in \mathcal{B}_1\}$.

Теорема 4. Если $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - базисные системы, то отражение $\mathcal{B}_1$ от $\mathcal{B}_2$ является также базисной системой.

Доказательство. Пусть $y', y'' \in \mathcal{B}$ и $y'(i) > y''(i)$. Посредством x' и x'' обозначим элементы из $\mathcal{B}_1$ такие, что (x', y'), $(x'', y'') \in \mathcal{B}_2$.

Рассмотрим граф $H(x', y')$ окрестностей точки (x', y') в базисных системах $\mathcal{B}_1'$ и $\mathcal{B}_2$, где $\mathcal{B}_1' = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}'$, $\mathcal{B}' = \{y \in Z^{E_2} \mid y[E_2] = \tau(\mathcal{B}_2) - \tau(\mathcal{B}_1)\}$. Очевидно, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ и $(x', y'), (x'', y'') \in \mathcal{B}_1' \cap \mathcal{B}_2$. Подграф $H((x', y'), \mathcal{B}_1')$ графа $H(x', y')$ в качестве компоненты связности содержит полный двудольный граф на множестве вершин $E_2^- \cup E_2^+$. Из этого следует, что в графе $H(x', y')$ любая дуга, исходящая из множества E_2^-, ведет в E_2^+ и каждый неразложимый орцикл содержит не более одной дуги такого вида.

Согласно теоремам 2 и 3, в $H(x', y')$ найдется неразложимый орцикл γ такой, что $(x', y') + z_\gamma \in \mathcal{B}_1' \cap \mathcal{B}_2 \cap [(x', y'), (x'', y'')]$ и $z_\gamma(i) = -1$. Пусть $z_\gamma = (z^1, z^2)$, $z^1 \in Z^{E_1}$ и $z^2 \in Z^{E_2}$. Тогда $x' + z' \in \mathcal{B}_1$, $y' + z^2 \in \mathcal{B} \cap [y', y'']$ и, учитывая сделанное выше замечание, $y' + z^2 = y' + \delta^j - \delta^i$ при некотором $j \in E_2$, что и доказывает утверждение теоремы.

Пример. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - базисные системы на E; $\bar{E} = \{\bar{e} \mid e \in E\}$, $E' = \{e' \mid e \in E\}$ - "двойники" множества E; $\bar{\mathcal{B}}_2$ - базисная система на $\bar{E}$, получаемая из $\mathcal{B}_2$ заменой каждого элемента $e \in E$ его двойником $\bar{e}$ из $\bar{E}$; $\tilde{\mathcal{B}} = \{(x, y, z) \in Z^{E \cup \bar{E} \cup E'} \mid x(e) + y(\bar{e}) + z(e') = 0$, $\forall e \in E\}$. Тогда отражением базисной системы $(-\mathcal{B}_1) \times (-\bar{\mathcal{B}}_2)$ от $\tilde{\mathcal{B}}$ будет базисная система $\mathcal{B} = \{z \in Z^{E_1} \mid \forall e \in E(z(e') = x(e) + y(\bar{e}))$, где $x \in \mathcal{B}_1$, $y \in \mathcal{B}_2\}$, являющаяся, по существу, алгебраической суммой базисных систем $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.

В качестве других примеров введенной операции отражения можно сослаться на известные операции ограничения и сжатия для матроидов.

4. Перейдем теперь к рассмотрению задачи минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении двух базисных систем:

$$min\{f(x) \mid x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2\}, \tag{2}$$

где $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - базисные системы на E, $f(x) = \sum\{f_e(x(e)) \mid e \in E\}$, $f_e(\cdot)$ - выпуклые функции. Предполагается, что $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \varphi$.

Как и в [1], каждой вершине графа $H(x)$ припишем вес w, полагая $w(i^-) = f(x-\delta^i) - f(x)$ и $w(i^+) = f(x+\delta^i) - f(x)$. Тогда критерием оптимальности будет служить теорема 5, аналогичная теореме 5 из [1].

Т е о р е м а 5. Элемент x из $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ является точкой минимума функции f тогда и только тогда, когда граф $H(x)$ не содержит орциклов отрицательного веса.

На этом критерии и т^оремах 2, 3 может быть основан один из возможных способов решения задачи (2):

1°) начать с некоторого элемента $x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$;

2°) если в $H(x)$ отсутствуют орциклы отрицательного веса, то x оптимален. В противном случае выделить в $H(x)$ неразложимый орцикл γ отрицательного веса и заменить x на $x + z_\gamma$. (При этом значение функции f изменится на величину, равную весу орцикла γ.)

Шаг 2° повторять до тех пор, пока не будет получен оптимальный элемент. (Условия конечности такого процесса здесь не обсуждаются.)

Некоторым недостатком данного способа отыскания оптимального решения является неопределенность процедуры выбора начального допустимого решения (шаг 1°). В связи с этим наметим другой подход, в значительной мере свободный от указанного недостатка.

Предположим, что у нас имеется вектор $x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, оптимальный среди всех тех элементов множества $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, значения которых при каждом i из E_0, $E_0 \subset E$, принадлежат отрезку $[0, x(i)]$. Назовем x с таким свойством E_0-оптимальным. Требуется найти E_0-оптимальный элемент с нулевым значением на множестве E_0.

Введем в рассмотрение векторы a и b:

$$a(i) = \begin{cases} 0, & i \in E_0, \\ -\infty, & i \in E \setminus E_0, \end{cases}$$

$$b(i) = \begin{cases} x(i), & i \in E_0, \\ +\infty, & i \in E \setminus E_0, \end{cases}$$

и заменим каждую из базисных систем $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ ее $[a,b]$ - ограничением $\mathcal{B}_1'$ и $\mathcal{B}_2'$ соответственно. Тогда x будет оптимальным в $\mathcal{B}_1' \cap \mathcal{B}_2'$. Выбрав далее в графе окрестностей точки x в базисных системах $\mathcal{B}_1'$ и $\mathcal{B}_2'$ вершину i^+ с $x(i) < 0$ (либо i^- с $x(i) > 0$), $i \in E_0$, найдем проходящий через нее неразложимый орцикл γ минимального веса и заменим x на $x + z_\gamma$. Полученный таким способом элемент $x + z_\gamma$ будет E_0-оптимальным. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству теоремы 6 (см. [1]).

Повторение указанной процедуры (в случае $|\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2| < \infty$) приведет в конечном счете либо к решению рассматриваемой задачи, либо к установлению ее неразрешимости в силу отсутствия в $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ элементов с нулевыми значениями на множестве E_0. (Последнее обстоятельство проявится на некотором этапе в отсутствии орциклов нужного вида в графе окрестностей.)

Вернемся теперь к исходной задаче (2).

Введем в рассмотрение множества $\bar{E}$ и E' - "двойники" множества E, базисные системы $\bar{\mathcal{B}}_2$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ (см. пример) и базисную систему $\mathcal{B}' = \{z \in Z^{E'} \mid z[E'] = 0\}$. Далее, положим $\bar{\mathcal{B}}_1 = \mathcal{B}_1 \times (-\bar{\mathcal{B}}_2) \times \mathcal{B}'$ и $\bar{f}(x, y, z) = f(x)$.

Нетрудно видеть, что $(x, y, z) \in \bar{\mathcal{B}}_1 \cap \tilde{\mathcal{B}}$ и $z = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ и $y(\bar{e}) = -x(e)$ при любом $e \in E$. Отсюда следует, что исходная задача сводится к задаче поиска в $\bar{\mathcal{B}}_1 \cap \tilde{\mathcal{B}} \cap \{(x, y, z) | z = 0\}$ минимума функции $\bar{f}$, т.е. к рассмотренной выше задаче поиска E' -оптимального решения с нулевым значением на множестве E'.

Процедура выбора для последней какого-либо E'-оптимального решения может быть более простой, чем процедура выбора допустимого решения исходной задачи. В качестве такого решения в определенных случаях можно взять (x, y, z), где x есть точка минимума f на $\mathcal{B}_1$, y - произвольный элемент из $-\bar{\mathcal{B}}_2$ и $z(e') = -x(e) - y(\bar{e})$ при всех $e \in E$.

Изложенный способ решения задачи (2) есть, по существу, метод сокращения невязок, в котором роль вектора невязок играет компонента z рассматриваемых векторов (x, y, z).

Из приведенных выше рассмотрений видно, что исходная задача минимизации на пересечении базисных систем $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ сводится к задаче минимизации на пересечении базисных систем $\mathcal{B}_1 \times (-\bar{\mathcal{B}}_2)$ и $\tilde{\mathcal{B}}_0 = \{(x, y) \in Z^{E \cup \bar{E}} | x(e) + y(\bar{e}) = 0, \ \forall e \in E\}$.

В связи с этим уделим некоторое внимание задаче (2) в том случае, когда $\mathcal{B}_1$ есть (произвольная) базисная система $\mathcal{B}$ на множестве $E \cup \bar{E}$, а $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_0$, где

$$\mathcal{B}_0 = \{x \in Z^{E \cup \bar{E}} \mid x(e) + x(\bar{e}) = 0, \ \forall e \in E\}.$$

Если следовать изложенной ранее схеме решения этой задачи, то пришлось бы на каждой итерации рассматривать граф $H(x)$ с числом вершин $4 \cdot |E|$.

Однако ввиду специфичности базисной системы $\mathcal{B}_0$ можно некоторые пары вершин рассматривать как одну вершину и сократить тем самым вдвое общее число вершин графа. Так при любом $e \in E$ в графе $H(x)$ присутствуют вершины $e^+, e^-, \bar{e}^+$ и $\bar{e}^-$. Вершины e^+ и $\bar{e}^-$ можно отождествить и считать одной новой вершиной e, а e^- и $\bar{e}^+$ - новой вершиной $\bar{e}$.

В результате подобной редукции мы будем иметь дело с графом $H^*(x) = (E \cup \bar{E}, A^*)$, где $A^* = \{(\bar{p}, q) \mid x + \delta^q - \delta^p \in \mathcal{B}\}$ (здесь и далее при $p = \bar{e}$ считаем $\bar{p} = e$, т.е. $\bar{\bar{e}} = e$). При этом соответствующим образом определяются и веса новых вершин, а именно: $w(e) = w(e^+) + w(\bar{e}^-) = f(x + \delta^e) + f(x - \delta^{\bar{e}}) - 2f(x)$ и $w(\bar{e}) = w(e^-) + w(\bar{e}^+) = f(x + \delta^{\bar{e}}) + f(x - \delta^e) - 2f(x)$. Наконец, для простого орцикла γ графа $H^*(x)$ вектор z_γ определяется так: $z_\gamma(p) = -z_\gamma(\bar{p}) = 1$, если $p \in \gamma$ и $\bar{p} \notin \gamma$; $z_\gamma(p) = 0$ - в остальных случаях.

5. Пусть в последней задаче $\mathcal{B}$ - декартово произведение базисных систем $(E_v, \mathcal{B}_v)$, $v \in V$, где $\{E_v \mid v \in V\}$ - разбиение множества $E \cup \bar{E}$. Такому разбиению может быть поставлен во взаимно-однозначное соответствие ориентированный мультиграф $G = (V, E)$, в котором вершина v считается началом (концом) дуги e, если $e \in E_v$ ($\bar{e} \in E_v$). Если дополнительно предполагается, что $|E_v \cap \{e, \bar{e}\}| \leq 1$ при любых v и e, то G не будет иметь петель.

В результате мы получаем не что иное, как базисную сеть, рассматривавшуюся в [2]. При этом базисным потоком в смысле данного там определения будет сужение на E любого $x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0$, т.е. множество базисных потоков представляет собой проекцию на $\mathbf{Z}^E$ множества $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0$. Принимая это во внимание, можно заключить, что задача о базисном потоке минимальной стоимости представляет собой "структурированную" форму задачи минимизации на пересечении базисных систем $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0$.

Учет внутренней структуры задачи может быть использован, например, для получения некоторых аналогов теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе. Здесь мы сформулируем и докажем одну из таких теорем [2].

Определение 3. Функцию $r : 2^N \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ назовем ранговой функцией базисной системы $(N, \mathcal{B})$, если

$$r(A) = max\{z[A] \mid z \in \mathcal{B}\},\ A \subset N.$$

Пусть $s, t \in V$, $e_0 \in E_t$ и $\bar{e}_0 \in E_s$. Если $X, Y \subset V$, то посредством (X, Y) будем обозначать множество всех дуг графа G, направленных из X в Y. Всякое множество Y, $s \in Y \subset V \setminus t$, определяет (s,t)-разрез $C(Y)$ графа $G \setminus e_0$, где $C(Y) = (Y, V \setminus Y) \cup (V \setminus Y, Y) \setminus e_0$. Пусть, далее,

$$\Delta(Y) = \sum\{r_v(E_v) \mid v \in Y\},$$

$$\rho(Y) = \min \sum\{r_v(A_v) \mid v \in Y\},$$

где r_v - ранговая функция базисной системы $\mathcal{B}_v$, $A_v = E_v \cap (A \cup \bar{A})$, $\bar{A} = \{\bar{e} \mid e \in A\}$ и минимум берется по всем множествам A таким, что $C(Y) \subset A \subset E \setminus e_0$. Наконец, на базисную систему $\mathcal{B}_t$ наложим следующее ограничение: при любых $z \in \mathcal{B}_t$ и $q \in E_t$ имеет место $z + \delta^{e_0} - \delta^{q} \in \mathcal{B}_t$.

Т е о р е м а 6. Если $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0 \neq \emptyset$, то

$$\max x(e_0) = \min(\rho(Y) - \Delta(Y)),$$

где максимум берется по всем x из $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0$, а минимум - по всем множествам Y, определяющим (s, t)-разрезы в $G \setminus e_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любых x из $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0$ и множествах Y и A указанного выше вида имеем

$$\Delta(Y) = \sum\{r_v(E_v) \mid v \in Y\} = \sum\{x[E_v] \mid v \in Y\} =$$

$$= \sum\{x(e) \mid e \in (Y, V \setminus Y)\} + \sum\{x(\bar{e}) \mid e \in (V \setminus Y, Y)\} =$$

$$= x(\bar{e}_0) + \sum\{x[A_v] \mid v \in Y\} \leq$$

$$\leq - x(e_0) + \sum\{r_v(A_v) \mid v \in Y\}.$$

Остается доказать, что для $x \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0$ с максимальным значением $x(e_0)$ найдутся множества Y и A такие, что в приведенном выше неравенстве будет иметь место равенство.

Из теорем 2 и 3 (с учетом редукции графа $H(x)$) следует, что значение $x(e_0)$ является максимальным тогда и только тогда, когда в графе $H^*(x)$ отсутствуют орциклы γ такие, что $e_0 \in \gamma$ и $\bar{e}_0 \notin \gamma$. Следовательно, удаление вершины $\bar{e}_0$ из $H^*(x)$ в случае максимальности $x(e_0)$ приводит к разрыву всех орциклов, проходящих через e_0.

Пусть $H = H^*(x) \setminus \bar{e}_0$ и Q - множество вершин графа H, достижимых из e_0. Поскольку при $e \neq e_0$ дуги $(e, \bar{e})$ и $(\bar{e}, e)$ входят в H, то вершины e и $\bar{e}$ достижимы или недостижимы обе одновременно.

Определим множества Y и A, положив $Y = \{v \in V \setminus t \mid v$ инцидентна дуге $e \in Q\}$, $A = E \setminus Q$. Поскольку, $e_0 \in Q$, то $s \in Y$ и

$A \subset E \setminus e_0$. В силу наложенного на $\mathcal{B}_t$ ограничения, граф H содержит все дуги вида $(\bar{q}, e_0)$, $q \in E_t \setminus e_0$, и, следовательно, ни одна из начальных вершин этих дуг недостижима из e_0. Таким образом, $\{q, \bar{q}\} \cap \cap Q = \emptyset$ при $q \in E_t \setminus e_0$, откуда следует, что все дуги разреза $C(Y)$, инцидентные вершине t, принадлежат множеству A. Принадлежность множеству A остальных дуг разреза $C(Y)$ непосредственно следует из определения множества Y.

Для завершения доказательства достаточно показать, что $z_v(A_v) = = x[A_v]$, $v \in Y$. Предположим противное, т.е. $z_v(A_v) > x[A_v]$ при некотором $v \in Y$. Тогда найдется $z \in \mathcal{B}$ такой, что $z[A_v] > > x[A_v]$. При этом z можно считать совпадающим с x вне множества E_v.

Пусть $A_v^0 = \{p \in E_v \mid x(p) > z(p)\}$, $B_v^0 = \{p \in E_v \mid x(p) < z(p)\}$. Учитывая равенство $x[E_v] = z[E_v]$, будем иметь $(x - z)[A_v^0] = = (z - x)[B_v^0] = \frac{1}{2}|x - z|$, $(z - x)[B_v^0 \cap A_v] > (x - z)[A_v^0 \cap A_v]$, и, наконец, $(x - z)[A_v^0 \setminus A_v] + (z - x)[B_v^0 \cap A_v] > \frac{1}{2}|x - z|$. Отсюда, по лемме 5, следует, что при некоторых $p \in E_v \setminus A_v$ и $q \in A_v$ имеет место $x + \delta^q - \delta^p \in \mathcal{B}$. Последнее свидетельствует о наличии в графе H дуги $(\bar{p}, q)$, начальная вершина которой принадлежит Q, а следовательно, и $q \in Q$, что приводит к противоречию, поскольку $A_v \cap Q = = \emptyset$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В том случае, когда наложенное на базисную систему $\mathcal{B}_t$ ограничение не выполняется, теорема остается в силе, если в ее формулировке вместо множеств Y, определяющих (s, t)-разрезы, рассматривать любые множества, содержащие s. При этом в случае $t \in Y$ в A должна входить дуга e_0.

Поступила в ред.-изд.отдел
11 октября 1984 г.

Л и т е р а т у р а

1. Глебов Н.И. О задаче минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении полиматроидов. - В кн.: Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы), Новосибирск, 1983, вып.23, с. 33-43.

2. Глебов Н.И. Аналог теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе для базисных сетей. - Тез. докл. III Всесоюз. совещ., Ташкент, ч.II, Новосибирск, 1984, с.29-30.

3. Глебов Н.И. Обобщение задачи о потоке в сети. - Тез. докл. II Всесоюз. совещ., Улан-Удэ, ч.II, Новосибирск, 1982, с.30-32.

4. Lawler E.L., Martel C.U. Computing maximal "polymatroidal" network flows. - Math. Oper. Res., 1982, v. 7, N 3, pp. 334-347.

5. Schrijver A. Matroids and Linking Systems. - Mathematical Centre Tracts 88, Amsterdam, 1978.